

71:05-1/1

СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ТОЛПАЕВ ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВУМЕРНОЙ
ФИЛЬТРАЦИИ В АНИЗОТРОПНЫХ, НЕОДНОРОДНЫХ И
МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕДАХ**

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико – математических наук

Научный консультант:

доктор физико-математических

Президиум ВАК России, профессор Семенчин Е.А.

Решение от "10" "12" 19 04 г., № 469/38

присудил ученую степень ДОКТОРА

физ.-мат наук
Начальник управления ВАК России

Ставрополь

2004

К Р А Т К О Е С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ.....	11
<u>ГЛАВА 1.</u> МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ И АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ.....	29
<u>ГЛАВА 2.</u> УРАВНЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ.....	62
<u>ГЛАВА 3.</u> ИССЛЕДОВАНИЯ ТОЧНОСТИ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ РАСЧЁТОВ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ МЕТОДОМ АНИЗОТРОПНОГО ЭКВИВАЛЕНТИРОВАНИЯ.....	92
<u>ГЛАВА 4.</u> МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПРИЗАБОЙНЫХ ЗОНАХ СКВАЖИН (ПЗС).....	131
<u>ГЛАВА 5.</u> МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ К ОДИНОЧНЫМ И ГРУППОВЫМ СКВАЖИНАМ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ ПРИ ЛИНЕЙНОМ И НЕЛИНЕЙНОМ РЕЖИМАХ ФИЛЬТРАЦИИ.....	193
<u>ГЛАВА 6.</u> ТЕОРИЯ РАСЧЕТОВ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ В МНОГОСЛОЙНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ.....	233
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	267
ЛИТЕРАТУРА.....	268
<u>ПРИЛОЖЕНИЕ 1.</u> ЗАКОНЫ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БАЗИСОВ, КООРДИНАТ ВЕКТОРОВ И ТЕНЗОРОВ.....	294
<u>ПРИЛОЖЕНИЕ 2.</u> КАТАЛОГ ТЕНЗОРОВ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В СРЕДАХ С КОНКРЕТНЫМИ ЗАКОНАМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГНА.....	304
РИСУНКИ.....	317

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	11
ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ И АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ	29
1.1. Математическое моделирование линейной фильтрации в периодических средах методом анизотропного эквивалентирования.....	29
1.2. Определения полей главных направлений анизотропии (ГНА) и главных проницаемостей в линейных анизотропных моделях периодических сред.....	38
1.3. Расчёт эффективных тензоров проницаемостей по заданным полям ГНА и главных проницаемостей при линейном режиме фильтрации.....	40
1.4. Математическое моделирование нелинейной фильтрации в анизотропных средах методами кристаллофизики.....	43
<i>1.4.1. Векторно-матричная форма обобщённого закона Дарси (ОЗД) нелинейной фильтрации в анизотропных средах</i>	<i>45</i>
<i>1.4.2. Задача построения тензоров заданной симметрии.....</i>	<i>46</i>
<i>1.4.3. Математические модели нелинейной фильтрации для конкретных примеров анизотропных сред.....</i>	<i>48</i>
1.5. Математическое моделирование нелинейной фильтрации в анизотропных средах обобщённым методом С.Н.Нумерова.....	52
1.6. Пример построения математической модели нелинейной фильтрации в анизотропной среде обобщённым методом С.Н. Нумерова.....	56
ГЛАВА 2. УРАВНЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ	62
2.1. Уравнения неразрывности для пространственных, двумерных и плоскопараллельных и фильтрационных потоков жидкости	62
<i>2.1.1 Уравнение неразрывности для трёхмерного пространственного фильтрационного течения</i>	<i>62</i>

2.1.2	Уравнение неразрывности для двумерных фильтрационных течений сжимаемой и несжимаемой жидкости в искривлённых слоях переменной толщины.....	63
2.1.3	Уравнение неразрывности для двумерных течений несжимаемой жидкости в теории О.В. Голубевой.....	65
2.1.4	Уравнение неразрывности для плоскопараллельного фильтрационного течения. Функция тока плоскопараллельного течения.....	66
2.2.	Уравнения линейной двумерной фильтрации несжимаемой жидкости в анизотропных искривлённых слоях переменной толщины.....	67
2.2.1.	Вывод уравнений двумерной фильтрации в ортогональных криволинейных системах координат общего вида.....	68
2.2.2.	Расчёт коэффициентов проводимости для двумерной фильтрации в анизотропных искривлённых слоях постоянной конечной толщины.....	74
	Пример 1. Слои вращения.....	75
	Пример 2. Цилиндрические слои постоянной толщины.....	76
2.3.	Уравнения плоскопараллельных фильтрационных течений несжимаемой жидкости в анизотропно-неоднородных средах и их связь с обобщёнными аналитическими функциями комплексного переменного....	78
2.4.	Уравнения плоскопараллельных фильтрационных течений несжимаемой жидкости в анизотропно-однородных средах и их связь с аналитическими функциями комплексного переменного.....	80
2.5.	Комплексные потенциалы плоскопараллельных фильтрационных течений в анизотропно-однородных средах со специальными законами распределения ГНА.....	82
2.5.1.	Теорема о комплексном потенциале для специальной серии законов распределения ГНА.....	82
2.5.2.	<u>Следствие 1.</u> Конгруэнтные законы распределения ГНА.....	83

2.5.3. <i>Следствие 2. Центрально-симметричные законы распределения ГНА.....</i>	84
2.5.4. <i>Следствие 3. Изотермические законы распределения ГНА.....</i>	85
2.5.5 <i>Типичные граничные условия для комплексных потенциалов плоскопараллельных течений в анизотропных средах.....</i>	87
2.6. Комплексные потенциалы плоскопараллельных течений в однородных средах с прямолинейной анизотропией при произвольной ориентации ГНА.....	87
ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЯ ТОЧНОСТИ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ РАСЧЁТОВ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ МЕТОДОМ АНИЗОТРОПНОГО ЭКВИВАЛЕНТИРОВАНИЯ	92
3.1. Исследования точности расчётов дебита центральной скважины в слоистой круговой области методом анизотропного эквивалентирования	92
3.1.1. <i>Обобщение формулы Дюпюи для сред с центрально-симметричными законами распределения ГНА.....</i>	93
3.1.2. <i>Постановка задачи и численные расчёты дебита центральной скважины в круговых анизотропных пластах.....</i>	94
3.1.3. <i>Исследования точности методов интегрального и локального однородно-анизотропного эквивалентирования в расчётах дебита центральной скважины в слоистой среде.....</i>	101
3.2. Обобщение фильтрационных теорем об окружности и прямой для анизотропных сред	104
3.2.1. <i>Теорема об окружности.....</i>	105
3.2.2. <i>Теорема о прямой</i>	107
3.2.3. <i>Примеры применения теорем</i>	108
3.3. Искажение поступательного фильтрационного потока в изотропной среде круглым включением с прямолинейной анизотропией	111
3.4. Исследования точности аппроксимации включений из слоистых сред их анизотропными моделями	114

3.4.1. Искажение плоскопараллельных течений круглым слоистым включением.....	115
3.4.2. Сравнение фильтрационных потоков в слоистой среде и в её радиально-анизотропной модели.....	117
3.4.3. Расчёт коэффициентов разложения для комплексных потенциалов изотропных колец.....	120
3.5. Исследование точности фильтрационных расчётов в слоистых средах методом однородно-анизотропного эквивалентирования.....	122
3.5.1. Расчёт полного фильтрационного потока в прямоугольной анизотропной области.....	123
3.5.2. Расчёт фильтрационного потока в слоистой области.....	126
ГЛАВА 4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПРИЗАБОЙНЫХ ЗОНАХ СКВАЖИН (ПЗС).....	131
4.1. Причины выделения исследования течений в призабойных зонах скважин в самостоятельный раздел теории фильтрации.....	131
4.2. Влияние неопределённости в критериях существования линейного режима фильтрации на погрешность в расчётах дебитов скважин.....	133
4.3. Исследование фильтрации в призабойной зоне и в стволе нефтедобывающей скважины с гравийным фильтром.....	139
4.3.1. Постановка задачи.....	139
4.3.2. Вывод основных уравнений.....	139
4.3.3. Анализ работы гравийного фильтра при линейном режиме фильтрации.....	145
4.3.4. Выводы:.....	149
4.4. Точное решение задачи фильтрации к скважине с гравийным фильтром при линейном законе Дарси.....	150
4.4.1. Постановка задачи.....	150
4.4.2. Уравнения и граничные условия.....	151
4.4.3. Расчёт потенциала $\varphi_1(r,z)$	153
4.4.4. Расчёт потенциала $\varphi_2(r,z)$	155

4.4.5. Алгебраизация граничных условий сопряжения.....	156
4.4.6. Вычисление дебита скважины	158
4.5. Математическая модель работы фильтра каркасно-стержневой конструкции	162
4.6. Математическая модель работы фильтра кольчатой конструкции.....	165
4.7. Математическая модель работы фильтра перфорационной конструкции	167
4.8. Выводы из вычислительных экспериментов по исследованию работы фильтров нефтедобывающих скважин.....	169
4.9. Теорема о подобии фильтрационных полей в грунтах со специальными законами изменения проницаемости и её применения	170
4.9.1 Теорема о подобии фильтрационных полей.	170
4.9.2. Фильтрация под плоским флютбетом в кусочно-однородном грунте	172
4.9.3 Фильтрация к скважинам с кусочно – однородной призабойной зоной (1–ый способ расчета)	173
4.9.4 Фильтрация к скважинам с кусочно – однородной призабойной зоной. (2–ой способ расчета)	176
4.10. Математическое моделирование фильтрации к скважине с вертикальными трещинами гидроразрыва.....	181
4.11. Математическое моделирование фильтрации к скважине с горизонтальными трещинами гидроразрыва.....	186
ГЛАВА 5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ К ОДИНОЧНЫМ И ГРУППОВЫМ СКВАЖИНАМ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ ПРИ ЛИНЕЙНОМ И НЕЛИНЕЙНОМ РЕЖИМАХ ФИЛЬТРАЦИИ.....	193
5.1. Расчёт дебита и поля давления для одиночной скважины.....	193
5.1.1. Методом функций Грина	193

5.1.2. Построение серий точных решений полубратных граничных задач о дебите круговой скважины в однородных изотропных средах в постановке для двухсвязных областей.....	196
5.2 Применение вариационных методов для расчёта двусторонних оценок дебитов одиночных скважин в анизотропных средах при линейном режиме фильтрации.....	202
5.2.1. Метод пробных эквипотенциалей.....	203
5.2.2. Метод пробных линий тока.....	205
5.3. Расчёт двусторонних оценок дебитов скважин при нелинейных режимах фильтрации	208
5.3.1. Уравнения движения и граничные условия.....	208
5.3.2. Вариационная формулировка краевых задач.....	210
5.3.3. Верхняя оценка дебита скважины.....	213
5.3.4. Нижняя оценка дебита скважины.....	214
5.3.5. Дебит скважины в пласте овальной формы.....	216
5.4. Расчёт дебитов и поля давления для группы скважин (многоскважинная система без учёта ПЗС).....	218
5.4.1 Постановка задачи и обций метод решения	219
5.4.2 Интерференция скважин, эксплуатирующих однородный круговой пласт.....	221
5.4.3 Вычислительные эксперименты по интерференции скважин, произвольно расположенных в изотропном однородном пласте круговой формы	222
5.5. Расчёт дебитов и поля давления для группы скважин обладающих индивидуальными фильтрационными свойствами в призабойных зонах (многоскважинная система с учётом индивидуальных свойств ПЗС).....	225
5.5.1 Постановка задачи учёта особых фильтрационных свойств ПЗС и обций метод её решения	225
5.5.2 Пример. Влияние скачков проницаемости ПЗС на интерференцию скважин, произвольно расположенных в	

однородном пласте круговой формы. Обобщение формулы Щелкачева В.Н.....	227
5.6. Интерференция скважин с нелинейным режимом фильтрации в призабойных зонах	230
ГЛАВА 6. ТЕОРИЯ РАСЧЕТОВ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ В МНОГОСЛОЙНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ	233
6.1. Постановка задачи и принятые обозначения.....	233
6.2. Граничные условия 1-го типа (Дирихле по одной паре противоположных сторон прямоугольника и смешанные — по другой паре)	235
6.3. Передаточные функции. Переход к модельной задаче	236
6.4. Формулировка граничных условий в модельной задаче.....	238
6.5. Представление решений $w_i(x, y)$ рядами Фурье.....	239
6.6. Алгебраизация граничных условий в модельной задаче	241
6.7. Вычисление коэффициентов в рядах Фурье методом прогонки	243
6.8. Применения развитой теории.....	245
6.8.1 Метод интегрального эквивалентирования кусочно- неоднородных сред. Однородно-анизотропное эквивалентирование ...	246
6.8.2 Расчёт полей в изотропных неоднородных средах методом многослойного эквивалентирования	251
6.9 Граничные условия 2 – го типа (Неймана по одной паре противоположных сторон прямоугольника и смешанные по другой паре)....	257
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	267
ЛИТЕРАТУРА	268
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ЗАКОНЫ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БАЗИСОВ, КООРДИНАТ ВЕКТОРОВ И ТЕНЗОРОВ	294
П1.1 Закон преобразования базисов	294
П1.2 Закон преобразования координат векторов	297

П1.3 Закон ортогонального преобразования координат тензора 2-го ранга	298
П1.4 Законы ортогонального преобразования координат тензоров третьего и четвёртого рангов.....	300
<u>ПРИЛОЖЕНИЕ 2. КАТАЛОГ ТЕНЗОРОВ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В СРЕДАХ С КОНКРЕТНЫМИ ЗАКОНАМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГНА</u>	304
П2.1. Тензор проницаемости для среды с прямолинейным законом распределения ГНА	304
П2.2. Тензор проницаемости для среды с круговым цилиндрическим законом распределения ГНА	305
П2.3. Тензор проницаемости для среды со сферическим законом распределения ГНА	307
П2.4. Тензор проницаемости для сред с цилиндрическими законами распределения ГНА	309
<i>П2.4.1 Общий случай задания цилиндрических законов распределения ГНА.....</i>	<i>309</i>
<i>П2.4.2 Случай совпадения одного из ГНА цилиндрических законов с координатной осью (осью Oz)</i>	<i>313</i>
РИСУНКИ	317

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы и обзор литературы. Целый ряд актуальных проблем государственного значения связан с движением жидкости и газа в пористых средах. К таким проблемам относятся: водоснабжение; добыча энергетического сырья (нефти и газа); проектирование, строительство и эксплуатация гидротехнических и гидромелиоративных сооружений; борьба с загрязнением и засолением грунтовыми водами сельскохозяйственных площадей и т.д. Решение таких проблем требует разработки теории фильтрационных процессов в моделях пористых сред, наиболее адекватных к естественным условиям.

Процессы фильтрации нефти, газа, воды происходят в пористых средах, которые в зависимости от своих физико-механических свойств относятся к группе изотропных или анизотропных грунтов. Изотропными называются грунты, фильтрационные свойства которых в каждой точке одинаковы по всем направлениям. Анизотропными же называются грунты, фильтрационные свойства которых в каждой точке различны в разных направлениях.

Кроме того, продуктивные природные пласты, содержащие нефть и газ, проявляют не только изотропные или анизотропные и однородные или неоднородные фильтрационные свойства, но они почти всегда искривлены и имеют переменную толщину.

Именно поэтому теоретические исследования математических моделей двумерной фильтрации в анизотропных, неоднородных и многослойных средах являются актуальными.

Поскольку аналитические методы исследования фильтрации существенно зависят от типа пористой среды, то литературный обзор уместно провести по типам пористых сред: изотропным, анизотропным, кусочно-непрерывным, в частности, кусочно-постоянным и др.

Теория фильтрации в неоднородных изотропных средах представлена обширной литературой. Общим математическим аппаратом для исследования стационарной линейной двумерной фильтрации жидкости в таких средах слу-

жит теория p -аналитических функций, которая была развита в работах Л. Берса, А. Гельбарта, М.А. Лаврентьева, И.Н. Векуа, Г.Н. Положего и др. в [28, 234, 235]. Двумерными моделями описывают плоскопараллельную фильтрацию, осесимметричную и плановую фильтрацию в неоднородных средах, и фильтрацию в весьма тонких криволинейных слоях переменной толщины и проницаемости [41, 118]. С помощью методов теории p -аналитических функций описывается также нелинейная фильтрация с законом вида $\frac{\Phi(\mathbf{v})}{v} \bar{\mathbf{v}} = \nabla \varphi$, которая в плоскости годографа вектора $\bar{\mathbf{v}}$ приводится к системе линейных уравнений Г.Н. Положего [108].

Другой путь изучения двумерной фильтрации в неоднородных средах связан с выбором специальных классов дифференцируемых функций, характеризующих проницаемость k , для которых можно построить течения от всех типов (источник, диполь, мультиполи) особых точек с помощью метода перехода [32, 34, 127, 143, 155, 193]. В работах [23, 32, 34, 100, 101, 104, 155, 254] построены потенциалы течений от всех типов особых точек для проницаемостей $k(y)$ вида $e^{\alpha y}$, y^α , $\text{tg}^\alpha by$, $\text{th}^\alpha by$, $\text{lg}^\alpha by$ и др. В [35, 224, 225] построены потенциалы течений от источника в средах с проницаемостью k , задаваемой некоторыми цилиндрическими функциями или удовлетворяющей определенным уравнениям.

В целом теория p -аналитических функций из-за громоздкости своего аппарата не получила такого же широкого, как аналитические функции, применения. К тому же функции изменения проницаемости k , для которых известны решения соответствующих уравнений двумерной фильтрации, как правило, неограниченно возрастают до бесконечности (или убывают до нуля), что затрудняет их применение для аппроксимации проницаемости естественных грунтов.

Для расширения возможностей аппроксимации проницаемости реальных грунтов в теории фильтрации стали разрабатываться методы построения особых точек течений в средах с кусочно-непрерывными, в частности, с кусочно-постоянными функциями проницаемости. Это привело к необходимости решения задач сопряжения для эллиптических уравнений. Сложность решения задач

сопряжения существенно зависит от числа неоднородных зон (слоёв), формы их границ, вида функции проницаемости в этих зонах и от характера особых точек течений в зонах.

На практическую важность задач сопряжения для теории фильтрации обратили внимание давно. Ещё в 1942 г. П.Я. Полубаринова-Кочина рассматривала задачу о притоке к скважине в кусочно-неоднородном грунте. Заслуживает внимания и работа М.А. Лукомской [83], в которой по существу впервые была представлена модель работы скважины, учитывающая индивидуальные фильтрационные свойства призабойной зоны, отличающиеся от свойств пласта. Для двух однородных изотропных зон, разделенных или окружностью или прямой, О.В. Голубевой в [41, 42] задача сопряжения решена в общем виде методом изображений (теоремы об окружности и прямой). Применение методов изображений, преобразования Лапласа, последовательного применения теоремы об окружности и разложения в ряды Тейлора в [69, 71, 75] привело к общему решению задачи сопряжения в кусочно-однородных зонах с двумя и тремя параллельными прямыми или концентрическими окружностями. Затем полученное решение в [116, 231] В.М. Радыгиным и А.Г. Ярмицким с помощью дробно-линейных отображений и биполярных координат обобщено на две неконцентрические окружности. Общие решения задач сопряжения для двух однородных зон, разделенных кривыми второго порядка, указаны О.В. Голубевой и А.Я. Шпилевым в [46] на основе разработанного ими для этого класса задач метода конформных отображений с применением вспомогательных течений на римановых поверхностях. М.Ф. Бариновой в [9] методом изображений построено решение для восьми однородных зон, разделенных прямыми и окружностью, с двумя чередующимися значениями проницаемости в зонах. Особые точки течения должны при этом располагаться осесимметрично, а их мощности должны удовлетворять определённым уравнениям связи. В [74] была сделана попытка решить методом изображений задачу сопряжения для произвольного числа однородных зон, разделённых параллельными прямыми, что привело к много-

кратным рядам (с кратностью равной числу зон) и к сложной системе уравнений, оставленной без исследования.

Диссертантом в [208] построено общее решение задачи сопряжения для n концентрических окружностей, когда произвольные особые точки потенциала поля располагаются во внешней зоне, а проницаемости в слоистой среде чередуются. Кроме того, автор этой работы в [165] показывает, как с помощью доказанной им теоремы о подобии фильтрационных полей можно строить серии точных решений задач фильтрации в n -слойных средах с кусочно-постоянной проницаемостью.

Ещё один метод решения задач сопряжения в кусочно-однородных зонах основан на представлении потенциалов в виде интегралов по линиям сопряжения с сингулярными ядрами и неизвестной плотностью. Это приводит к системе интегральных уравнений или к задаче Римана [102, 110]. В [37, 38] задачи сопряжения для течения от источника решены для произвольного числа однородных зон, разделенных концентрическими окружностями, софокусными эллипсами или лучами. Конкретные краевые задачи сопряжения для двух, трех и четырех однородных зон, разделенных прямыми, приведены в [243].

Подчеркнём, что перечисленные методы становятся непригодными в случае неоднородных слоев с различными функциями проницаемости в них, так как полученные выше решения строились исходя из того, что потенциалы во всех слоях удовлетворяли одному уравнению (уравнению Лапласа). Для слоистой кусочно-неоднородной прямоугольной области, границы раздела n слоёв в которой параллельны одной из сторон прямоугольника, автором этой работы в [151, 162, 164, 167] развит метод точного решения задач сопряжения.

Задачи фильтрации в кусочно-неоднородных средах с двумя зонами и с криволинейной границей их раздела решались в [110], где с помощью известной функции Грина для каждой зоны задача сопряжения сводилась к обобщённой задаче Римана.

Для осесимметричных течений в кусочно-однородных пористых средах с одной или двумя концентрическими сферами раздела сред в [33, 70] дано обоб-

щение сферической теоремы Вейса [86]. Для течения типа поступательного потока через систему n круговых или сферических слоёв дано решение в [58].

Трудности аналитического решения многих практических задач в кусочно-неоднородных (например, в слоистых) средах способствовали появлению большого количества приближенных методов. В частности, Л.В. Старшинова для расчёта функции давления в макронеоднородном пласте предложила применять метод коллокации [132]. Для случая произвольной общей границы двух однородных сред М.И. Хмельником в работах [214, 215] развит приближенный метод, основанный на усреднении условий сопряжения на границах зон. (При этом потенциалы выражаются через решения двух вспомогательных задач обтекания, соответствующих непроницаемым и проницаемым границам, которые, в свою очередь, можно построить приближенно методом особых точек). Диссертант для приближённого решения задач сопряжения для расчёта течений под гидротехническими сооружениями в [146] предложил применять модифицированный им метод фрагментов акад. Н.Н. Павловского.

Подводя итог, отметим, что аналитические решения задач сопряжения потенциалов течений с произвольными особыми точками построены в основном только для двух и трех однородных зон. Применяемые же методы решения этих задач с увеличением числа зон, изменением формы их границ и замене постоянной проницаемости на переменную становятся малоприменимыми.

Более сложными по строению являются неоднородные анизотропные среды. Типичными представителями анизотропных пород являются трещиновато-пористые грунты и слоистые среды. Впервые исследования линейной плоскопараллельной фильтрации жидкости в анизотропных средах были, по-видимому, проведены Р. Дахлером [236] и Ф. Шаффернаком [256] в 1933 г. В результате проведенных исследований Р. Дахлер и Ф. Шаффернак приходят к выводу, что плоскопараллельные течения жидкости в слоистых средах (составленных из изотропных слоев весьма малой мощности) эквивалентны однотипным течениям жидкости в некоторой фиктивной пористой среде, проницаемость k_{\perp} которой вдоль напластования изотропных слоев отлична от

проницаемости $k_{||}$ вдоль их простирания. Причем для определения k_{\perp} и $k_{||}$ авторы указали расчётные формулы.

В России плоскопараллельная фильтрация жидкости в прямолинейных слоистых средах изучалась в 1937 г. В.И. Аравиным [2-6]. В.И. Аравин показывает, что путем аффинного преобразования плоскости течения жидкости в рассматриваемой среде, которое сводится к увеличению или уменьшению масштаба одной из осей декартовой системы координат в $n=\text{const}$ раз, изучение фильтрации в анизотропном грунте можно свести к изучению плоскопараллельного движения жидкости в некотором фиктивном однородном изотропном грунте. В 1940 г. В.И. Аравиным в работе [4] исследована плоскопараллельная фильтрация жидкости в однородных грунтах с радиальной анизотропией, то есть в таких мелкослоистых грунтах, чередующиеся изотропные слои которых располагались или по концентрическим окружностям, или вдоль лучей, выходящих из одной точки. И в этом случае, как показывает В.И. Аравин, расчёт фильтрации в анизотропном грунте с помощью подходящего преобразования области течения сводится к расчёту течения в изотропном однородном грунте. Заметим, что впервые указанный в работах В.И. Аравина метод сведения расчёта плоскопараллельной фильтрации в анизотропном однородном грунте к расчёту течения жидкости в изотропном однородном грунте был затем использован для решения различных фильтрационных задач и другими авторами. Так, В.С. Козлов [67] исследовал этим методом движения жидкости под гидротехническими сооружениями в однородных грунтах с прямолинейной анизотропией. П.Я. Полубаринова-Кочина [106] изучала в этих же грунтах приток жидкости к дрене на водоупоре.

В первых трудах В.И. Аравина и в последовавших за ними работах других авторов закон Дарси для случая фильтрации жидкости в анизотропных средах выписывался путем формального обобщения закона Дарси для изотропных грунтов так, как это было в 1938 г. сделано [119] Б.К. Ризенкампом. Впервые физическое и математическое обоснование обобщенному на случай анизотропных грунтов закону Дарси дал в 1948 г. в работе [237] Ж. Феррандон. Экспери-

ментальное подтверждение тензорной природы проницаемости анизотропных грунтов сделал в 1954 г., анализируя экспериментальные данные К. Джонсона и Р. Хагеса [240], А. Шейдеггер [257, 258].

Открытие в России в конце 50-х - начале 60-х годов крупных месторождений нефти и газа в трещиноватых коллекторах поставило перед исследователями новые задачи по теории фильтрации жидкости в анизотропных средах. В частности, стали предприниматься попытки дать объяснение анизотропии грунтов в отношении их фильтрационных свойств на основе менее грубых, чем модель Ж. Феррандона, представлений. Е.С. Роммом в работе [121], а также в его совместной с Б.В. Позиненко статье [122] вопрос о проницаемости трещиновато-пористых горных пород, характеризующихся наличием пространственно ориентированных систем трещин, решается на основе представления результирующей скорости фильтрации в виде суммы скоростей фильтрации трещинных потоков и скорости фильтрации в пористой среде. В результате проведенных исследований Е.С. Ромм другим путем доказал тензорную природу проницаемости трещиновато-пористых горных пород. Во всех моделях анизотропных сред, предлагаемых Ж. Феррандоном, Б.К. Ризенкампом, А. Шейдеггером, априори предполагалось, что тензоры проницаемости положительно определены и симметричны. Для теоретического обоснования этих положений обычно используются энергетические соображения, теория кристаллографии и принцип Онсагера теории необратимых термодинамических процессов [49, 73, 93]. Экспериментальное определение компонентов тензора проницаемости основано на измерении направленных проницаемостей и направленных фильтрационных сопротивлений [12, 15, 49, 246].

При решении задач плоскопараллельной фильтрации в анизотропных средах в большинстве работ рассматриваются среды с постоянными диагональными тензорами проницаемости в некоторой изотермической системе координат. Это позволяет с помощью линейной изотропизирующей подстановки свести уравнения движения к уравнению Лапласа [21, 29, 47, 88, 113, 120, 121, 168, 170,

209, 216, 218] и др. Для анизотропных сред более сложной структуры уравнения движения приводятся к каноническому виду, соответствующему гармоническим функциям [157, 218].

Основная трудность решения фильтрационных задач сопряжения для кусочно-однородных анизотропных сред в том, что при сведении этих задач к изотропным средам изотропизирующую деформацию зон однородности нужно строить так, чтобы она была непрерывной на границах раздела зон. Диссертантом это было сделано для двух однородных анизотропных зон, разделенных окружностью или прямой [45, 154]. Ряд конкретных краевых задач в кусочно-однородных анизотропных средах решён С.Е. Холодовским в работах [219, 220, 222].

Для линейной фильтрации в композитных средах с периодической структурой применяются методы осреднения дифференциальных операторов, основанные на разложении решений в ряды по степеням малого параметра - периода коэффициентов уравнений [17] или на осреднении уравнений движения по объёму элементарной ячейки с целью вычисления эффективного тензора проницаемости [11]. В работах С.Е. Холодовского эффективные тензоры проницаемости для линейного режима фильтрации строятся методом гидродинамического осреднения [216, 217, 223].

При изучении фильтрации в трещиноватых средах часто обнаруживается, что трещины имеют пространственную ориентацию. В этой ситуации в работах [66, 120, 121, 241] результирующую скорость фильтрации находили методом суммирования в элементарном объёме скоростей фильтрации в отдельных трещинах, считая справедливым для них закон Буссинеска, и по ней строили тензоры эффективной проницаемости для анизотропных моделей трещиноватых сред. В [6, 24, 260] методом осреднения потоков во взаимно перпендикулярных направлениях найдены компоненты тензоров эффективной проницаемости многослойных сред.

Для трещиноватых сред с хаотичным распределением трещин в пространстве применяют перколяционные модели, основанные на вероятностных методах и приводящие к изотропному континууму [82].

В работе [22] для слоистых сред развит метод осреднения, в котором в отдельных слоях потенциалы аппроксимируются полиномами, а уравнения осредняются по толщине слоёв.

Теория нелинейной фильтрации в анизотропных средах стала развиваться с появлением в 1973 г. публикации С.Н. Нумерова [96, 250], а затем статей А.В. Костерина [73], Е.Г. Шешукова [227], Ю.М. Молоковича [93]. Математические модели нелинейной фильтрации они сводили к обобщению известного тензорного закона Дарси, основанного на тензоре 2-го ранга. Дальнейшее развитие теории нелинейной фильтрации в анизотропных средах сделали К.С. Басниев и Н.М. Дмитриев [13, 14, 15, 49, 50, 51]. Основываясь на том, что при фильтрации жидкости между полями \bar{v} и ∇P существует связь, которая в наиболее общем виде выражается формулами $\nabla P = \bar{f}(\bar{R}, \bar{v}, \rho, \mu)$ (либо $\bar{v} = \bar{f}(\bar{R}, \nabla P, \rho, \mu)$) и применяя теорию (Л.И. Седов, В.В. Лохин [124, 125], Ю.И. Сиротин [128, 129] и др.) нелинейных тензорных функций нескольких тензорных аргументов, они предложили эту связь между полями \bar{v} и ∇P аппроксимировать зависимостями следующего вида (которые без принципиальных ограничений представим для ортонормированного базиса)

$$-\nabla_i P = a_{ij} \cdot v_j + b_{ijk} \cdot v_j v_k + c_{ijkl} \cdot v_j v_k v_l + \dots,$$

где a_{ij} , b_{ijk} , c_{ijkl} - тензоры, задающие нелинейные фильтрационные свойства пористой среды, а $\nabla_i P$ - проекции вектора ∇P на соответствующие оси.

Итак, в математическом моделировании нелинейной фильтрации в анизотропных средах существуют два внешне различных подхода: 1) берущий начало от работ С.Н. Нумерова и 2) развиваемый в трудах Н.М. Дмитриева.

В целом, по обзору литературы можно сделать следующие **выводы**. Во-первых, требуется установить взаимосвязь двух разных направлений (Н.М. Дмитриева и С.Н. Нумерова) в моделировании нелинейной фильтрации в

анизотропных средах. Во-вторых, существует ряд вопросов, касающихся обоснования моделей фильтрации в периодических, в частности, слоистых средах (как построить для слоистой среды, трещиноватой, периодической наиболее близкую к ней по фильтрационным свойствам анизотропную модель). В-третьих, какие возникают погрешности в значениях фильтрационных потоков и давлений в периодической (слоистой) среде, если расчёт течения жидкости в ней выполнять на анизотропной модели. В-четвёртых, несмотря на давний срок существования теории движения жидкости в искривлённом весьма тонком слое переменной толщины, оценок погрешности этой теории не делалось, и реально-го порядка толщины слоя, когда выводы теории двумерных течений верны, не сделано. В-пятых, практически нет исследований особенностей течений жидкости в призабойных зонах скважин. В частности, не исследовано, как влияет изменение проницаемости в призабойной зоне на интерференцию скважин. В-шестых, для уверенного применения в фильтрационных расчётах течений в слоистых средах метода анизотропного моделирования нужна теория точных послойных расчётов для многослойных областей конкретного вида. Тогда с помощью сопоставительных расчётов течений по этой теории и по анизотропной модели среды можно узнать границы применимости анизотропных моделей слоистых сред.

В соответствии с наметившимися по обзору литературы вопросами в диссертации ставилась следующая цель исследования.

Цель исследования – разработать общие методы решения задач двумерной фильтрации в анизотропных, неоднородных и многослойных средах и на их основе предложить математические модели для изучения конкретных инженерно-технических проблем в нефте- и газодобывающей промышленности, в водоснабжении, в проектировании гидротехнических и гидромелиоративных сооружений, а также для изучения других динамических процессов, описываемых двумерными эллиптическими уравнениями.

Научная новизна и теоретическое значение результатов диссертации заключается в следующем.

Разработаны алгоритмы для расчёта эффективных тензоров проницаемостей периодических и слоистых сред при линейном и нелинейном режимах фильтрации.

Проведены исследования точности расчётов фильтрации в периодических средах методом анизотропного эквивалентирования.

Предложена новая математическая модель двумерных фильтрационных течений несжимаемой жидкости в неоднородных анизотропных искривлённых пластах с конечной переменной толщиной, которая по сравнению с известной в этом направлении моделью О.В. Голубевой [41, 43] точнее учитывает особенности двумерных течений и поэтому значительно повышает точность расчётов.

Разработаны математические модели, учитывающие индивидуальные фильтрационные свойства призабойных зон скважин (ПЗС) при исследовании течений к одиночным и групповым скважинам.

Развита теория расчётов двумерных фильтрационных течений в многослойных неоднородных анизотропных средах для областей, ограниченных дугами координатных линий изотермических систем координат.

Предложены:

качественная и точная количественная математические модели работы скважины с гравийным фильтром;

качественные математические модели работы основных конструкций промышленных фильтров нефте- и вододобывающих скважин;

качественные математические модели работы скважин при вертикальном и горизонтальном гидроразрыве пласта.

Практическая значимость. Результаты диссертации могут найти применение:

при исследовании фильтрационных течений в искривлённых слоях с конечной постоянной и переменной толщиной, пористые среды которых могут быть как анизотропными, так и изотропными, однородными и неоднородными;

в точных послойных расчётах фильтрационных течений в многослойных анизотропных и изотропных средах;

в расчётах фильтрационных течений в неоднородных средах методом эквивалентирования последних подходящими многослойными средами;

в расчётах течений к скважинам с вертикальными или с горизонтальными трещинами гидроразрыва, учитывающими конечную проницаемость и размеры трещин;

в разработке спецкурсов для студентов, специализирующихся по профилям: теория аналитических и обобщённых аналитических функций комплексного переменного и её приложения, механика, прикладная математика, а также для студентов нефтегазовых специальностей.

Достоверность и обоснованность научных положений и результатов исследований подтверждаются следующим:

1) корректностью применения апробированного математического аппарата (теория аналитических функций комплексного переменного, теория уравнений математической физики, методы дифференциальной геометрии, линейной алгебры, тензорного исчисления);

2) результаты исследований других авторов (теория двумерной фильтрации О.В. Голубевой [41, 43]; теория фильтрации В.П. Пилатовского в тонких круговых конических и параболоидных пластах [102]; методы «изотропизирующих» преобразований для расчётов плоскопараллельной фильтрации в однородных анизотропных средах В.И. Аравина [2 - 6], Е.С. Ромма [121], Г.К. Михайлова [90, 91]; теория В.Н. Щелкачёва [229] работы круговой батареи скважин; методика расчётов потенциальных полей в многослойных средах из однородных изотропных слоёв В.Н. Острейко [97]) следуют из результатов защищаемой работы как частные случаи;

3) результаты, вытекающие из предложенных математических моделей влияния особенностей ПЗС на дебиты скважин, согласуются с экспериментальными и теоретическими данными других исследователей (с теорией фильтрации В.П. Пилатовского [102] к скважине с системой круговых поро-

гов и с системой лучевых трещин; с данными Г.Б. Пыхачева и Р.Г. Исаева [112] о влиянии призабойной неоднородности пласта на дебит скважины; с результатами опытно-промышленных испытаний [31] Р.А. Гасумова, В.А. Машкова и др., исследовавших влияние глинисто-песчаных пробок на дебит скважины).

Основные положения, выносимые на защиту:

1). Расчётные алгоритмы тензоров проницаемостей анизотропных моделей периодических и слоистых пористых сред для линейных и нелинейных режимов фильтрации жидкости.

2). Математические модели линейной фильтрации в искривлённых анизотропно-неоднородных (в частном случае, в изотропно-неоднородных и изотропно-однородных) пластах постоянной и переменной конечной толщины.

3). Математические модели фильтрации жидкости в призабойных зонах скважин (ПЗС).

4). Математические модели влияния особых фильтрационных свойств ПЗС на работу групповых скважин в неоднородных средах.

5). Теория расчётов плоскопараллельных фильтрационных течений в многослойных неоднородных анизотропных средах в областях, ограниченных дугами координатных линий изотермических систем координат.

Апробация работы. Основные результаты работы по мере их получения докладывались:

1) на семинарах по гидродинамике и математической физике под руководством проф. О.В. Голубевой в МОИП при МГУ (1974-1978 гг.);

2) на семинарах по математической физике и гидродинамике под руководством акад. П.Я. Кочиной и проф. О.В. Голубевой в ИПМ АН СССР (1974-1985 гг.);

3) на семинарах по прикладной электродинамике под руководством чл.-корр. АН СССР Н.Н. Тиходеева в НИИПТ АН СССР (г. Ленинград, 1987, 1989 и 1991 гг.);

4) на Воронежской весенней математической школе «Современные методы в теории краевых задач» (Воронеж, 1996 г.) и на зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 1999 г.);

5) на 3-ем и 4-ом Всероссийских симпозиумах «Математическое моделирование и компьютерные технологии» (г. Кисловодск, 1999 и 2000 гг.);

6) на Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование в научных исследованиях» (г. Ставрополь, СГУ, 2000 г.);

7) на 1-ой и 3-ей региональных научных конференциях «Проблемы компьютерных технологий и математического моделирования в естественных, технических и гуманитарных науках», (г. Георгиевск, СевКавГТУ, 2001, 2003 гг.);

8) на 7-ой и 9-ой Всероссийских научно-технических конференциях «Современные проблемы математики и естествознания» и «Информационные технологии в науке, проектировании и производстве», (Нижний Новгород, НГТУ, 2003);

9) на 4-ой Международной научно-практической конференции «Методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике» (г. Новочеркасск, Южно-Российский государственный технический университет, январь 2004 г.);

10) результаты диссертации в целом докладывались на научном семинаре кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования в Российском государственном университете нефти и газа им. И.М.Губкина (г. Москва) 18 декабря 2003 г. (Рук. семинара – М.Г. Сухарев, доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 82 научных статьях [18, 45, 53, 55, 56, 94, 126, 127, 136-210], 25 из которых – в центральной научной печати. Во всех совместных статьях автором работы поставлены задачи и получены их аналитические решения, по которым соав-

торы представляли решения иллюстративных примеров и проводили числовые расчёты.

Краткое содержание работы. Работа состоит из введения, 6 глав, заключения, списка литературы из 260 наименований, 2-х приложений, 17 таблиц и 69 иллюстраций.

В 1-ой главе предлагаются математические модели линейной и нелинейной фильтрации жидкости в пористых средах с периодической структурой, получающиеся в результате тройко-периодического повторения в пространстве основного структурного элемента (ячейки) ω этой среды, имеющего в диссертационном исследовании вид прямоугольного параллелепипеда.

В диссертации анизотропные среды рассматриваются как модели таких периодических, структурный элемент ω которых представляет прямоугольный параллелепипед с весьма малыми по сравнению с характерным размером области фильтрации размерами. К этим периодическим структурам относятся распространённые в естественных условиях слоистые среды, трещиноватые коллекторы с одной системой трещин или с двумя и тремя взаимно ортогональными системами трещин, осадочные породы, образованные частицами вытянутой формы с упорядоченной ориентацией их в пространстве и н. др. Метод построения линейной анизотропной модели пористой среды с названными периодическими структурами базируется на первичных понятиях главных направлений анизотропии (ГНА) и главных проницаемостей. Основное определяющее свойство ГНА в том, что в фильтрационных течениях вдоль них векторы \vec{v} и ∇P коллинеарны. Проницаемость пористой среды вдоль ГНА названа главной. Для линейных анизотропных моделей рассматриваемых периодических сред ГНА известны априори - ими служат перпендикулярные к боковым граням структурных ячеек ω оси симметрии \vec{h}_1, \vec{h}_2 и \vec{h}_3 . Главные проницаемости λ_1, λ_2 и λ_3 в анизотропных моделях этих сред находим из решений задач усреднения. В зависимости от постановок задач усреднения главные проницаемости λ_1, λ_2 и λ_3 могут вычисляться в смысле метода 1) локального или 2) предлагаемого автором интегрального анизотропного эквивалентирования. Выбор метода зависит от вида

расчётной области и геометрии конкретной периодической структуры и влияет на точность расчётов фильтрации в периодической среде, моделируемой анизотропной. Исследования точности метода анизотропного эквивалентирования слоистых сред в диссертации проводятся в 3-ей и отчасти в 6-ой главах.

В прикладных задачах теории фильтрации поле ГНА и отвечающие ему поля главных проницаемостей часто можно рассматривать как заданные. В диссертации развиты способы задания широкого круга серий триортогональных систем криволинейных поверхностей, векторы нормалей к которым определяют ГНА, и для каждой серии выведены расчётные формулы для тензоров проницаемостей. В приложении 2 представлен каталог тензоров проницаемостей для различных серий законов распределения ГНА.

Во 2-ой главе выводятся общие уравнения двумерной линейной фильтрации в анизотропных средах; указываются способы приведения их к каноническому виду и общие методы решения.

В диссертации предложена теория линейной двумерной фильтрации жидкости в искривлённых однородных и неоднородных анизотропных слоях постоянной и переменной конечной (имеющей в нефтегазовой отрасли промысловое значение) толщины с непроницаемыми подошвой и кровлей. Как частные случаи двумерной рассмотрены уравнения плоскопараллельной фильтрации в однородных и неоднородных анизотропных средах.

В 3-ей главе исследуется точность фильтрационных расчётов в слоистых средах методами однородно-анизотропного эквивалентирования.

В методе локального однородно-анизотропного эквивалентирования расчёт главных проницаемостей анизотропной модели осуществляется в местных для ячейки ω декартовых координатах. Главные проницаемости находятся из равенства потоков вдоль осей симметрии $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3$ в ячейке ω соответствующим потокам (при тех же граничных условиях) в объёме ω , принятом за анизотропную среду с ГНА $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3$.

В методе интегрального однородно-анизотропного эквивалентирования расчёт главных проницаемостей выполняется для всей многослойной области

Ω в целом в системе координат, координатные линии которой совпадают как с границами раздела чередующихся изотропных слоёв многослойной среды, так и с границами $\partial\Omega$ области Ω . Они находятся из равенства потоков вдоль слоёв \vec{h}_1 и перпендикулярно к ним \vec{h}_2 в многослойной области Ω соответствующим потокам (при одинаковых граничных условиях) в этой же области, принятой за анизотропную среду с ГНА \vec{h}_1, \vec{h}_2 . Недостаток метода интегрального однородно-анизотропного эквивалентирования: координатные линии выбираемой системы могут совпадать с границами раздела слоёв, но не совпадать с границами $\partial\Omega$ расчётной области. В этом случае расчёт главных проницаемостей анизотропной модели неизбежно приходится выполнять по методу локального однородно-анизотропного эквивалентирования, что и объясняет его широкое применение на практике.

В 4-ой главе исследуются особенности фильтрации в призабойных зонах скважин (ПЗС). В частности, влияние на дебит скачка проницаемости в ПЗС. Учёт конструктивных особенностей скважинных фильтров и наличия трещин гидроразрыва требует пространственной детализации картины течения в ПЗС. Изучение некоторых из этих проблем составило содержание четвёртой главы.

В 5-ой главе исследуются математические модели интерференции нефтедобывающих скважин, уточняющие постановки В.Н. Щелкачёва для таких же задач. В ПЗС учитывается возможность, во-первых, скачков проницаемости и, во-вторых, перехода фильтрации от линейного режима к нелинейному. В 6-й главе разработана теория расчёта плоскопараллельных фильтрационных течений в многослойной области G в виде криволинейного четырёхугольника, ограниченного дугами координатных линий ортогональной изотермической системы координат P, Q .

В заключении перечисляются основные результаты работы.

В приложении 1 приведены справочные сведения по законам ортогонального преобразования базисов, координат векторов и тензоров 2, 3 и 4 рангов.

В приложении 2 приводится каталог тензоров проницаемостей для линейной фильтрации в средах со следующими законами распределения главных направлений анизотропии:

1. Тензор проницаемости для среды с прямолинейным законом распределения ГНА.

2. Тензор проницаемости для среды с круговым цилиндрическим законом распределения ГНА.

3. Тензор проницаемости для среды со сферическим законом распределения ГНА.

4. Тензор проницаемости для сред с цилиндрическими законами распределения ГНА.

4.1 Общйй случай задания цилиндрических законов распределения ГНА

4.2 Случай совпадения одного из ГНА цилиндрических законов с координатной осью (осью Oz)

В заключение скажем о принятом в диссертации порядке нумерации параграфов и формул. В работе применяется двойная нумерация параграфов. При ссылке на параграф (например, на 2-ой) из главы (например, 1-ой) пишется §1.2. Аналогично даются ссылки на параграфы приложений. Например, запись §П1.2 обозначает 2-ой параграф из приложения 1. Для формул применяется традиционная тройная нумерация (например, (1.2.3) – формула (3) в §2 из 1-ой главы) в сокращённом, по примеру книги [17], варианте её записи. А именно, в пределах любого параграфа главы или приложения идёт сквозная одинарная нумерация формул. При ссылке внутри текущей главы на формулу (3) из §2 добавляется номер параграфа и в тексте в круглых скобках пишется (2.3). При ссылке в текущей главе на формулу (3) из §2 из другой главы (например, из 1-ой) добавляется номер главы, затем номер параграфа и потом номер формулы и пишется (1.2.3). Все ссылки на формулы из приложений делаются аналогично. Например, запись (П1.2.3) означает ссылку на формулу (3) в §2 из приложения 1.

ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ И АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ.

В 1-ой главе предлагаются математические модели линейной и нелинейной фильтрации жидкости в пористых средах с периодической структурой, которые получаются в результате тройко-периодического повторения в пространстве некоторого основного структурного элемента (именуемого также ячейкой, элементарным объёмом усреднения) ω этой среды. В диссертации рассматриваются только такие среды с периодическими структурами (сокращённо, периодическими средами), структурная ячейка ω которых представляет прямоугольный параллелепипед. К ним, в частности, относятся наиболее распространённые в естественных условиях 1) слоистые среды (рис.1), 2) трещиновато-пористые среды с одной, двумя или тремя попарно ортогональными системами трещин, 3) осадочные породы из частиц вытянутой формы и расположенных в пространстве некоторым упорядоченным способом, 4) некоторые композиционные материалы [17] и др.

1.1. Математическое моделирование линейной фильтрации в периодических средах методом анизотропного эквивалентирования

Будем изучать линейную фильтрацию в таких пористых изотропных грунтах с периодической пространственной структурой, коэффициент проницаемости в которых можно задавать в виде функции

$$k = f(p, q, r) = f_1[p(x, y, z)] \cdot f_2[q(x, y, z)] \cdot f_3[r(x, y, z)], \quad (1)$$

периодической по одному, двум или всем трём промежуточным аргументам p , q и r , зависящим от декартовых координат x , y , z . Практическая важность выбранной серии изотропных грунтов с проницаемостями (1) обусловлена тем, что они позволяют моделировать свойства всех выше перечисленных периодических сред. Роль промежуточных аргументов p , q и r в формуле (1) в том, что они задают геометрию периодической структуры пористой среды, а периоды по p , q и r - размеры повторяющихся ячеек ω , из которых составлена пористая среда. Для того чтобы коэффициент проницаемости в (1) описывал фильтрацион-

ные свойства периодической среды с ячейкой ω в виде прямоугольного параллелепипеда, от промежуточных аргументов p, q и r потребуем выполнения трёх условий:

1°. Поверхности уровня $p(x, y, z) = \text{const}, q(x, y, z) = \text{const}, r(x, y, z) = \text{const}$ образуют во всём объёме пористой среды триортогональную систему поверхностей, т.е.

$$(\nabla p, \nabla q) = (\nabla p, \nabla r) = (\nabla q, \nabla r) = 0. \quad (2)$$

2°. Всюду в области фильтрации длины ℓ_p, ℓ_q, ℓ_r дуг p, q и r координатных линий, соответствующих периодам T_p, T_q, T_r функции (1), бесконечно малы по сравнению с её характерным размером L .

Другими словами,

$$\max(\ell_p, \ell_q, \ell_r) \ll L, \text{ где } \ell_p = \int_p^{p+T_p} \left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial p} \right| dp, \quad \ell_q = \int_q^{q+T_q} \left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial q} \right| dq, \quad \ell_r = \int_r^{r+T_r} \left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial r} \right| dr, \quad (3)$$

а $\bar{R} = x(p, q, r)\bar{i} + y(p, q, r)\bar{j} + z(p, q, r)\bar{k}$ - радиус-вектор точки наблюдения $M(x, y, z)$. (Если вдоль какого-то направления, например, r проницаемость не меняется, то период этого направления можно брать любым, например, равным T_p или T_q).

3°. В криволинейном параллелепипеде $\tilde{\omega}$, ограниченном координатными поверхностями $p = C_1, p = C_1 + T_p, q = C_2, q = C_2 + T_q, r = C_3, r = C_3 + T_r$ (где C_1, C_2, C_3 - постоянные), концы A', B', C' координатных дуг ℓ_p, ℓ_q, ℓ_r отклоняются от концов A, B, C соответствующих касательных прямых столь незначительно, что (рис. 2)

$$\min(|MA|, |MB|, |MC|) \gg \max(|AA'|, |BB'|, |CC'|). \quad (4)$$

При выполнении условий 1°, 2°, 3° криволинейный параллелепипед $\tilde{\omega}$ далее будем рассматривать как прямоугольный ω с рёбрами $|MA| = \ell_p, |MB| = \ell_q, |MC| = \ell_r$ (рис. 2).

Задачи фильтрации жидкости и газа в неоднородных изотропных средах с периодически изменяющейся проницаемостью вида (1) приводят к уравнениям математической физики с быстро осциллирующими коэффициентами, которые

к тому же могут быть разрывными кусочно-непрерывными функциями. Найти решения конкретных краевых задач для уравнений такого типа бывает очень сложно. Именно поэтому встаёт вопрос о построении математической модели, описывающей в главных чертах фильтрационные свойства изотропных сред с периодической проницаемостью вида (1) и в то же время приводящей к более простым для решений уравнениям фильтрации (с непрерывными и не периодическими по координатам коэффициентами).

Основная идея построения математической модели для упрощенного описания фильтрации в пористых средах с периодической проницаемостью (1) основана на том, что по отношению к трём одномерным потокам, направленным перпендикулярно к поверхностям $p(x, y, z) = \text{const}$, $q(x, y, z) = \text{const}$, $r(x, y, z) = \text{const}$, среда (1) обнаруживает разные фильтрационные сопротивления. Естественно поэтому моделировать среду (1) и, в частности, слоистые среды, некоторой фиктивной сплошной анизотропной пористой средой, проявляющей по отношению к этим потокам точно такие же фильтрационные сопротивления. В зависимости от того, на каком уровне проводится сравнение названных фильтрационных потоков - на уровне структурной ячейки ω или на уровне области фильтрации будем говорить о *методе локального* или о *методе интегрального одно-родно-анизотропного эквивалентирования* соответственно.

Впервые в частном виде *метод локального одно-родно-анизотропного эквивалентирования* (как и сам термин) для расчёта магнитных потоков в пакете, собранном из отдельных плоских пластин, предложил Ф. Оллендорф [252]. Дадим обобщение метода Оллендорфа для построения анизотропных моделей сред с периодически изменяющейся в пространстве проницаемостью. Для этого сравним одномерные потоки, перпендикулярные к поверхностям $p = \text{const}$, $q = \text{const}$, $r = \text{const}$ в ячейке ω , заполненной средой (1), и в этой же ячейке, заполненной однородной средой с прямолинейной анизотропией.

Поскольку все размеры ячейки ω много меньше характерных размеров области фильтрации, то в пределах ω характеристики флюида (плотность ρ , динамическую вязкость μ , температуру T и т.п.) можно считать постоянными, а

фильтрационный процесс рассматривать как мгновенный (т.е. не зависящий от времени). Поэтому в локальной декартовой системе координат $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}$, связанной с ребрами ячейки ω (рис. 2), уравнение фильтрации флюида для среды с проницаемостью (1) примет следующий хорошо известный вид [5, 6, 8, 16, 41, 108, 112, 113, 249, 258]:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{p}} \left[f(p, q, r) \frac{\partial P}{\partial \tilde{p}} \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} \left[f(p, q, r) \frac{\partial P}{\partial \tilde{q}} \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left[f(p, q, r) \frac{\partial P}{\partial \tilde{r}} \right] = 0, \quad (5)$$

где P - приведенное давление. После решения с соответствующими краевыми условиями уравнения (5) поле скоростей фильтрации в пределах ω найдется по закону Дарси:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } P = -\frac{f(p, q, r)}{\mu} \text{grad } P. \quad (6)$$

Из уравнения (5) для одномерного фильтрационного потока вдоль p -координатной линии в пределах объема усреднения ω найдём, что

$$P = C_1 \cdot \int_0^{\tilde{p}} \frac{d\tilde{p}}{f_1(\tilde{p})} + P_0, \quad (7)$$

где P_0 - давление на грани $\tilde{p} = 0$ параллелепипеда ω ; $C_1 = \frac{P_1 - P_0}{\int_0^{\tilde{p}} \frac{d\tilde{p}}{f_1(\tilde{p})}}$; P_1 - давление

на грани $\tilde{p} = \ell_p$; а ℓ_p - длина ребра MA (рис.2). С помощью найденного распределения давления (7) можно, на основании (6), вычислить полный фильтрационный поток Q_p флюида через грань, перпендикулярную $\frac{\partial \vec{R}}{\partial p}$:

$$Q_p = - \int_0^{\ell_p} \int_0^{\ell_q} \frac{k}{\mu} \cdot \frac{dP}{d\tilde{p}} \cdot d\tilde{q} d\tilde{r} = -\frac{C_1}{\mu} \cdot \int_0^{\ell_p} f_2(\tilde{q}) d\tilde{q} \cdot \int_0^{\ell_r} f_3(\tilde{r}) d\tilde{r}. \quad (8)$$

Совершенно аналогично находятся полные фильтрационные потоки Q_q и Q_r в параллелепипеде ω через грани, перпендикулярные к $\frac{\partial \vec{R}}{\partial q}$ и $\frac{\partial \vec{R}}{\partial r}$:

$$Q_p = -\frac{C_2}{\mu} \cdot \int_0^{\ell_p} f_1(\tilde{p}) d\tilde{p} \cdot \int_0^{\ell_r} f_3(\tilde{r}) d\tilde{r}; \quad Q_r = -\frac{C_3}{\mu} \cdot \int_0^{\ell_p} f_1(\tilde{p}) d\tilde{p} \cdot \int_0^{\ell_q} f_2(\tilde{q}) d\tilde{q}, \quad (9)$$

где $C_2 = \frac{P_1 - P_0}{\int_0^{l_q} \frac{d\tilde{q}}{f_2(\tilde{q})}}$; $C_3 = \frac{P_1 - P_0}{\int_0^{l_r} \frac{d\tilde{r}}{f_3(\tilde{r})}}$. В той же самой локальной декартовой системе координат $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}$ в пределах объёма ω уравнение фильтрации флюида в среде с

прямолинейной анизотропией, проницаемости которой вдоль $\frac{\partial \bar{R}}{\partial p}, \frac{\partial \bar{R}}{\partial q}$ и $\frac{\partial \bar{R}}{\partial r}$ соответственно равны λ_1, λ_2 и λ_3 , имеет вид [2-6, 16, 39-41, 47, 106, 108, 111, 119-121, 170, 239, 242, 247-249, 258]

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{p}^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{q}^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{r}^2} = 0, \quad (10)$$

а поле скоростей фильтрации в анизотропной модели найдется из тензорного закона Дарси по формулам

$$v_p = -\frac{\lambda_1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \tilde{p}}; \quad v_q = -\frac{\lambda_2}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \tilde{q}}; \quad v_r = -\frac{\lambda_3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \tilde{r}}. \quad (11)$$

Подчеркнём, что в пределах ω величины λ_1, λ_2 и λ_3 считаются постоянными. Решение одномерных фильтрационных задач для объёма усреднения ω , когда среда считается прямолинейно-анизотропной и, следовательно, выполняются уравнения (10) и (11), приводит к следующим результатам:

$$Q_p = -\frac{\lambda_1}{\mu} \cdot \frac{P_1 - P_0}{l_p} \cdot l_q \cdot l_r; \quad Q_q = -\frac{\lambda_2}{\mu} \cdot \frac{P_1 - P_0}{l_q} \cdot l_p \cdot l_r; \quad Q_r = -\frac{\lambda_3}{\mu} \cdot \frac{P_1 - P_0}{l_r} \cdot l_p \cdot l_q. \quad (12)$$

Подберем теперь параметры фиктивной анизотропной среды, моделирующей в пределах ω фильтрационные свойства пористой изотропной среды с периодической проницаемостью (1) так, чтобы по отношению к трём рассмотренным одномерным потокам обе среды были идентичными. Для этого приравняем потоки в (8) и (9) соответствующим потокам в (12). В результате для проницаемостей локальной однородно-анизотропной модели вдоль p, q и r - координатных линий получим следующие значения:

$$\lambda_1 = \frac{l_p}{l_q \cdot l_r} \cdot \frac{\int_0^{l_q} f_2(\tilde{q}) d\tilde{q} \cdot \int_0^{l_r} f_3(\tilde{r}) d\tilde{r}}{\int_0^{l_p} \frac{d\tilde{p}}{f_1(\tilde{p})}}; \quad \lambda_2 = \frac{l_q}{l_p \cdot l_r} \cdot \frac{\int_0^{l_p} f_1(\tilde{p}) d\tilde{p} \cdot \int_0^{l_r} f_3(\tilde{r}) d\tilde{r}}{\int_0^{l_q} \frac{d\tilde{q}}{f_2(\tilde{q})}}; \quad \lambda_3 = \frac{l_r}{l_p \cdot l_q} \cdot \frac{\int_0^{l_p} f_1(\tilde{p}) d\tilde{p} \cdot \int_0^{l_q} f_2(\tilde{q}) d\tilde{q}}{\int_0^{l_r} \frac{d\tilde{r}}{f_3(\tilde{r})}}. \quad (13)$$

В частности, применительно к рис.1 объём усреднения ω будет кубом с ребром $\ell_p = \ell_q = \ell_r = h_1 + h_2$. Поскольку вдоль p -координатной линии проницаемость не меняется, то $f_1(p) = 1$. Точно так же $f_3(r) = 1$. Функцию $f_2(q)$ в соответствии с рис.1 задавали в виде $f_2(\tilde{q}) = \begin{cases} k_1, & \text{если } 0 \leq \tilde{q} \leq h_1 \\ k_2, & \text{если } h_1 < \tilde{q} \leq h_1 + h_2 \end{cases}$. Поэтому формулы

(13) для проницаемостей λ_1 , λ_2 и λ_3 анизотропной модели МС-среды на рис.1 дадут значения

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{k_1 h_1 + k_2 h_2}{h_1 + h_2}; \quad \lambda_2 = \frac{(h_1 + h_2) k_1 k_2}{h_1 k_2 + h_2 k_1}. \quad (14)$$

Ранее формулы (14) для слоистой среды были выведены на основе кинематического анализа трубок тока Е.С. Роммом [120, 121]. Такие же формулы (14) для слоистых сред приводились Ф. Оллендорфом [252], Р. Дахлером [236], К. Маасом [243], В.И. Аравиным [2-6] и др. Естественно, применение формул (13) не ограничивается только лишь примером слоистых сред. Они, в частности, могут быть применены для построения анизотропных моделей «неправильно слоистых пористых сред» (по терминологии В. Зейла и Й.М. Стама [260]), а также некоторых композиционных пористых сред.

В ряде частных случаев, когда 1) границы области фильтрации совпадают с координатными поверхностями

$$p(x, y, z) = p_1, \quad p(x, y, z) = p_2, \quad q(x, y, z) = q_1, \quad q(x, y, z) = q_2, \quad r(x, y, z) = r_1, \quad r(x, y, z) = r_2$$

ортогональной криволинейной системы координат p, q, r , задающей структуру периодической среды с проницаемостью (1) и 2), параметры Ламе системы p, q, r удовлетворяют следующим условиям:

$$\frac{H_2 \cdot H_3}{H_1} = A_1(p) \cdot B_1(q) \cdot C_1(r); \quad \frac{H_1 \cdot H_3}{H_2} = A_2(p) \cdot B_2(q) \cdot C_2(r); \quad \frac{H_2 \cdot H_1}{H_3} = A_3(p) \cdot B_3(q) \cdot C_3(r), \quad (15)$$

где $A_i(p), B_i(q), C_i(r), (i=1,2,3)$ - некоторые функции одной переменной, для построения анизотропной модели может быть предложен другой подход – метод интегрального однородно-анизотропного эквивалентирования. Стационарные фильтрационные течения в области фильтрации $\Omega = \{p_1 \leq p \leq p_2; q_1 \leq q \leq q_2; r_1 \leq r \leq r_2\}$,

проницаемость периодической среды в которой имеет вид (1), описываются уравнением [8, 24, 38, 41, 44, 68, 79, 80, 81, 87, 102, 103, 113, 117]

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \cdot k \cdot \frac{\partial P}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \cdot k \cdot \frac{\partial P}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \cdot k \cdot \frac{\partial P}{\partial r} \right) = 0 \quad (16)$$

и законом Дарси (6). Если на границах $p = p_1$ и $p = p_2$ заданы постоянные значения приведённого давления P_1 и P_2 соответственно, а другие границы Ω непроницаемы, то уравнение (16) с учётом формул (1) и (15) даёт следующее решение:

$$P(p) = \alpha \cdot \int_{p_1}^p \frac{dp}{A_1(p) \cdot f_1(p)} + P_1, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{P_2 - P_1}{\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{A_1(p) \cdot f_1(p)}}. \quad (17)$$

Из найденного решения (17) и закона Дарси (6) вычислим распределение скоростей фильтрации, а затем и полный фильтрационный поток

$$Q_p = - \int_{q_1}^{q_2} dq \int_{r_1}^{r_2} \frac{k}{\mu} \cdot \frac{1}{H_1} \cdot \frac{dP}{dp} \cdot H_2 H_3 \cdot dr = - \frac{\alpha}{\mu} \cdot \int_{q_1}^{q_2} f_2(q) B_1(q) dq \cdot \int_{r_1}^{r_2} f_3(r) C_1(r) dr. \quad (18)$$

Совершенно аналогично вычисляются полные фильтрационные потоки в области Ω для двух других одномерных течений вдоль q - и r - координатных линий:

$$Q_q = - \frac{\beta}{\mu} \cdot \int_{p_1}^{p_2} f_1(p) A_2(p) dp \cdot \int_{r_1}^{r_2} f_3(r) C_2(r) dr \quad \text{и} \quad Q_r = - \frac{\gamma}{\mu} \cdot \int_{p_1}^{p_2} f_1(p) A_3(p) dp \cdot \int_{q_1}^{q_2} f_2(q) B_3(q) dq, \quad (19)$$

где $\beta = \frac{P_2 - P_1}{\int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{B_2(q) \cdot f_2(q)}}$ и $\gamma = \frac{P_2 - P_1}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{C_3(r) \cdot f_3(r)}}$. В этой же самой области Ω фильтрация в

анизотропной среде, постоянные проницаемости которой вдоль p -, q - и r - координатных линий равны соответственно Λ_1 , Λ_2 , Λ_3 , описывается уравнением [111, 113, 117, 119, 258]

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \cdot \Lambda_1 \cdot \frac{\partial P}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \cdot \Lambda_2 \cdot \frac{\partial P}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \cdot \Lambda_3 \cdot \frac{\partial P}{\partial r} \right) = 0, \quad (20)$$

а поле скоростей затем вычисляется по формулам

$$v_p = - \frac{\Lambda_1}{\mu} \cdot \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial P}{\partial p}; \quad v_q = - \frac{\Lambda_2}{\mu} \cdot \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial P}{\partial q}; \quad v_r = - \frac{\Lambda_3}{\mu} \cdot \frac{1}{H_3} \cdot \frac{\partial P}{\partial r}. \quad (21)$$

Решение тех же одномерных фильтрационных задач для уравнения (20) в области Ω , когда пористая среда в ней считается криволинейно-анизотропной, приводит к следующим значениям потоков:

$$Q_p = -\frac{\tilde{\alpha}}{\mu} \cdot \int_{q_1}^{q_2} B_1(q) dq \cdot \int_{r_1}^{r_2} C_1(r) dr, \text{ где } \tilde{\alpha} = \frac{\Lambda_1 \cdot (P_2 - P_1)}{\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{A_1(p)}}, \quad (22)$$

$$Q_q = -\frac{\tilde{\beta}}{\mu} \cdot \int_{p_1}^{p_2} A_2(p) dp \cdot \int_{r_1}^{r_2} C_2(r) dr, \text{ где } \tilde{\beta} = \frac{\Lambda_2 \cdot (P_2 - P_1)}{\int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{B_2(q)}}, \quad (23)$$

$$Q_r = -\frac{\tilde{\gamma}}{\mu} \cdot \int_{p_1}^{p_2} A_3(p) dp \cdot \int_{q_1}^{q_2} B_3(q) dq, \text{ где } \tilde{\gamma} = \frac{\Lambda_3 \cdot (P_2 - P_1)}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{C_3(r)}}. \quad (24)$$

Подберем теперь проницаемости $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ фиктивной анизотропной среды, моделирующей в пределах Ω фильтрационные свойства пористой изотропной среды с периодической проницаемостью (1) так, чтобы по отношению к трём рассмотренным одномерным потокам обе среды были идентичными. Для этого приравняем потоки в (18) и (19) соответствующим потокам в (22)-(24). В результате для проницаемостей $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ интегральной однородно-анизотропной модели вдоль p -, q - и r - координатных линий получим следующие значения:

$$\Lambda_1 = \frac{\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{A_1(p)} \cdot \int_{q_1}^{q_2} f_2(q) B_1(q) dq \cdot \int_{r_1}^{r_2} f_3(r) C_1(r) dr}{\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{A_1(p) \cdot f_1(p)} \cdot \int_{q_1}^{q_2} B_1(q) dq \cdot \int_{r_1}^{r_2} C_1(r) dr}; \quad \Lambda_2 = \frac{\int_{p_1}^{p_2} f_1(p) A_2(p) dp \cdot \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{B_2(q)} \cdot \int_{r_1}^{r_2} f_3(r) C_2(r) dr}{\int_{p_1}^{p_2} A_2(p) dp \cdot \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{B_2(q) \cdot f_2(q)} \cdot \int_{r_1}^{r_2} C_2(r) dr}; \quad (25)$$

$$\Lambda_3 = \frac{\int_{p_1}^{p_2} f_1(p) A_3(p) dp \cdot \int_{q_1}^{q_2} f_2(q) B_3(q) dq \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{C_3(r)}}{\int_{p_1}^{p_2} A_3(p) dp \cdot \int_{q_1}^{q_2} B_3(q) dq \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{C_3(r) \cdot f_3(r)}}. \quad (26)$$

Из сопоставления формул (13) и (25)-(26) видно, что методы локального и интегрального однородно-анизотропного эквивалентирования периодических сред (1) приводят к разным значениям проницаемостей в анизотропных моде-

лях вдоль p -, q - и r -координатных линий. Поэтому встаёт вопрос, какой из подходов приводит к более точным расчётам фильтрации, например, в многослойных средах (МС-средах). Этому вопросу посвящена глава 3 и отчасти глава 6. Сейчас же отметим явный недостаток метода интегрального эквивалентирования: координатные поверхности системы координат p, q, r могут не совпадать с границами области фильтрации, а параметры Ламе не всегда удовлетворяют условиям (15). Поэтому на практике чаще приходится применять метод локального, нежели интегрального, однородно-анизотропного эквивалентирования.

Однако, несмотря на отмеченный недостаток метода интегрального однородно-анизотропного эквивалентирования, формулы (25)-(26) позволяют повысить точность локального метода тогда, когда оказывается выполненным лишь одно условие (15). Тогда локальное эквивалентирование удаётся выполнить не для идеализированной структурной ячейки ω , а для ячейки $\tilde{\omega}$ в виде криволинейного параллелепипеда. Главные проницаемости $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ в точке p, q, r в уточнённой локальной модели будут вычисляться по формулам (25)-(26), в которых пределы интегрирования следует взять равными: $p_1=p, p_2=p+T_p, q_1=q, q_2=q+T_q, r_1=r, r_2=r+T_r$.

Итак, исследование фильтрации в сложных средах с периодически изменяющейся по координатам проницаемостью можно выполнять с определённой точностью на эквивалентных анизотропных моделях этих сред. Для построения анизотропной модели нужно знать структурную геометрию периодической среды. В диссертации структурная геометрия периодических сред (1) и, в частности, МС-сред задаётся с помощью некоторой триортогональной системы поверхностей p, q, r . Нормали $\nabla p, \nabla q$ и ∇r к этой системе назовём полем главных направлений анизотропии (ГНА) среды, а проницаемости λ_1, λ_2 и λ_3 вдоль ГНА - главными проницаемостями. При этом поле ГНА и значения главных проницаемостей будем считать заранее известными. По ним нужно будет найти тензор проницаемости анизотропной модели. Решению этой задачи посвящены следующие параграфы данной главы. Начнём с уточнения понятий ГНА и главных проницаемостей анизотропных моделей периодических сред.

1.2. Определения полей главных направлений анизотропии (ГНА) и главных проницаемостей в линейных анизотропных моделях периодических сред

В предыдущем параграфе ГНА были названы три попарно-ортогональных направления, вдоль которых сравнивались одномерные фильтрационные течения в периодической среде вида (1.1) и в её анизотропной модели. В одномерных фильтрационных потоках вдоль этих направлений вектора \vec{v} и ∇P были коллинеарными. Поэтому для ГНА дадим следующее определение.

Определение 1. Главными направлениями анизотропии (ГНА) среды в точке $M(x,y,z)$ области V назовём оси таких трёх попарно ортогональных единичных векторов $\vec{h}_1(M), \vec{h}_2(M), \vec{h}_3(M)$, при течении вдоль которых векторы скорости фильтрации \vec{v} и градиента приведённого давления ∇P в этой точке будут коллинеарными. Множество векторов $\vec{h}_1(M), \vec{h}_2(M), \vec{h}_3(M)$, заданных в каждой точке $M(x,y,z)$ области V , назовём полем ГНА среды.

Поле ГНА задаётся строением периодической структуры пористой среды. Например, если пористая среда составлена из различных чередующихся изотропных слоёв, толщины которых во много раз меньше размеров рассматриваемой среды, то в анизотропной модели такой среды одно ГНА перпендикулярно к поверхностям раздела изотропных слоёв, а два других ГНА лежат в касательных к изотропным слоям плоскостях. Для трещиновато-пористых горных пород, например, с одной пространственно ориентированной системой трещин закон распределения ГНА тоже известен априори - одно из ГНА ортогонально семейству поверхностей, в которых расположены трещины, а два других ГНА располагаются в касательных к поверхностям трещин плоскостях. Именно к такому выводу о распределении ГНА в трещиновато-пористых горных породах приводят работы [66, 120-122, 241, 259].

Поскольку вдоль ГНА векторы \vec{v} и ∇P коллинеарны, то для одномерных вдоль них течений жидкости остаётся справедливым линейный закон Дарси. Чтобы его записать, требуется знать главные проницаемости анизотропной модели периодической среды.

Определение 2. Главными проницаемостями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ анизотропной модели периодической пористой среды называем её проницаемости для течений жидкости вдоль ГНА \vec{h}_1, \vec{h}_2 и \vec{h}_3 соответственно.

На практике главные проницаемости $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ должны определяться либо экспериментально, на основании исследования кернов пород конкретных пластов, либо теоретически, путём решения соответствующих задач эквивалентирования (примеры которых были представлены в §1).

В этой работе поле ГНА и соответствующее поле главных проницаемостей принимаются в качестве исходной первичной информации, по которой вычисляются компоненты тензора проницаемости в выбранной системе координат. Аналитически поле ГНА можно задать с помощью какого-либо семейства триортогональных поверхностей. Для этого задаются функции $p = p(x, y, z)$, $q = q(x, y, z)$, $r = r(x, y, z)$, удовлетворяющие условиям (1.2). Если такие функции выбраны, то тогда ГНА в точке $M(x, y, z)$ будут задаваться векторами их градиентов по формулам:

$$\vec{h}_1 = \frac{\nabla p}{|\nabla p|}; \quad \vec{h}_2 = \frac{\nabla q}{|\nabla q|}; \quad \vec{h}_3 = \frac{\nabla r}{|\nabla r|}. \quad (1)$$

Это же поле ГНА (1) можно задать другими формулами:

$$\vec{h}_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \vec{R}}{\partial p}; \quad \vec{h}_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \vec{R}}{\partial q}; \quad \vec{h}_3 = \frac{1}{H_3} \frac{\partial \vec{R}}{\partial r}, \quad (2)$$

где H_1, H_2, H_3 – параметры Ламе криволинейной системы координат p, q, r

$$H_1 = \left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial p} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial p} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right)^2}; \quad H_2 = \left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial q} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q} \right)^2}; \quad (3)$$

$$H_3 = \left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial r} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2}$$

а $\vec{R} = x(p, q, r)\vec{i} + y(p, q, r)\vec{j} + z(p, q, r)\vec{k}$ – радиус-вектор точки $M(x, y, z)$. Аналитические способы построения конкретных семейств триортогональных поверхностей и каталог соответствующих тензоров проницаемостей приведены в приложении 2.

Теперь же кратко изложим общий подход к расчёту компонентов тензоров проницаемостей анизотропных моделей периодических сред по заданным полям ГНА и главным проницаемостям.

1.3. Расчёт эффективных тензоров проницаемостей по заданным полям ГНА и главным проницаемостям при линейном режиме фильтрации

Пусть в анизотропной модели периодической среды заданы 1) поле ГНА $\bar{h}_1 = \bar{e}'_1$, $\bar{h}_2 = \bar{e}'_2$ и $\bar{h}_3 = \bar{e}'_3$ с помощью базисных ортов \bar{e}'_1 , \bar{e}'_2 и \bar{e}'_3 некоторой ортогональной криволинейной системы координат (ξ', η', ζ') и 2) главные проницаемости λ_1 , λ_2 и λ_3 вдоль соответствующих ГНА. В соответствии с определениями 1 и 2 в §2 для фильтрационных течений, направленных строго вдоль ГНА, остаётся справедливым линейный закон Дарси. Поэтому проекции v'_1 , v'_2 , v'_3 вектора скорости фильтрации $\bar{v} = v'_1 \cdot \bar{e}'_1 + v'_2 \cdot \bar{e}'_2 + v'_3 \cdot \bar{e}'_3$ на оси ГНА должны удовлетворять следующим равенствам

$$v'_1 = -\frac{\lambda_1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial S_1}; \quad v'_2 = -\frac{\lambda_2}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial S_2}; \quad v'_3 = -\frac{\lambda_3}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial S_3}, \quad (1)$$

где через μ , $P = p + \rho gh$ и $\partial P / \partial S_i$ ($i = 1, 2, 3$) обозначены динамическая вязкость флюида, приведённое давление (p - гидродинамическое давление, ρ - плотность флюида, g - ускорение свободного падения тела, h - нивелировочная высота) и производная по направлению i -го ГНА соответственно. В системе (ξ', η', ζ') уравнения (1) принимают вид

$$\begin{cases} v'_1 = -\frac{\lambda_1}{\mu} \cdot \frac{1}{H'_1} \frac{\partial P}{\partial \xi'} = \lambda_1 \cdot B'_1 \\ v'_2 = -\frac{\lambda_2}{\mu} \cdot \frac{1}{H'_2} \frac{\partial P}{\partial \eta'} = \lambda_2 \cdot B'_2 \\ v'_3 = -\frac{\lambda_3}{\mu} \cdot \frac{1}{H'_3} \frac{\partial P}{\partial \zeta'} = \lambda_3 \cdot B'_3 \end{cases}, \quad (2)$$

где через B'_1 , B'_2 , B'_3 и Φ обозначены координаты вектора

$$\bar{B} = \text{grad } \Phi = \nabla \Phi = \frac{1}{H'_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi'} \cdot \bar{e}'_1 + \frac{1}{H'_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta'} \cdot \bar{e}'_2 + \frac{1}{H'_3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta'} \cdot \bar{e}'_3 \quad (3)$$

и функция $\Phi = -\frac{P}{\mu} = -\frac{p + \rho gh}{\mu}$, а через H'_1 , H'_2 и H'_3 – параметры Ламе системы координат (ξ', η', ζ') . Формулы (2) показывают, что скорость линейной фильтрации и $\nabla\Phi$ в базисе из ГНА связаны друг с другом при помощи тензора второго ранга \hat{K} следующим матричным уравнением

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B'_1 \\ B'_2 \\ B'_3 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Так как характер линейной связи векторных полей \bar{v} и \bar{B} не зависит от выбора базиса [19, 60, 72, 76], то форма уравнения (4) инвариантна по отношению к замене координат, и поэтому в любой другой ортогональной расчётной системе координат (ξ, η, ζ) связь между проекциями векторов \bar{v} и \bar{B} должна остаться линейной. Таким образом, в произвольной ортогональной системе координат (ξ, η, ζ) векторы \bar{v} и \bar{B} будут связаны друг с другом уравнением:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

В уравнении (5) через v_1, v_2, v_3 и B_1, B_2, B_3 обозначены координаты векторов

$$\bar{v} = v_1 \bar{e}_1 + v_2 \bar{e}_2 + v_3 \bar{e}_3 \quad \text{и} \quad \bar{B} = \nabla\Phi = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \cdot \bar{e}_1 + \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \cdot \bar{e}_2 + \frac{1}{H_3} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} \cdot \bar{e}_3,$$

а через k_{ij} – компоненты тензора проницаемости \hat{K} в базисе системы (ξ, η, ζ) . Известный [19, 60, 72, 76] закон ортогонального преобразования компонентов тензора второго ранга позволяет вычислить значения k_{ij} в формуле (5) через значения главных проницаемостей λ_i в формулах (1), (2) и (4). В развёрнутом виде применительно к рассматриваемому случаю этот закон запишется так:

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{e}_1, \bar{e}'_1) & (\bar{e}_1, \bar{e}'_2) & (\bar{e}_1, \bar{e}'_3) \\ (\bar{e}_2, \bar{e}'_1) & (\bar{e}_2, \bar{e}'_2) & (\bar{e}_2, \bar{e}'_3) \\ (\bar{e}_3, \bar{e}'_1) & (\bar{e}_3, \bar{e}'_2) & (\bar{e}_3, \bar{e}'_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\bar{e}'_1, \bar{e}_1) & (\bar{e}'_1, \bar{e}_2) & (\bar{e}'_1, \bar{e}_3) \\ (\bar{e}'_2, \bar{e}_1) & (\bar{e}'_2, \bar{e}_2) & (\bar{e}'_2, \bar{e}_3) \\ (\bar{e}'_3, \bar{e}_1) & (\bar{e}'_3, \bar{e}_2) & (\bar{e}'_3, \bar{e}_3) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В формуле (6) \bar{e}'_1, \bar{e}'_2 и \bar{e}'_3 - ортонормированные векторы, задающие ГНА пористой среды, а $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - ортонормированные векторы, определяющие базис ортогональной расчётной системы координат (ξ, η, ζ) . Итак, если 1) задан закон

распределения ГНА пористой среды, 2) заданы главные проницаемости пористой среды, то формула (6) позволит вычислить компоненты тензора проницаемости в любой расчётной системе координат.

Отметим наиболее общие свойства тензора проницаемости анизотропных моделей рассматриваемых периодических сред, которые вытекают из закона (6). *Первое:* в любой ортогональной расчётной системе координат тензор проницаемости анизотропной среды симметричен. Это вытекает из того, что в системе ГНА тензор \hat{K} , заданный в формуле (4) диагональной матрицей, симметричен. *Второе:* в любой расчётной ортогональной системе координат инварианты [19, 60, 72, 76] тензора проницаемости связаны с главными проницаемостями анизотропной среды формулами:

$$I_1 = k_{11} + k_{22} + k_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3; \quad (7)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3; \quad I_3 = \begin{vmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_{11} & k_{31} \\ k_{13} & k_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & k_{22} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3. \quad (8)$$

После того как тензор проницаемости анизотропной среды по формуле (6) будет вычислен, с помощью уравнения (5) основной закон линейной фильтрации в анизотропной среде запишется так:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{k_{11}}{H_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{k_{12}}{H_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{k_{13}}{H_3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \\ v_2 = \frac{k_{21}}{H_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{k_{22}}{H_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{k_{23}}{H_3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \\ v_3 = \frac{k_{31}}{H_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{k_{32}}{H_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{k_{33}}{H_3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \end{cases} \quad (9)$$

В теории линейной фильтрации закон (9) называют тензорным законом Дарси.

Впервые основы линейной теории фильтрации в пористых анизотропных средах были заложены в трудах Б.К. Ризенкампа [119], Ж. Феррандона [237], Ф. Шаффернака [256], Р. Дахлера [236], В.И. Аравина [2-6], А. Шейдегера [257], В.Е. Джонсона и Р.В. Хагеса [240] и др. Эти авторы к обобщению в виде (9) линейного закона Дарси на анизотропные среды пришли из других, отличных от изложенных рассуждений. В силу важности исследований фильтрации в

анизотропных средах уравнениям движения жидкости в них продолжает уделяться большое внимание. Так, Н.С. Бахваловым и Г.П. Панасенко в [17] предложен вывод закона (9) методами теории осреднения динамических процессов в периодических средах. С.Е. Холодовским в [216, 217] предложен другой способ аксиоматического вывода закона (9), а для расчёта тензоров проницаемостей сильно неоднородных сред в [218-223] разработан метод гидродинамического осреднения. Расчёт тензора эффективной проницаемости в многопластовых системах и в трещиновато-пористых средах на основе теории осреднения процессов в периодических средах выполнили в [11] К.С. Басниев, П.Г. Бедриковецкий и Е.Н. Дединец.

В заключение подчеркнём, что тензорный закон Дарси (9) может быть применён не только к исследованию линейной фильтрации, но и нелинейной. Ответ, каким образом, даётся в §5. А сейчас перейдём к изложению общих подходов к моделированию нелинейной фильтрации в анизотропных средах.

1.4. Математическое моделирование нелинейной фильтрации в анизотропных средах методами кристаллофизики

Теория нелинейной фильтрации в анизотропных средах стала развиваться с появлением в 1973-74 гг. публикаций С.Н. Нумерова [96, 250], а затем статей А.В. Костерина [73], Е.Г. Шешукова [227], Ю.М. Молоковича [93]. Они сводили математические модели нелинейной фильтрации к обобщению закона (3.9) с применением только лишь тензоров 2-го ранга.

Дальнейшее развитие этой теории сделали К.С. Басниев и Н.М. Дмитриев [13, 49-51]. В разработанной ими теории они исходили из того, что макроскопическое описание течений жидкости в пористых средах основано на существовании связи между векторным полем градиента ∇P приведённого давления и полем вектора скорости фильтрации \vec{v} , которая в наиболее общем виде выражается формулами

$$\nabla P = \vec{F}(\vec{R}, \vec{v}, \rho, \mu) \quad (\text{либо } \vec{v} = \vec{f}(\vec{R}, \nabla P, \rho, \mu)), \quad (1)$$

удовлетворяющими в области фильтрации условию отрицательности скалярного произведения $(\nabla P, \bar{v}) < 0$. Последнее обусловлено тем, что течение жидкости направлено из области с большим давлением в область с меньшим давлением. Поскольку фильтрационные свойства анизотропной среды в направлении орта \bar{n} определяются соотношениями вида [12, 15, 245]

$$k(\bar{n}) = k_n = -\frac{\mu \cdot (\bar{n}, \bar{v})}{|\nabla P|} \quad \text{или} \quad r(\bar{n}) = r_n = -\frac{(\bar{n}, \nabla P)}{\mu \cdot |\bar{v}|} \quad (2)$$

(в первом равенстве (2) для коэффициента k_n орт \bar{n} совпадает с направлением ∇P , а во втором для r_n , орт \bar{n} совпадает с направлением \bar{v}), то скалярное произведение $(\nabla P, \bar{v})$ с точностью до множителя определяет значения направленной проницаемости k_n и направленного сопротивления r_n , а условие $(\nabla P, \bar{v}) < 0$ обеспечивает положительность этих величин. Применяя теорию (Л.И. Седов [124], В.В. Лохин [125], Ю.И. Сиротин и М.П. Шаскольская [128, 129] и др.) нелинейных тензорных функций нескольких тензорных аргументов, они предложили общий вид связи (1) аппроксимировать зависимостями следующего вида, которые без принципиальных ограничений представим здесь

для ортонормированного базиса

$$-\nabla_i P = a_{ij} \cdot v_j + b_{ijk} \cdot v_j v_k + c_{ijkl} \cdot v_j v_k v_l + \dots \quad (3)$$

В равенстве (3) a_{ij} , b_{ijk} , c_{ijkl} - тензоры, задающие нелинейные фильтрационные свойства пористой среды, а $\nabla_i P$ - проекции вектора ∇P на соответствующие оси. Эти тензоры, зависящие в общем случае от координат точки наблюдения, коэффициентов μ и ρ , инвариантов вектора скорости фильтрации, К.С. Басниевым и Н.М. Дмитриевым находятся из одновременного выполнения двух условий: 1) из инвариантности тензоров a_{ij} , b_{ijk} , c_{ijkl} относительно заданной точечной группы симметрии порового пространства [128, 129] и 2) из соблюдения требования $(\nabla P, \bar{v}) < 0$.

Итак, в математическом моделировании нелинейной фильтрации в анизотропных средах существуют два внешне различных подхода: 1) берущий начало от работ С.Н. Нумерова и 2) развиваемый в трудах Н.М. Дмитриева.

Задача этого и следующего параграфов – 1) показать, что глубокой принципиальной разницы в двух подходах к описанию нелинейной фильтрации в анизотропных средах нет, и 2) дать рекомендации к применению того и другого подходов.

1.4.1 Векторно-матричная форма обобщённого закона Дарси (ОЗД) нелинейной фильтрации в анизотропных средах. Для обобщения линейного закона Дарси (3.9) в диссертации вектор-функция (1) разлагалась в ряд Тейлора с центром в точке $\vec{v} = \vec{0}$ по степеням координат вектора \vec{v} до степеней 3-го порядка. Это разложение в ортонормированном базисе принимает вид (3), а в наглядном векторно-матричном виде записывается следующим образом:

$$-\nabla P = \vec{F}_1(\vec{v}) + \vec{F}_2(\vec{v}) + \vec{F}_3(\vec{v}) + \dots \quad (4)$$

В (4) через $\vec{F}_1(\vec{v})$, $\vec{F}_2(\vec{v})$ и $\vec{F}_3(\vec{v})$ обозначены соответственно линейное, квадратичное и кубичное слагаемые. В развёрнутой форме они запишутся так: линейное слагаемое в виде

$$\begin{aligned} \vec{F}_1(\vec{v}) = & (a_{11} \cdot v_1 + a_{12} \cdot v_2 + a_{13} \cdot v_3) \cdot \vec{e}_1 + \\ & + (a_{21} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + a_{23} \cdot v_3) \cdot \vec{e}_2 + ; \\ & + (a_{31} \cdot v_1 + a_{32} \cdot v_2 + a_{33} \cdot v_3) \cdot \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (5)$$

квадратичное – в виде

$$\vec{F}_2(\vec{v}) = (v^T \cdot B_1 \cdot v) \cdot \vec{e}_1 + (v^T \cdot B_2 \cdot v) \cdot \vec{e}_2 + (v^T \cdot B_3 \cdot v) \cdot \vec{e}_3 \quad (6)$$

и кубичное – в виде

$$\begin{aligned} \vec{F}_3(\vec{v}) = & [v_1(v^T \cdot C_{11} \cdot v) + v_2(v^T \cdot C_{12} \cdot v) + v_3 \cdot (v^T \cdot C_{13} \cdot v)] \cdot \vec{e}_1 + \\ & + [v_1(v^T \cdot C_{21} \cdot v) + v_2(v^T \cdot C_{22} \cdot v) + v_3 \cdot (v^T \cdot C_{23} \cdot v)] \cdot \vec{e}_2 + \\ & + [v_1(v^T \cdot C_{31} \cdot v) + v_2(v^T \cdot C_{32} \cdot v) + v_3 \cdot (v^T \cdot C_{33} \cdot v)] \cdot \vec{e}_3 . \end{aligned} \quad (7)$$

В формулах (5)-(7) через v_1, v_2, v_3 обозначены координаты вектора $\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{e}_i$, а через f_{ki} - координаты векторов $\vec{F}_k(\vec{v}) = \sum_{i=1}^3 f_{ki} \cdot \vec{e}_i$ (где $k = 1, 2, 3$). Для матриц-столбиков из координат векторов \vec{v} и \vec{F}_k используются стандартные обозначения $V^T = (v_1, v_2, v_3)$ и $F_k^T = (f_{1k}, f_{2k}, f_{3k})$.

9 числовых коэффициентов a_{ij} в формуле (5) образуют тензор 2-го ранга, который записывают в виде квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3$.

Через $V_k = (b_{ijk})_{i,j=1}^3$ в формуле (6) обозначены три квадратных матрицы (3×3) с элементами b_{ijk} . Совокупность из 27 элементов матриц V_k образует тензор третьего ранга, который записывают в виде трехмерной [72] матрицы V , представляющей собой столбец из матриц V_k , т.е. $V^T = (V_1, V_2, V_3)$.

Через C_{ij} в формуле (7) обозначены девять матриц (3×3) с элементами $C_{ij} = (c_{kmij})_{k,m=1}^3$. Совокупность 81 элементов c_{kmij} образует тензор четвертого ранга, который записывают в виде четырехмерной [72] матрицы $C = (C_{ij})_{i,j=1}^3$.

Специально подчеркнём, что компоненты тензоров A , V и C в формулах (5), (6) и (7) не могут зависеть от координат вектора \bar{v} , т.к. эти компоненты получены как коэффициенты разложения функции (1) в ряд Тейлора с центром в точке $\bar{v} = \bar{0}$.

1.4.2 Задача построения тензоров заданной симметрии. Анизотропия фильтрационных свойств пористой среды обусловлена наличием некоторого геометрического порядка в её строении, появляющегося в результате тройкопериодического повторения в пространстве какого-то одного основного структурного элемента (ячейки ω) пористой среды. Если размеры d ячеек ω значительно меньше характеристического размера L области фильтрации, то периодические среды моделируются анизотропными. Поэтому термины периодическая и анизотропная в случае $d \ll L$ часто употребляются как синонимы.

Как и в первых §§ 1-3 снова ограничимся (условие 1⁰) рассмотрением *периодических сред с ячейкой ω в виде прямоугольного параллелепипеда с тремя попарно ортогональными основными осями симметрии n_1, n_2, n_3 , проходящими через центры противоположных граней.*

Подчеркнём, что симметрические свойства структурной ячейки ω и заполняющего её порового пространства периодической среды в общем случае не совпадают. Поэтому для характеристики симметрических свойств порового

пространства необходимо указывать его точечную группу симметрии. Последнюю, с целью наглядности, удобно характеризовать некоторой геометрической фигурой Ω , группа симметрии которой точно такая же, как и у порового пространства. Уточним теперь выбор периодических сред условием 2⁰. *У всех рассматриваемых периодических сред геометрическая фигура Ω имеет: либо 1) центр симметрии, совпадающий с центром структурной ячейки ω ; оси симметрии, совпадающие с основными осями ω ; и другие, совместимые с первыми, возможные элементы симметрии, либо 2) одну, две или три полярные оси ℓ симметрии, совпадающие с основными осями ячейки ω и другие, совместимые с ℓ , возможные элементы симметрии.*

В математическом моделировании нелинейной фильтрации в таких анизотропных средах ортогональную систему координат (ξ', η', ζ') , совмещённую с основными осями n_1, n_2, n_3 , считаем заданной. Кроме того, считаются заданными путём выбора конкретной геометрической фигуры Ω все свойства симметрии порового пространства в ячейке ω .

Все анизотропные среды, удовлетворяющие этим двум условиям, обладают важным свойством, которое непосредственно проверяется опытным путём и которое необходимо учитывать при расчёте тензоров A, B и C . Сформулируем это свойство в виде следующего предложения 1. *В любой среде с периодической структурой, удовлетворяющей условиям 1⁰ и 2⁰, в фильтрационных течениях, направленных строго вдоль основных осей симметрии n_1, n_2, n_3 , векторы \bar{v} и ∇P коллинеарны. Поэтому основные оси симметрии n_1, n_2, n_3 по аналогии с определением 1 в §1.2 назовём осями ГНА.*

Выясним, как влияет условие коллинеарности \bar{v} и ∇P вдоль ГНА на строение тензоров A, B и C фильтрационных свойств. Для этого в системе ГНА (ξ', η', ζ') вычисляем ∇P по формулам (4) - (7) вначале для $\bar{v} = v_1 \bar{e}_1$, затем для $\bar{v} = v_2 \bar{e}_2$ и, наконец, для $\bar{v} = v_3 \bar{e}_3$. Требуя каждый раз, чтобы получающийся вектор ∇P был параллелен соответствующему вектору \bar{v} , придём к следующему

следствию 1. Для того чтобы векторы \bar{v} и ∇P были коллинеарными вдоль ГНА, в системе координат (ξ', η', ζ') тензор A должен быть диагональным

$$a_{ii} = \lambda_i \quad ; \quad a_{ij} = 0 \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (8)$$

а у тензоров B и C должны быть равными нулю компоненты

$$b_{112} = b_{113} = b_{221} = b_{223} = b_{331} = b_{332} = 0, \quad (9)$$

и

$$c_{1121} = c_{1131} = c_{2212} = c_{2232} = c_{3313} = c_{3323} = 0. \quad (10)$$

Другие особенности строения тензоров A , B и C фильтрационных свойств периодических сред можно установить по заданным видам симметрии порового пространства структурной ячейки ω с помощью принципа Кюри [129]. Предположим, что фигура Ω отображается в себя при ортогональном преобразовании, заданном матрицей $\Pi = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^3$. Тогда условия инвариантности тензоров A , B и C по отношению к преобразованию $\Pi = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^3$, запишутся в виде следующих равенств [129]:

$$a_{ij} = \alpha_{ip}\alpha_{js}a_{ps}, \quad b_{ijk} = \alpha_{ip}\alpha_{js}\alpha_{km}b_{psm}, \quad c_{ijkl} = \alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{kp}\alpha_{lr}c_{mnp}. \quad (11)$$

Допустим, что для конкретной геометрической фигуры Ω выписаны матрицы $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$ ортогональных преобразований всех её видов симметрии. Потребовав, чтобы условия инвариантности (11) тензоров фильтрационных свойств были выполнены по отношению к каждой из этих матриц, мы и получим их общий вид в системе координат ГНА. После того как тензоры A, B, C в системе ГНА (ξ', η', ζ') будут найдены, можно будет вычислить их компоненты в произвольной расчётной системе координат (ξ, η, ζ) .

1.4.3 Математические модели нелинейной фильтрации для конкретных примеров анизотропных сред. В качестве первого важного практического примера рассмотрим особенности строения тензоров A, B и C для слоистых сред и для трещиновато-пористых горных пород с одной пространственно ориентированной системой трещин. В каждом из этих двух случаев фигура Ω , характеризующая свойства симметрии порового пространства, - круговой цилиндр, у которого две оси ξ' и η' , расположенные параллельно плоскостям изо-

тропных чередующихся слоёв (другом случае, плоскости трещин) – оси симметрии 2-го порядка, а ось ζ' , перпендикулярная к напластованию чередующихся изотропных слоёв (перпендикулярная к плоскостям трещин) – ось симметрии бесконечно большого порядка. Кроме того, круговой цилиндр Ω обладает центральной симметрией, наличие которой приводит к тому, что тензор B в соответствии с (11) в системе ГНА имеет все компоненты, равные нулю [129]. Тензоры A и C , инвариантные относительно всех видов симметрии фигуры Ω , в системе ГНА имеют следующее строение: у тензора A компоненты λ_1 , λ_2 , и λ_3 удовлетворяют условию $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, а у тензора C не равны нулю только 9 следующих компонент: $c_{1111} = c_{2211} = c_{1122} = c_{2222} = p_1$; $c_{3311} = c_{3322} = p_2$; $c_{1133} = c_{2233} = p_3$; $c_{3333} = p_4$.

ОЗД (4) для нелинейной фильтрации в рассматриваемых слоистых и трещиновато-пористых горных породах в системе ГНА для найденных тензоров A и C запишется следующим образом:

$$-\nabla P \cdot \bar{v} = \lambda_1 \cdot (v_1 \cdot \bar{e}_1 + v_2 \cdot \bar{e}_2) + \lambda_3 \cdot v_3 \cdot \bar{e}_3 + [p_1(v_1^2 + v_2^2) + p_2 \cdot v_3^2] \cdot (v_1 \cdot \bar{e}_1 + v_2 \cdot \bar{e}_2) + [p_3(v_1^2 + v_2^2) + p_4 \cdot v_3^2] \cdot v_3 \cdot \bar{e}_3 \quad (12)$$

Заметим, что в соответствии с (12) в системе ГНА скалярное произведение $(\nabla P, \bar{v}) < 0$, если все компоненты $\lambda_i > 0$ и $p_i > 0$. Кроме того, из (12) вытекает, что для взаимно противоположных векторов \bar{v} и $-\bar{v}$ их скалярные произведения с ∇P равны, что указывает на одинаковость фильтрационных свойств противоположных направлений в этих средах.

В качестве второго примера рассмотрим строение тензоров A , B и C для композитов с взаимно перпендикулярными направлениями армирования [17] либо для трещиновато-пористой среды с тремя попарно ортогональными системами трещин. Структурная ячейка ω и фигура Ω этих периодических сред представляет прямоугольный параллелепипед (в частном случае, куб), обладающий центром симметрии, тремя осями симметрии 2-го порядка и тремя ортогональными к осям плоскостями симметрии. Наличие центральной симметрии снова указывает на отсутствие тензора B в ОЗД (4). Инвариантные относи-

тельно всех остальных видов симметрии тензоры A и C в ГНА имеют вид: у тензора A не равны нулю только три диагональных компоненты $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. У тензора C не равными нулю могут быть следующие 21 независимых между собой компоненты: 3 коэффициента c_{kkkk} ; 6 коэффициентов c_{kkmm} ; 6 коэффициентов c_{kmkm} ; 6 коэффициентов c_{kmmk} , ($k, m = 1, 2, 3$). (Для частного случая, когда ω и Ω представляют куб, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ и все перечисленные 21 компоненты будут равны одной и той же величине, например, b). Выражение (4) ОЗД для нелинейной фильтрации в этих средах в системе ГНА принимает вид:

$$\begin{aligned}
 -\nabla P = & \lambda_1 \cdot v_1 \cdot \bar{e}_1 + \lambda_2 \cdot v_2 \cdot \bar{e}_2 + \lambda_3 \cdot v_3 \cdot \bar{e}_3 + \\
 & + v_1 \cdot [c_{1111}v_1^2 + (c_{2211} + c_{1212} + c_{2112})v_2^2 + (c_{3311} + c_{3113} + c_{1313})v_3^2] \cdot \bar{e}_1 + \\
 & + v_2 \cdot [(c_{1122} + c_{1221} + c_{2121})v_1^2 + c_{2222}v_2^2 + (c_{3322} + c_{2323} + c_{3223})v_3^2] \cdot \bar{e}_2 + \\
 & + v_3 \cdot [(c_{1133} + c_{3131} + c_{1331})v_1^2 + (c_{2233} + c_{2332} + c_{3232})v_2^2 + c_{3333}v_3^2] \cdot \bar{e}_3
 \end{aligned} \quad (13)$$

Скалярное произведение $(\nabla P, \bar{v})$ в соответствии с (13) будет $(\nabla P, \bar{v}) < 0$, если все компоненты $\lambda_i > 0$, $c_{kkkk} > 0$ и суммы в круглых скобках вида $c_{kkmm} + c_{mkmk} + c_{kmmk} > 0$ ($k, m = 1, 2, 3$). Из (13) вытекает, что для взаимно противоположных векторов \bar{v} и $-\bar{v}$ скалярные произведения $(\nabla P, \bar{v})$ равны, что подтверждает одинаковость свойств противоположных направлений рассматриваемых пористых сред.

Для частного случая, когда ячейка ω и фигура Ω представляют куб, фильтрационное сопротивление, найденное из (2) и (13), для рассматриваемого композита оказывается равным

$$r_n = \lambda + b \cdot [3 - 2 \cdot (n_1^4 + n_2^4 + n_3^4)] \cdot v^2, \quad (14)$$

где λ и b определяют компоненты тензоров A и C , а n_1, n_2 , и n_3 - направляющие косинусы вектора скорости фильтрации \bar{v} . Полученная формула показывает, что для линейного режима фильтрации (когда $b = 0$) такой композит ведёт себя как изотропное тело, а анизотропию фильтрационных свойств этот композит проявляет лишь при нелинейном режиме.

В качестве третьего представляющего теоретический интерес примера рассмотрим строение тензоров A , B и C для среды, содержащей трёхмерную периодическую систему одинаковых по размерам непроницаемых «зёрен» в ви-

де круговых конусов, расположенных в вершинах структурной ячейки ω в виде прямого параллелепипеда с квадратным основанием. Причём в любом конусе вектор $\vec{\ell}$, расположенный на его оси симметрии и направленный от основания к вершине, сонаправлен с ортом \vec{e}_3 оси ζ' перпендикулярной к основанию ячейки. Пространство между «зёрнами» внутри ячейки пусть заполнено пористой изотропной средой. Фигурой Ω , характеризующей симметрические свойства, в этом примере будет правильная четырёхугольная пирамида. Ось ζ' будет осью симметрии 4-го порядка, а плоскости $\eta'\zeta'$, $\xi'\zeta'$ и диагональные сечения - плоскостями симметрии фигуры Ω . Тензоры A и C , инвариантные относительно перечисленных видов симметрии фигуры Ω , в системе ГНА имеют вид: у тензора A не равны нулю только компоненты $a_{11} = a_{22} = \lambda_1$, $a_{33} = \lambda_3$, а у тензора C отличными от нуля могут быть лишь компоненты $c_{1111} = c_{2211} = c_{1122} = c_{2222} = p_1$; $c_{3311} = c_{3322} = p_2$; $c_{1133} = c_{2233} = p_3$; $c_{3333} = p_4$, $c_{1212} = c_{2112} = c_{1221} = c_{2121} = q_1$; $c_{1313} = c_{3113} = c_{1331} = c_{2323} = c_{3223} = c_{2332} = c_{3232} = q_2$. У тензора B не равны нулю только компоненты $b_{131} = b_{311} = b_{232} = b_{322} = a$ и $b_{333} = b \neq 0$. ОЗД (4) для нелинейной фильтрации в этих средах в системе ГНА запишется в виде:

$$\begin{aligned}
 -\nabla P = & \lambda_1 \cdot (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2) + \lambda_3 v_3 \vec{e}_3 + v_3 \cdot [2a \cdot (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2) + b \cdot v_3 \cdot \vec{e}_3] + \\
 & + v_1 \cdot (p_{11} v_1^2 + p_{12} v_2^2 + p_{13} v_3^2) \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot (p_{21} v_1^2 + p_{22} v_2^2 + p_{23} v_3^2) \cdot \vec{e}_2 + \\
 & + v_3 \cdot (p_{31} v_1^2 + p_{32} v_2^2 + p_{33} v_3^2) \cdot \vec{e}_3, \quad (15)
 \end{aligned}$$

где $p_{11} = p_{22} = p_1$; $p_{12} = p_{21} = p_1 + 2q_1$; $p_{13} = p_{23} = p_2 + 2q_2$; $p_{31} = p_{32} = p_3 + 2q_2$; $p_{33} = p_4$. Фильтрационное сопротивление рассматриваемой анизотропной среды вдоль направления $\vec{n} = \vec{v}/v$ в соответствии с формулами (2) и (15) оказывается равным

$$\begin{aligned}
 r(\vec{n}) = & \lambda_1 (n_1^2 + n_2^2) + \lambda_3 n_3^2 + [2a \cdot (n_1^2 + n_2^2) + b \cdot n_3^2] \cdot v_3 + \\
 & + \{ n_1^2 (p_{11} n_1^2 + p_{12} n_2^2 + p_{13} n_3^2) + n_2^2 (p_{21} n_1^2 + p_{22} n_2^2 + p_{23} n_3^2) + n_3^2 (p_{31} n_1^2 + p_{32} n_2^2 + p_{33} n_3^2) \} \cdot v^2. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Формула (16) показывает, что для течений в плоскости $\xi'\eta'$ фильтрационное сопротивление одинаково для противоположных направлений. В частности, если $q_1 = 0$, то плоскость $\xi'\eta'$ будет, согласно (16), плоскостью изотропии. Однако

для взаимно противоположных течений вдоль оси ζ' фильтрационные сопротивления r^+ и r^- этой среды оказываются различными и соответственно равными

$$r^+ = \lambda_3 + b \cdot v + p_4 \cdot v^2 \quad \text{и} \quad r^- = \lambda_3 - b \cdot v + p_4 \cdot v^2, \quad (17)$$

где $v = v_3$. Ранее теоретические обоснования асимметрии фильтрационных свойств некоторых анизотропных сред приводились в [14, 49, 187]. Полученные представления для ОЗД позволят исследовать фильтрационные эффекты, присущие нелинейным режимам фильтрации в анизотропных средах, и установить взаимосвязь с подходом С.Н. Нумерова.

1.5. Математическое моделирование нелинейной фильтрации в анизотропных средах обобщённым методом С.Н.Нумерова

Перейдём к построению моделей нелинейной фильтрации в анизотропных средах обобщённым методом С.Н.Нумерова. В предыдущем §1.4 уже отмечалось, что обобщение закона фильтрации в рамках предположения (4.1) подразумевает разложение в ряд Тейлора по степеням v_i ($i = 1, 2, 3$) функции \bar{F} в окрестности $\bar{v} = \bar{0}$. Такое разложение в ортонормированном базисе с учётом равенства $\bar{F} = \bar{0}$ при $\bar{v} = \bar{0}$ имеет вид (4.3). Если в правой части (4.3) вынести общий множитель v_j , то это разложение примет вид

$$-\nabla_i P = r_{ij} v_j, \quad (1)$$

где $r_{ij} = a_{ij} + b_{ijk} v_k + c_{ijkl} v_k v_l + \dots$. Формула (1) показывает, что связь между полями ∇P и \bar{v} как для линейной, так и для нелинейной фильтрации в анизотропных средах в произвольном ортонормированном расчётном базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ аппроксимируется матричным уравнением одного и того же вида.

$$-\nabla P = R \cdot V, \quad (2)$$

где $\nabla P = (\nabla_1 P, \nabla_2 P, \nabla_3 P)^T$ и $V = (v_1, v_2, v_3)^T$ – одностолбцовые матрицы из координат ∇P и \bar{v} , а компоненты матрицы $R = (r_{ij})_{i,j=1}^3$ образуют тензор 2-го ранга, называемый тензором фильтрационных сопротивлений пористой среды. Чтобы найти тензор R в произвольном ортонормированном базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, надо

предварительно определить его компоненты r'_{ij} в некотором исходном базисе $\{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$ - базисе из главных направлений анизотропии пористой среды.

В диссертации ограничиваемся рассмотрением только тех анизотропных сред, ГНА у которых попарно ортогональны и известны априори. Примерами таковых, в частности, служат трансверсально-изотропные и ортотропные среды [16]. В базисе из ГНА уравнение (2) примет вид

$$-\nabla P = \begin{pmatrix} r'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & r'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & r'_{33} \end{pmatrix} \cdot V' . \quad (3)$$

Компоненты r'_{11} , r'_{22} и r'_{33} тензора R в формуле (3), определяющие фильтрационные сопротивления вдоль ГНА, назовём главными фильтрационными сопротивлениями среды (ГФС).

Для слоистых, трещиновато-пористых, армированных сред и для сред с полярным ГНА в предыдущем §1.4 были указаны соответствующие варианты записи ОЗД. В ГНА все полученные в §1.4 ОЗД имели один и тот же вид (3) и отличались друг от друга только выражениями для ГФС среды. В первом примере (4.12) для слоистых и трещиновато-пористых сред ГФС r'_{11} , r'_{22} и r'_{33} среды оказались равны

$$r'_{11} = r'_{22} = \lambda_1 + (V^T \cdot D_1 \cdot V) ; \quad r'_{33} = \lambda_3 + (V^T \cdot D_3 \cdot V) , \quad (4)$$

где $D_1 = \text{diag} [p_1, p_1, p_2]$; $D_3 = \text{diag} [p_3, p_3, p_4]$. Во втором примере (4.13) для периодических сред, представляющих композиты с взаимно-перпендикулярными направлениями армирования, r'_{11} , r'_{22} и r'_{33} оказались равны значениям

$$r'_{ii} = \lambda_i + (V^T \cdot D_i \cdot V) ; \quad i = 1, 2, 3 , \quad (5)$$

в которых матрицы D_i тоже имеют диагональный вид. В третьем примере (4.15) для среды с кубической структурной ячейкой и с полярным ГНА \bar{e}_3 ГФС среды оказались равны

$$r'_{ii} = \lambda_i + c_i \cdot (\bar{v}, \bar{e}_3) + (V^T \cdot D_i \cdot V) , \quad (6)$$

где $\lambda_i = \begin{cases} \lambda_1, & \text{если } i=1,2 \\ \lambda_3, & \text{если } i=3 \end{cases}$; $c_i = \begin{cases} 2a, & \text{если } i=1,2 \\ b, & \text{если } i=3 \end{cases}$, а $D_i = \text{diag} [p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}]$ для $i = 1, 2, 3$. В

формулах (4)–(6) через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, a, b, c, p_1, p_2, p_3$ обозначены некоторые числовые параметры, а через D_1, D_2, D_3 - диагональные матрицы, характеризующие фильтрационные свойства элементарных структурных ячеек названных сред. Эвристическое значение ОЗД (4)-(6), полученных в §1.4 состоит в том, что они позволяют выдвинуть гипотезу о строении тензора R в системе ГНА. Сформулируем её в виде предложения 1. *Для всех анизотропных (периодических) сред со структурной ячейкой ω в виде прямоугольного параллелепипеда обобщённый закон Дарси нелинейной фильтрации в системе координат ГНА можно представить в виде (3). Главные фильтрационные сопротивления $r'_{11}, r'_{22}, r'_{33}$ в (3) принимают только положительные значения и представляют собой функции*

$$\begin{cases} r'_{ii} = f_i(M, \mu, v, (\bar{v}, \bar{n}_k), (V^T \cdot D_i \cdot V)) \\ i = 1, 2, 3 \end{cases}, \quad (7)$$

зависящие от координат точки наблюдения M , коэффициента динамической вязкости μ и от инвариантных величин: модуля $v = |\bar{v}|$ вектора скорости фильтрации; скалярных произведений (\bar{v}, \bar{n}_k) вектора \bar{v} с некоторыми заданными векторами \bar{n}_k и от квадратичных форм $(V^T \cdot D_i \cdot V)$. (Условия $r'_{ii} > 0$ для всех $i = 1, 2, 3$ продиктованы необходимостью выполнения неравенства $(\nabla P, \bar{v}) < 0$ в каждой точке области фильтрации).

Приведённые примеры показывают, что функции (7) можно задавать в виде:

$$\begin{cases} r'_{ii} = \lambda_i(M, \mu, v) + \sum_k b_{ik}(M, \mu, v) \cdot (\bar{v}, \bar{n}_k)^{m_k} + (V^T \cdot D_i \cdot V) \\ i = 1, 2, 3 \end{cases}. \quad (8)$$

Сделаем некоторые замечания к формулам (7) и (8). В предлагаемой математической модели фильтрационные свойства пористой анизотропной среды в главных чертах определяются заданием: 1) ГНА, 2) направлений особых фильтрационных свойств \bar{n}_k (НОФС), 3) скалярных функций $\lambda_i(M, \mu, v)$ и $b_{ik}(M, \mu, v)$ и 4) положительно определённых квадратичных форм $(V^T \cdot D_i \cdot V)$. Функции $\lambda_i(M, \mu, v)$

принимают положительные значения, а $b_{ik}(M, \mu, \nu)$ – знакопостоянные. Первые слагаемые $\lambda_i(M, \mu, \nu)$ позволяют учесть зависимость ГФС пористой среды от пространственных координат и от модуля скорости фильтрации. Вторые слагаемые $\sum_k b_{ik}(M, \mu, \nu) \cdot (\vec{v}, \vec{n}_k)^{m_k}$ позволяют учесть возможность наличия одного или нескольких НОФС пористой анизотропной среды. Причём в общем случае НОФС могут и не совпадать с ГНА. Если для течений вдоль орта \vec{n}_k наблюдается асимметрия фильтрационных свойств анизотропной среды, то показатель степени m_k выбирается нечётным, а функции $b_{ik}(M, \mu, \nu) > 0$ будут определять различие фильтрационных сопротивлений в противоположных направлениях. Если для течений в направлении орта \vec{n}_k фильтрационные сопротивления могут принимать экстремальные значения, то степени m_k выбираются чётными. При этом, если вдоль \vec{n}_k ГФС достигают максимальных значений, то тогда функции выбираются $b_{ik}(M, \mu, \nu) > 0$. Если же вдоль \vec{n}_k ГФС минимальны, тогда функции $b_{ik}(M, \mu, \nu) < 0$. Наконец, если направлений с особыми фильтрационными свойствами нет, то функции $b_{ik}(M, \mu, \nu) = 0$. Третьи слагаемые $(V^T \cdot D_i \cdot V)$ в (8) – положительно определённые квадратичные формы от координат вектора скорости фильтрации. Собственные числа симметричных матриц D_i тоже могут зависеть от скалярных аргументов M , μ и ν . С помощью выбора матриц D_i можно учесть какие-то дополнительные симметрические свойства порового пространства, которые нельзя определить одним лишь заданием ГНА.

Первое обобщение нелинейной фильтрации на анизотропные грунты, предложенное С.Н.Нумеровым в [96, 250], из (7) и (8) получается как частный случай, когда все $D_i = 0$, $b_{ik} = 0$, а $\lambda_i = a_i + b_i \cdot \nu$.

Если уравнение (2) переписать в виде, разрешённом относительно компонент скорости фильтрации, то придём к обобщённому закону Дарси, по форме, совпадающей с (3.9). Поэтому (3.9) можно применять не только для описания линейной, но и нелинейной фильтрации в рассматриваемом классе анизотропных сред. Однако в случае нелинейной фильтрации главные проницаемости λ_i нужно считать, по аналогии с ГФС g'_{11} , g'_{22} и g'_{33} , функциями вида

$\lambda_i = \tilde{f}_i(M, v, (\tilde{v}, \tilde{n}_k), (V^T \cdot D_i \cdot V)), i = 1, 2, 3$ со всеми теми же замечаниями к ним, которые делались к формулам (7) и (8).

Преимущество предлагаемого обобщённого метода С.Н. Нумерова: 1) его применение не требует решения сложной задачи построения тензоров высших рангов, отвечающих заданной точечной группе симметрии. Вместо неё решается более простая задача – построение симметричного в ортонормированном базисе тензора второго ранга по заданному полю ГНА. Решение последней автором дано в [166, 170, 188, 189, 196, 209]; 2) предлагаемый способ позволяет свести расчёт фильтрации к решению краевой задачи для одного нелинейного уравнения. В случае применения ОЗД, предлагаемых Н.М. Дмитриевым [51], расчёт фильтрации сводится, как правило, к интегрированию системы нелинейных уравнений; 3) если расчётная система координат не совпадает с ГНА, то для перехода в неё в предлагаемом методе нужно пересчитывать лишь тензоры 2-го ранга. Если же применять математические модели [51], то кроме тензоров 2-го ранга нужно пересчитывать ещё и тензоры 3 и 4-го рангов по более сложным и громоздким формулам.

1.6. Пример построения математической модели нелинейной фильтрации в анизотропной среде обобщённым методом С.Н. Нумерова

В качестве конкретного примера применения обобщённого метода С.Н. Нумерова предложим математическую модель плоскопараллельной фильтрации в среде с прямолинейной анизотропией и с полярным ГНА. Вдоль ГНА этой среды направим оси x , y и z . Пусть плоскость течения совпадает с $хоу$, а ось x -ов будет осью с особыми фильтрационными свойствами (например, она может быть полярной). Поэтому орт, задающий ГНА с особыми свойствами, совпадает с осью x -ов, и, следовательно, $(\tilde{v}, \tilde{n}) = (\tilde{v}, \tilde{i}) = v_x$. Для конкретизации математической модели функции f_i в (5.7) зададим равенствами

$$r'_{11} = r'_{22} = \frac{\mu}{k \cdot f\left(\frac{(\tilde{v}, \tilde{n})}{v}\right)} = \frac{\mu}{k \cdot f\left(\frac{v_x}{v}\right)}, \quad (1)$$

где под μ подразумевается динамическая вязкость жидкости, а k – постоянная с размерностью проницаемости. Сделанный в (1) выбор функций (5.7) позволяет записать ОЗД (5.3) нелинейной фильтрации в рассматриваемой среде в виде

$$\vec{v} = f\left(\frac{v_x}{v}\right) \cdot \nabla \varphi, \text{ где } \varphi = -\frac{k \cdot P}{\mu}. \quad (2)$$

Формула (2) показывает, что рассматриваемая среда с прямолинейной анизотропией обладает следующими свойствами. Во-первых, в этой анизотропной среде векторы \vec{v} и $\nabla \varphi$ всегда коллинеарны. Во-вторых, проницаемость среды, равная $k \cdot f\left(\frac{v_x}{v}\right)$, зависит от угла θ , который составляет скорость фильтрации \vec{v} с положительным направлением полярного ГНА. В-третьих, полярное ГНА может проявлять асимметрию свойств, т.к. для положительного и отрицательного направлений оси x -ов проницаемости $k \cdot f(1)$ и $k \cdot f(-1)$ могут и не совпадать.

Запишем уравнения плоскопараллельной фильтрации в такой прямолинейно-анизотропной среде в декартовых координатах. Для этого сравним проекции скорости v_x и v_y из (2) с таковыми же, выраженными через функцию тока ψ , которую обычным образом [16, 85, 86, 102] можно ввести в рассмотрение на основании уравнения неразрывности $\text{div } \vec{v} = 0$. В результате получим следующую систему:

$$v_x = f\left(\frac{v_x}{v}\right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v_y = f\left(\frac{v_x}{v}\right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3)$$

Система уравнений (3) нелинейная, но она позволяет провести исключение одной из функций и свести задачу к интегрированию уравнения для другой функции.

Для исключения ψ заметим, что $f\left(\frac{v_x}{v}\right) = f\left(\frac{\varphi_x}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}}\right) = \Phi(\varphi_x, \varphi_y)$, где φ_x и φ_y – соответствующие частные производные. Выполняя в (3) перекрёстное дифференцирование, для функции φ получим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\Phi(\varphi_x, \varphi_y) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\Phi(\varphi_x, \varphi_y) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = 0. \quad (4)$$

Для исключения φ введём в рассмотрение функцию $F(\psi_x, \psi_y) = \frac{1}{f\left(\frac{v_x}{v}\right)}$, где

$\frac{v_x}{v} = \frac{\psi_y}{\sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2}}$, а через ψ_x и ψ_y обозначены соответствующие частные производные.

Тогда после перекрёстного дифференцирования системы (3) для функции тока получим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[F(\psi_x, \psi_y) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[F(\psi_x, \psi_y) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] = 0. \quad (5)$$

Частные решения уравнений (4) и (5) описывают все плоскопараллельные течения в рассматриваемой анизотропной среде. Например, частным решением уравнения (5) выступает, как легко проверить, функция $\psi(x, y) = v_x \cdot y - v_y \cdot x + C$, где v_x , v_y и C – произвольные постоянные, характеризующие поступательный фильтрационный поток со скоростью $\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j}$.

Два других точных решения системы (3) можно найти, если в ней перейти к полярным координатам r и θ . В полярных координатах (3) принимает вид

$$v_r = f\left(\frac{v_x}{v}\right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} ; \quad v_\theta = \frac{f\left(\frac{v_x}{v}\right)}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (6)$$

С помощью (6) можно найти точное решение классической задачи о дебите центральной скважины в круговом пласте для рассматриваемой анизотропной среды. Допуская существование плоско-радиального течения к такой скважине, мы должны считать $v_x = v \cdot \cos(\theta)$ и, следовательно, $f\left(\frac{v_x}{v}\right) = f(\cos \theta)$. Трансверсальная составляющая v_θ в радиальном течении отсутствует, поэтому, согласно второму уравнению системы (6), функции φ и ψ будут зависеть только от одной переменной, а именно $\varphi = \varphi(r)$ и $\psi = \psi(\theta)$. Тогда из (6) находим, что

$$\varphi(r) = A \cdot \ln r + C ; \quad \psi(\theta) = A \cdot \int f(\cos \theta) \cdot d\theta + D, \quad (7)$$

где A , C и D – произвольные постоянные. Удельный дебит Q добывающей

скважины равен $Q = -\int_0^{2\pi} v_r \cdot r \cdot d\theta = -A \cdot \int_0^{2\pi} f(\cos \theta) \cdot d\theta$. (Знак «минус» поставлен ввиду

отрицательного знака проекции v_r). Если на контуре скважины $r=r_c$ и на круговой границе $r=R$ области питания будут, как обычно, заданы значения приведённого давления P_c и P_{II} соответственно, то с помощью (7) окончательно найдём, что

$$Q = \frac{2\pi \cdot \langle k \rangle \cdot (P_{II} - P_c)}{\mu \cdot \ln\left(\frac{R}{r_c}\right)}, \quad (8)$$

где через $\langle k \rangle$ обозначено среднее по всем направлениям θ значение проницаемости рассматриваемой анизотропной среды, т.е.

$$\langle k \rangle = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} k \cdot f(\cos\theta) \cdot d\theta. \quad (9)$$

Решение (8) от классической формулы Дюпюи [7, 24, 103, 258] отличается только тем, что вместо проницаемости изотропного пласта появилось среднее значение проницаемости $\langle k \rangle$.

Рассмотрим теперь другое течение типа точечного вихря, расположенного в начале координат. В этом течении $v_x = -v \cdot \sin(\theta)$, поэтому $f\left(\frac{v_x}{v}\right) = f(-\sin\theta)$. Поскольку сейчас $v_r = 0$, то из (6) вытекает, что $\varphi = \varphi(\theta)$, а $\psi = \psi(r)$. Теперь из системы (6) находим следующее частное решение:

$$\varphi = A \cdot \int \frac{d\theta}{f(-\sin\theta)} + C \quad ; \quad \psi = -A \cdot \ln(r) + D, \quad (10)$$

где A, C, D - произвольные постоянные, которые можно определить, если будет задана конкретная область течения и граничные условия. Пусть, к примеру, область течения – четверть кругового кольца, ограниченная осями x, y и окружностями $r = r_1, r = r_2$ (где $r_1 < r_2, 0 \leq \theta \leq \pi/2$). В этом течении величина потока Π от отрезка $r_1 \leq x \leq r_2$ на оси x -ов к отрезку $r_1 \leq y \leq r_2$ на оси y -ов равна $\Pi = \int_{r_1}^{r_2} v_\theta \cdot dr = A \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$. Если на границах осей x и y будут заданы значения

$\varphi|_{\text{ось } x} = \varphi_{II}$ и $\varphi|_{\text{ось } y} = \varphi_c$, то A можно вычислить из этих граничных условий. В результате для такого потока Π получим значение

$$\Pi = \frac{2 \cdot (P_{\Pi} - P_C) \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\pi \cdot \mu \cdot \left\langle \frac{1}{k} \right\rangle}, \quad (11)$$

где $\left\langle \frac{1}{k} \right\rangle = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\theta}{k \cdot f(\cos\theta)}$. Формулы (8) и (11) имеют важное практическое значение,

т.к. с их помощью по результатам лабораторных испытаний можно было бы измерить средние значения $\langle k \rangle$ и $\left\langle \frac{1}{k} \right\rangle$. Затем по измеренным средним можно

найти параметры функции $f(\cos\theta)$, которая аппроксимирует зависимость проницаемости среды от направления вектора \vec{v} . Например, если ось x-ов обладает асимметрией и проницаемость, как функция направления вектора скорости фильтрации, аппроксимируется зависимостью вида

$$f(\cos\theta) = a_0 + a_1 \cdot \cos\theta, \quad \text{где } 0 < a_1 < a_0, \quad (12)$$

то для средних значений $\langle k \rangle$ и $\left\langle \frac{1}{k} \right\rangle$ найдём выражения:

$$\begin{cases} \langle k \rangle = k \cdot a_0 \\ \left\langle \frac{1}{k} \right\rangle = \frac{1}{k} \cdot \frac{1 + \frac{2 \cdot \alpha}{\pi}}{\sqrt{a_0^2 - a_1^2}}, \quad \text{где } \alpha = \arcsin\left(\frac{a_1}{a_0}\right) \end{cases} \quad (13)$$

Теперь из системы уравнений (13) по измеренным величинам средних $\langle k \rangle$ и $\left\langle \frac{1}{k} \right\rangle$ можно найти параметры a_0 и a_1 в формуле (12).

Таким образом, обобщённый метод С.Н. Нумерова позволяет в рассмотренном случае предложить, с привлечением экспериментальных данных, математическую модель плоскопараллельной нелинейной фильтрации в анизотропной среде с весьма необычными свойствами.

Основные результаты 1-й главы: 1) выведены формулы для расчёта главных проницаемостей по методам локального и интегрального однородно-анизотропного эквивалентирования периодических сред специального класса, 2) развит метод расчёта тензоров проницаемостей анизотропных моделей периодических сред по заданным полям ГНА и главных проницаемостей как для

линейного, так и для нелинейного режимов фильтрации; 3) дано развитие метода С.Н. Нумерова математического моделирования нелинейной фильтрации в трансверсально-изотропных и ортотропных анизотропных средах и указана его преемственная связь с методом К.С. Басниева и Н.М. Дмитриева; 4) создан каталог (в приложении 2) тензоров проницаемостей анизотропных сред для широких серий законов распределения ГНА.

ГЛАВА 2. УРАВНЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Во 2-ой главе выводятся общие уравнения двумерной линейной фильтрации в анизотропных средах, указываются способы приведения их к каноническому виду и общие методы решения.

2.1. Уравнения неразрывности для пространственных, двумерных и плоскопараллельных фильтрационных потоков жидкости

Уравнение неразрывности представляет собой математическое выражение закона сохранения массы фильтрующейся жидкости в пористой среде. Закон сохранения массы обязательно учитывается при разработке математических моделей фильтрации в любых пористых средах (изотропных и анизотропных, однородных и неоднородных, деформируемых и недеформируемых и др.). В этом параграфе уравнение неразрывности записывается: 1) для общего пространственного фильтрационного течения, 2) специально выводится для двумерного фильтрационного течения в искривлённом слое переменной толщины и, как частный случай двумерного, 3) приводится для плоскопараллельного фильтрационного течения.

2.1.1. Уравнение неразрывности для трёхмерного пространственного фильтрационного течения

Как известно [16, 24, 41, 78-80, 102 и др.], уравнение неразрывности для фильтрационного течения жидкости в пористой среде имеет следующий вид:

$$\operatorname{div}(\rho \cdot \vec{v}) + \frac{\partial(m \cdot \rho)}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

где m – пористость грунта, t – время, а остальные обозначения прежние. Применяя известную формулу [61, 76, 213 и др.] для вычисления дивергенции, уравнение неразрывности (1) в ортогональных криволинейных координатах (ξ, η, ζ) в развёрнутом виде запишется следующим образом:

$$\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (H_2 H_3 \cdot \rho \cdot V_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (H_3 H_1 \cdot \rho \cdot V_\eta) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (H_1 H_2 \cdot \rho \cdot V_\zeta) \right] + \frac{\partial(m \cdot \rho)}{\partial t} = 0, \quad (1')$$

где H_1, H_2, H_3 – параметры Ламе. Для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) уравнение неразрывности в недеформируемой (пористость m не зависит от времени t) среде

принимает более простой вид:

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (H_2 H_3 \cdot V_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (H_3 H_1 \cdot V_\eta) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (H_1 H_2 \cdot V_\zeta) \right] = 0. \quad (2)$$

2.1.2. Уравнение неразрывности для двумерных фильтрационных течений сжимаемой и несжимаемой жидкости в искривлённых слоях переменной толщины

Реальные фильтрационные течения жидкости протекают, как правило, в искривлённых слоях переменной толщины, ограниченных непроницаемыми подошвой и кровлей (рис. 3). Поэтому теория двумерной фильтрации в искривлённых слоях переменной толщины имеет большое практическое значение в задачах водо-, газо- и нефтедобычи. Исследованием двумерной фильтрации в искривлённых слоях занимались известные учёные-механики [91, 118] П.Я. Полубаринова-Кочина, О.В. Голубева и её ученики К.Н. Быстров, Ю.А. Гладышев и др.

В диссертации автор предлагает собственный метод для исследования течений в искривлённых слоях переменной толщины. Метод О.В. Голубевой из предлагаемого в работе вытекает как частный случай.

Перейдём к выводу уравнения неразрывности для двумерной ламинарной фильтрации сжимаемой жидкости в искривлённом слое переменной толщины (рис.3). Непроницаемые криволинейные поверхности подошвы и кровли слоя будем задавать координатными поверхностями $\zeta = \zeta_1 = \text{const}$ (подошва) и $\zeta = \zeta_2 = \text{const}$ (кровля) некоторой ортогональной криволинейной системы координат ξ, η, ζ . Рассматриваем только такие фильтрационные течения, поверхности тока в которых стационарны и совпадают с координатными поверхностями $\zeta = \text{const}$. Это, конечно, идеализация, но в большинстве случаев реальная схема течения почти во всём пласте близка к ней. Предложенная схема течения могла бы быть реализована практически, если бы в пласте удалось построить тонкие непроницаемые поверхности $\zeta = \text{const}$. Эти поверхности $\zeta = \text{const}$ увеличат фильтрационное сопротивление пласта и, следовательно, расчёты потоков по предлагаемой кинематической схеме окажутся заниженными против реальных значений. Предположение, что реальные поверхности тока почти во всём пласте близки к координатным поверхностям $\zeta = \text{const}$ заставляет считать, что $V_\zeta = V_3 = 0$. Таким образом, в рассматриваемом

мой схеме течения поле скоростей фильтрации аппроксимируется выражением

$$\vec{V} = V_{\xi}(\xi, \eta, \zeta, t) \cdot \vec{e}_1 + V_{\eta}(\xi, \eta, \zeta, t) \cdot \vec{e}_2, \quad (3)$$

в котором $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - орты базиса в системы ξ, η, ζ . Рассмотрим теперь поток сжимаемой жидкости с полем скоростей (3) через боковые грани криволинейного параллелепипеда $\xi = \text{const}, \xi + d\xi = \text{const}, \eta = \text{const}, \eta + d\eta = \text{const}$. Сечение ABCD этого параллелепипеда поверхностью $\zeta = \text{const}$ показано рис.4. Через грань AB за время dt в параллелепипед втечёт масса жидкости

$$M_{AB} = dt \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \rho(\xi, \eta, \zeta, t) \cdot V_{\xi}(\xi, \eta, \zeta, t) \cdot H_2(\xi, \eta, \zeta) d\eta \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) d\zeta. \quad (4)$$

Через противоположную грань из параллелепипеда за время dt вытечет масса жидкости

$$M_{CD} = dt \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \rho(\xi + d\xi, \eta, \zeta, t) \cdot V_{\xi}(\xi + d\xi, \eta, \zeta, t) \cdot H_2(\xi + d\xi, \eta, \zeta) d\eta \cdot H_3(\xi + d\xi, \eta, \zeta) d\zeta. \quad (5)$$

Поэтому за счёт потоков через пару противоположных граней AB и CD внутри параллелепипеда за время dt накопится масса жидкости

$$M_1 = M_{CD} - M_{AB} = d\xi \cdot d\eta \cdot dt \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial}{\partial \xi} [H_2(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot \rho(\xi, \eta, \zeta, t) \cdot V_{\xi}(\xi, \eta, \zeta, t)] \cdot d\zeta. \quad (6)$$

Совершенно аналогично подсчитывается накопленная за время dt масса жидкости за счёт потоков через противоположные грани AD и BC параллелепипеда:

$$M_2 = M_{BC} - M_{AD} = d\xi \cdot d\eta \cdot dt \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial}{\partial \eta} [H_1(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot \rho(\xi, \eta, \zeta, t) \cdot V_{\eta}(\xi, \eta, \zeta, t)] \cdot d\zeta. \quad (7)$$

Общее количество массы жидкости, скапливающейся за время dt в параллелепипеде ABCD за счёт потоков через боковые грани, равно $M = M_1 + M_2$. С другой стороны, это же количество накопленной массы через изменение плотности ρ жидкости и пористости m среды можно подсчитать по формуле

$$-M = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \rho(\xi, \eta, \zeta, t + dt) \cdot m(\xi, \eta, \zeta, t + dt) \cdot H_1(\xi, \eta, \zeta) d\xi \cdot H_2(\xi, \eta, \zeta) d\eta \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) d\zeta - \\ - \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \rho(\xi, \eta, \zeta, t) \cdot m(\xi, \eta, \zeta, t) \cdot H_1(\xi, \eta, \zeta) d\xi \cdot H_2(\xi, \eta, \zeta) d\eta \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) d\zeta, \quad (8)$$

или, применяя частный дифференциал по t , по формуле

$$M = -d\xi \cdot d\eta \cdot dt \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot m) \cdot H_1 H_2 H_3 \cdot d\zeta . \quad (8')$$

(Знак «минус» в (8') поставлен потому, что если жидкость накапливается за время dt в параллелепипеде ABCD, то сумма потоков через грани должна быть $M < 0$, в то время как $\frac{\partial(\rho \cdot m)}{\partial t} > 0$). Поэтому в соответствии с формулами (6), (7) и (8') равенство $M_1 + M_2 = M$ приводит к соотношению

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} [H_2(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot \rho(\xi, \eta, \zeta, t) \cdot V_\xi(\xi, \eta, \zeta, t)] + \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta} [H_1(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot \rho(\xi, \eta, \zeta, t) \cdot V_\eta(\xi, \eta, \zeta, t)] + \\ & \left. + H_1(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_2(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot \frac{\partial(\rho \cdot m)}{\partial t} \right\} \cdot d\zeta = 0 . \end{aligned} \quad (9)$$

Последнее уравнение (9) и будет уравнением неразрывности в интегральной форме для двумерных течений сжимаемой жидкости в искривлённом пласте переменной толщины с деформируемой пористой средой.

Для несжимаемой жидкости и недеформируемой в пласте пористой среды уравнение неразрывности принимает более простой вид

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} [H_2(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot V_\xi(\xi, \eta, \zeta, t)] + \frac{\partial}{\partial \eta} [H_1(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot V_\eta(\xi, \eta, \zeta, t)] \right\} \cdot d\zeta = 0 \quad (10)$$

Отметим два важных частных случая, вытекающих из общего двумерного уравнения неразрывности (10) – уравнение неразрывности в теории О.В. Голубевой и уравнение неразрывности для плоскопараллельных течений.

2.1.3. Уравнение неразрывности для двумерных течений несжимаемой жидкости в теории О.В. Голубевой

В приближении О.В. Голубевой искривлённые слои переменной толщины считались настолько тонкими, что изменениями параметров Ламе по толщине слоя (по координате ζ) пренебрегали и считали, что

$$H_1 = H_1(\xi, \eta, \zeta_1) = h_1(\xi, \eta); H_2 = H_2(\xi, \eta, \zeta_1) = h_2(\xi, \eta); H_3 = H_3(\xi, \eta, \zeta_1) = \frac{H(\xi, \eta)}{\zeta_2 - \zeta_1} . \quad (11)$$

Поэтому, предполагая справедливыми равенства (11), из (10) как частный случай получим уравнение неразрывности в теории О.В. Голубевой

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [h_2(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta) \cdot V_\xi(\xi, \eta, t)] + \frac{\partial}{\partial \eta} [h_1(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta) \cdot V_\eta(\xi, \eta, t)] = 0. \quad (12)$$

Функцию $H(\xi, \eta)$ в теории О.В. Голубевой считали заданной и называли толщиной слоя. Это связано с тем, что в случае (11) длина ζ - координатной дуги от подошвы до кровли слоя оказывается равной $H(\xi, \eta)$.

2.1.4. Уравнение неразрывности для плоскопараллельного фильтрационного течения. Функция тока плоскопараллельного течения

В теории фильтрации важную роль играют плоскопараллельные течения, происходящие параллельно некоторой зафиксированной плоскости. Если в плоскости течения выбраны ортогональные криволинейные координаты ξ, η , а прямолинейная ось ζ будет всюду направлена перпендикулярно к плоскости течения, то $V_\xi = V_\xi(\xi, \eta)$, $V_\eta = V_\eta(\xi, \eta)$, $V_\zeta = 0$, $H_1 = H_1(\xi, \eta)$, $H_2 = H_2(\xi, \eta)$, $H_3 = 1$, и поэтому уравнение неразрывности (10) для плоскопараллельной фильтрации несжимаемой жидкости в пористой недеформируемой среде примет хорошо известный вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (H_2 V_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (H_1 V_\eta) = 0. \quad (13)$$

Вместо параметров Ламе в уравнение (13) часто вводят коэффициенты 1-ой квадратичной формы [40, 43, 61, 76, 117] $H_1 = \sqrt{E}$ и $H_2 = \sqrt{G}$ ортогональной криволинейной системы координат ξ и η , поэтому (13) записывают также в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\sqrt{G} V_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\sqrt{E} V_\eta) = 0. \quad (13')$$

Уравнение (13') будет тождественно выполнено, если $\sqrt{G} V_\xi$ и $\sqrt{E} V_\eta$ выразить через производные от одной и той же функции $\sqrt{G} V_\xi = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$, $\sqrt{E} V_\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$, или, что одно и то же,

$$V_\xi = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad V_\eta = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}. \quad (14)$$

Введённую на основании уравнения неразрывности функцию $\psi(\xi, \eta)$ называют функцией тока [86]. Основной её физический смысл в том, что вдоль траектории

плоскопараллельного движения жидких частиц $\psi = \text{const}$ [16, 43, 78, 86, 102, 108, 117 и др.]. Это свойство функции тока позволяет также сделать заключение о виде граничного условия на контуре непроницаемого тела. Т. к. контур ℓ непроницаемого тела сам является траекторией движения жидких частиц, скользящих вдоль него, то $\psi|_{\ell} = \text{const}$. Вторым важным свойством функции тока является то, что с её помощью просто вычисляется поток Π_{AB} вектора \bar{V} через любую ортогональную к плоскости течения цилиндрическую поверхность единичной высоты. А именно, если АВ – линия сечения этой цилиндрической поверхности с плоскостью течения, то тогда [16, 43, 173 и др.] $\Pi_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{d\psi}{dt} \right) dt = \psi_B - \psi_A$, т.е. поток вектора \bar{V} через линию, соединяющую точки А и В, равен разности значений функции тока на концах линии.

2.2. Уравнения линейной двумерной фильтрации несжимаемой жидкости в анизотропных искривлённых слоях переменной толщины

Впервые потенциальные движения идеальной несжимаемой жидкости, происходящие параллельно некоторой криволинейной поверхности, стали изучаться с 1878-1881 гг. в работах Е. Бельтрами [233], М. Хилла [238], А. Аллена [232], Н.А. Умова [211] и др. Работы этих авторов показали, что вопрос о потенциальном движении жидкости в весьма тонком слое постоянной толщины, расположенном на криволинейной поверхности, сводится с помощью конформного отображения к вопросу о потенциальном движении жидкости, параллельном плоскости. Через 70 лет начала заложенной в трудах этих авторов теории получили в 1950-х годах дальнейшее развитие и главным образом практические применения к задачам подземной гидромеханики в работах О.В. Голубевой [43] и П.Я. Полубариновой-Кочиной [107]. Далее теория двумерных течений жидкости в искривлённых бесконечно тонких слоях постоянной и переменной толщины с приложениями к задачам подземной гидромеханики стала развиваться в трудах учеников О.В. Голубевой: К.Н. Быстрова [23], Ю.А. Гладышева [32-34], М.И. Хмельника [214, 215], А.П. Черняева [255], В.Ф. Пивня [100, 101] и др. Независимо от школы

О.В. Голубевой фильтрация жидкости в круговых конических, параболоидальных и сферических весьма тонких пластах постоянной толщины изучалась В.П. Пилатовским [102], а также с позиций построения новых эффективных методов интегрирования системы уравнений двумерной фильтрации И.А. Амिरаслановым и Г.П. Черепановым [1]. Все процитированные работы объединяет то, что толщина искривлённого пласта в них считается бесконечно малой (по сравнению с наименьшим из главных радиусов кривизны подошвы слоя), а сам пласт – изотропным.

В диссертации впервые уравнения двумерной фильтрации жидкости выводятся для анизотропных искривлённых пластов постоянной и переменной конечной (а не бесконечно малой) толщины. Если в выведенных автором уравнениях толщину слоя устремить к нулю, то в пределе получаются уравнения движения, совпадающие с уравнениями теории О.В. Голубевой. Другая новизна, вытекающая из предлагаемой уточнённой теории двумерных фильтрационных течений в том, что не во всех однородных изотропных искривлённых пластах постоянной толщины (как это получается в процитированных работах) движения жидкости можно описать методами теории аналитических функций комплексного переменного.

2.2.1. Вывод уравнений двумерной фильтрации в ортогональных криволинейных системах координат общего вида. Будем моделировать непроницаемую подошву и кровлю искривлённого слоя переменной толщины, в котором изучается двумерная фильтрация несжимаемой жидкости, координатными поверхностями $\zeta = \zeta_1 = \text{const}$ и $\zeta = \zeta_2 = \text{const}$ некоторой ортогональной расчётной системы координат (РСК) ξ, η, ζ соответственно (рис. 3). Сам слой считается заполненным пористой анизотропной (в частном случае – изотропной) средой, у которой одно из ГНА всюду направлено по касательным к ζ - координатным линиям, а два других ГНА относительно ξ - и η - координатных линий имеют произвольную ориентацию. Требование, чтобы одно из ГНА среды совпадало с ζ - координатными линиями, приводит к тому, что в РСК ξ, η, ζ симметричный тензор проницаемости примет вид

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{12} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Если все три ГНА среды будут совпадать соответственно с ξ -, η - и ζ - координатными линиями, то тогда тензор K будет диагональным: $k_{ij}=0$, если $i \neq j$ и $k_{ii}=\lambda_i$. Анизотропная среда с тензором (1), у которой главные проницаемости $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = k_{33}$ вдоль ξ -, η -, ζ - координатных линий соответственно удовлетворяют условию $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$, может представлять модель слоистого грунта, со слоями, расположенными перпендикулярно к ζ - координатным поверхностям $\zeta = \text{const}$. Если главные проницаемости удовлетворяют условию $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то тензор K снова будет диагональным, причём $k_{11} = k_{22} = \lambda_1$, а $k_{33} = \lambda_3$. В этом случае анизотропная среда может представлять модель другого слоистого грунта, слои которого расположены на ζ - координатных поверхностях. В дальнейших выкладках исходим из тензора проницаемости общего вида (1) и считаем, что его компоненты в РСК (ξ, η, ζ) заданы.

Тензорный закон Дарси (1.3.9) для анизотропной среды с тензором проницаемости (1) приводит к следующему распределению проекций скорости фильтрации:

$$v_1 = \frac{k_{11}}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{k_{12}}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}; \quad v_2 = \frac{k_{12}}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{k_{22}}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}; \quad v_3 = \frac{k_{33}}{H_3} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}. \quad (2)$$

Подчеркнем, что компоненты тензора проницаемости $k_{11}, k_{12}, k_{22}, k_{33}$ и параметры Ламе H_1, H_2 и H_3 в формулах (2) в общем случае зависят от всех координат ξ, η, ζ . Поскольку сейчас рассматриваются двумерные течения, для которых ζ - координатные поверхности представляют поверхности тока, то проекция скорости $v_3=0$ и,

следовательно, $\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = 0$. Таким образом, одно из условий возможности существо-

вания двумерных течений в искривлённых анизотропных слоях переменной толщины заключается в том, что функция Φ , а значит и приведённое давление P , должны зависеть только от координат ξ и η , т.е. $\Phi = \Phi(\xi, \eta)$. Предполагая последнее

выполненным, из (2) получим следующее распределение проекций скорости фильтрации в искривлённом слое:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{k_{11}(\xi, \eta, \zeta)}{H_1(\xi, \eta, \zeta)} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{k_{12}(\xi, \eta, \zeta)}{H_2(\xi, \eta, \zeta)} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \\ v_2 = \frac{k_{12}(\xi, \eta, \zeta)}{H_1(\xi, \eta, \zeta)} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{k_{22}(\xi, \eta, \zeta)}{H_2(\xi, \eta, \zeta)} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \end{cases} \quad (3)$$

Кроме уравнений (3), поле скоростей несжимаемой жидкости $\bar{v} = v_1(\xi, \eta, \zeta)\bar{e}_1 + v_2(\xi, \eta, \zeta)\bar{e}_2$ должно удовлетворять уравнению неразрывности (1.2).

Если после подстановки (3) в (1.2) получится уравнение, не содержащее координаты ζ , т.е. уравнение для функции только двух переменных $\Phi(\xi, \eta)$, то это будет означать, что рассматриваемые двумерные течения действительно существуют в строгом математическом смысле. Но течения с заранее заданными поверхностями тока встречаются крайне редко – это лишь случаи плоскопараллельных течений и течений в сферическом слое [41], граничные поверхности которого имеют общий центр. Поэтому будем считать, что условие существования математически точных двумерных течений с заданными поверхностями тока $\zeta = \text{const}$ не выполняется. В связи с этим вместо (1.2) применим интегральное по толщине криволинейного слоя уравнение неразрывности (1.10). Подставляя в него выражения (3), для функции $\Phi(\xi, \eta)$ получим уравнение:

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{H_2 \cdot H_3}{H_1} \cdot k_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + H_3 \cdot k_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[H_3 \cdot k_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{H_1 \cdot H_3}{H_2} \cdot k_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] \right\} d\zeta = 0. \quad (4)$$

Выполняя в левой части (4) почленное интегрирование и учитывая независимость от ζ производных $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$, а также считая, что функции

$\frac{H_2 H_3}{H_1} k_{11}$; $H_3 k_{12}$; $\frac{H_1 H_3}{H_2} k_{22}$ имеют непрерывные частные производные во всей области фильтрации (вследствие чего операции дифференцирования по ξ , η и интегрирования по ζ будут перестановочными [61, 213]), для $\Phi(\xi, \eta)$ получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[T_{11}(\xi, \eta) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + T_{12}(\xi, \eta) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[T_{12}(\xi, \eta) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + T_{22}(\xi, \eta) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] = 0. \quad (5)$$

В уравнении (5) через $T_{11}(\xi, \eta)$, $T_{12}(\xi, \eta)$, $T_{22}(\xi, \eta)$ обозначены выражения

$$T_{11}(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left(\frac{H_2 \cdot H_3}{H_1} \cdot k_{11} \right) d\zeta; \quad T_{12}(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} (H_3 \cdot k_{12}) d\zeta; \quad T_{22}(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left(\frac{H_1 \cdot H_3}{H_2} \cdot k_{22} \right) d\zeta, \quad (6)$$

которые далее называем коэффициентами проводимости анизотропного искривлённого пласта. При решении конкретных задач уравнение (5) ламинарной фильтрации несжимаемой жидкости в искривлённых анизотропных пластах переменной толщины целесообразно рассматривать совместно с системой уравнений в частных

$$T_{11}(\xi, \eta) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + T_{12}(\xi, \eta) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}; \quad T_{12}(\xi, \eta) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + T_{22}(\xi, \eta) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad (7)$$

что позволяет применять методы теории обобщённых аналитических функций (И.Н. Векуа [28], L. Bers [234], L. Bers и A. Gelbart [235] и др.) к исследованию течений в искривлённых слоях конечной толщины. Взаимосвязь уравнения (5) с системой уравнений (7) обнаруживается при перекрёстном дифференцировании системы, которое приводит к уравнению (5) для функции $\Phi(\xi, \eta)$. Если в (7) перейти к новым переменным ξ_1 и η_1 , связанным с прежними ξ, η системой уравнений Бельтрами [143, 157]

$$\frac{T_{11} \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi} + T_{12} \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta}}{\sqrt{T_{11} T_{22} - T_{12}^2}} = \frac{\partial \eta_1}{\partial \eta}; \quad \frac{T_{12} \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi} + T_{22} \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta}}{\sqrt{T_{11} T_{22} - T_{12}^2}} = -\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi}, \quad (8)$$

то (7) примет канонический вид

$$p(\xi_1, \eta_1) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_1}; \quad p(\xi_1, \eta_1) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_1}, \quad \text{где } p(\xi_1, \eta_1) = \sqrt{T_{11} T_{22} - T_{12}^2} \quad (9)$$

системы для p -аналитической (по Г.Н. Положему [104, 105]) функции $\Phi(\xi_1, \eta_1) + i \cdot \Psi(\xi_1, \eta_1) = w(\zeta_1)$ комплексного переменного $\zeta_1 = \xi_1 + i \cdot \eta_1$. После перекрёстного дифференцирования системы (9) для функции $\Phi(\xi_1, \eta_1)$ получается следующее каноническое уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[p(\xi_1, \eta_1) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left[p(\xi_1, \eta_1) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1} \right] = 0. \quad (10)$$

Таким образом, в общем случае в плоскости вспомогательных переменных ξ_1, η_1 течения в искривлённых анизотропных пластах описываются комплексными по-

тенциалами $w(\zeta_1)$, являющимися p -аналитическими функциями Г.Н.Положего [104, 105].

Отметим теперь два важных следствия, вытекающих из (5), (6), (9) и (10).

Следствие 1. Если выражение $T_{11} \cdot T_{22} - T_{12}^2 = \text{const}$, то, как видно из (9) и (10), в плоскости вспомогательного комплексного переменного $\zeta_1 = \xi_1 + i \cdot \eta_1$ функция $\Phi(\xi_1, \eta_1)$ будет удовлетворять уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta_1^2} = 0$. Поэтому во всех тех частных случаях, когда $T_{11} \cdot T_{22} - T_{12}^2 = \text{const}$, для описания линейной двумерной фильтрации в таких слоях можно применять методы теории аналитических функций комплексного переменного. Далее приведены конкретные примеры таких слоёв (это плоскопараллельные, сферические и круговые цилиндрические слои, заполненные однородной изотропной средой).

Следствие 2. Рассмотрим теперь настолько тонкие искривлённые слои переменной толщины (приближение О.В. Голубевой), в которых можно пренебречь изменениями параметров Ламе по толщине слоя (по координате ζ) и принять их равными своим значениям на подошве слоя, т.е.

$$N_1 = N_1(\xi, \eta, \zeta_1) = h_1(\xi, \eta); \quad N_2 = N_2(\xi, \eta, \zeta_1) = h_2(\xi, \eta); \quad N_3 = N_3(\xi, \eta, \zeta_1) = \frac{H(\xi, \eta)}{\zeta_2 - \zeta_1}. \quad (11)$$

Значение третьего параметра Ламе $N_3(\xi, \eta, \zeta_1)$ в формулах (11) из соображений геометрической наглядности выражено через длину $H(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} N_3(\xi, \eta, \zeta_1) d\zeta$ дуги ζ - координатной линии, заключённой между кровлей и подошвой слоя. Поэтому величину $H(\xi, \eta)$ в первом приближении можно рассматривать как толщину криволинейного слоя в точке (ξ, η) . Для выполнения условий (11) толщина пласта $H(\xi, \eta)$ в любой его точке должна быть намного меньше главных радиусов $R_{1\text{кр}}$ и $R_{2\text{кр}}$ кривизны подошвы и кровли слоя. О таких пластах, следуя О.В. Голубевой [41, 43], будем говорить как о бесконечно тонких.

Пусть для бесконечно тонкого искривлённого слоя переменной толщины $H(\xi, \eta)$ выполнены условия (11) и, кроме того, компоненты тензора проницаемости k_{ij} не зависят (т.к. слой бесконечно тонкий) от ζ . Тогда после подстановки пара-

метров Ламе из (11) в формулы (6) для коэффициентов проводимости искривлённого бесконечно тонкого пласта получим значения:

$$T_{11} = \frac{h_2(\xi, \eta)}{h_1(\xi, \eta)} \cdot H(\xi, \eta) \cdot k_{11}(\xi, \eta); T_{12} = H(\xi, \eta) \cdot k_{12}(\xi, \eta); T_{22} = \frac{h_1(\xi, \eta)}{h_2(\xi, \eta)} \cdot H(\xi, \eta) \cdot k_{22}(\xi, \eta). \quad (12)$$

После подстановки (12) в (5) для $\Phi(\xi, \eta)$ получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h_2}{h_1} \cdot H \cdot k_{11} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + H \cdot k_{12} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[H \cdot k_{12} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{h_1}{h_2} \cdot H \cdot k_{22} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] = 0. \quad (13)$$

Заметим, что из формул (12) вытекает следующее равенство: $T_{11} \cdot T_{22} - T_{12}^2 = H^2 \cdot (k_{11} \cdot k_{22} - k_{12}^2)$. Поэтому если 1) толщина искривлённого слоя постоянна, $H = \text{const}$ и 2) слой заполнен однородной анизотропной (в частности, однородной изотропной ($k_{11} = k_{22} = k = \text{const}$, $k_{12} = 0$)) средой, для которой $k_{11} \cdot k_{22} - k_{12}^2 = \text{const}$, то тогда $T_{11} \cdot T_{22} - T_{12}^2 = \text{const}$, и на основании следствия 1 приходим к выводу: двумерные течения в любом бесконечно тонком однородном анизотропном (в частности, изотропном) искривлённом слое постоянной толщины описываются аналитическими функциями комплексного переменного.

В работах самой О.В. Голубевой и её учеников рассматривались бесконечно тонкие неоднородные изотропные слои с переменной толщиной, причём на подшве искривлённого слоя выбирались изотермические координаты, для которых параметры Ламе h_1 и h_2 оказываются одинаковыми, т.е. $h_1 = h_2$. Поэтому течения в искривлённых изотропных бесконечно тонких слоях переменной толщины в теории О.В. Голубевой рассчитываются с помощью уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[p(\xi, \eta) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[p(\xi, \eta) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] = 0, \quad (14)$$

которое вытекает как частный случай из (13) при $h_1 = h_2$, $k_{12} = 0$, $k_{11} = k_{22} = k$, и $p(\xi, \eta) = H(\xi, \eta) \cdot k(\xi, \eta)$. Сравнивая (10) и (14), видим, что каноническое уравнение (10) для Φ в предложенной уточнённой теории двумерных течений в искривлённых анизотропных слоях конечной толщины и уравнение О.В. Голубевой (14) для течений в бесконечно тонких изотропных искривлённых слоях имеют одинаковый вид. Тем не менее между этими уравнениями большая разница, т.к. уравнение (10) записано для вспомогательных переменных и для искривлённых анизотропных

слоёв конечной толщины, а (14) записано в координатах физической области течения и для бесконечно тонких искривлённых изотропных слоёв.

Укажем ещё способ расчёта коэффициентов проводимости для анизотропных искривлённых слоёв с постоянной конечной толщиной H .

2.2.2. Расчёт коэффициентов проводимости для двумерной фильтрации в анизотропных искривлённых слоях постоянной конечной толщины.

Пусть подошва F_1 криволинейного слоя задана параметрически с помощью ортогональных на ней координат ξ и η уравнением вида $\vec{R} = \vec{R}_0(\xi, \eta)$ (рис.5).

Определение. Криволинейный слой будем называть слоем постоянной толщины, если его кровля F_2 представляет геометрическое место концов отрезков постоянной длины, отложенных на нормалях к подошве слоя F_1 (рис. 5).

В дифференциальной геометрии такие поверхности F_1 и F_2 называют параллельными криволинейными поверхностями.

Для того чтобы получить уравнение кровли F_2 , предварительно находим координаты вектора единичной нормали \vec{n} к подошве F_1 по формуле

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{R}_0}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{R}_0}{\partial \eta}}{\left| \frac{\partial \vec{R}_0}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{R}_0}{\partial \eta} \right|}. \quad (15)$$

Радиус-вектор внутренней точки M криволинейного слоя, как видно из рис. 5, найдётся по формуле

$$\vec{R}(\xi, \eta, \zeta) = \vec{R}_0(\xi, \eta) + \zeta \cdot H \cdot \vec{n}, \quad (16)$$

где $0 \leq \zeta \leq 1$. Уравнение (16) при $\zeta = 0$ даст уравнение подошвы F_1 , а при $\zeta = 1$ – кровли F_2 слоя. Важно заметить, что для криволинейных поверхностей F_1 , относящихся либо к поверхностям вращения, либо к цилиндрическим поверхностям, формулы (15) и (16) приводят к ортогональным криволинейным координатам ξ, η, ζ .

Приведём конкретные примеры расчёта коэффициентов проводимости для двумерной фильтрации в слоях постоянной толщины.

Пример 1. Слои вращения. Поверхность вращения F_1 (когда ось вращения совпадает с осью z) задаётся параметрически уравнением вида:

$$\vec{R}_0(\xi, \eta) = r(\xi) \cdot (\cos \eta \cdot \vec{i} + \sin \eta \cdot \vec{j}) + z(\xi) \cdot \vec{k}. \quad (17)$$

Геометрический смысл параметров ξ, η и функций $r(\xi), z(\xi)$ в уравнении (17) показан на рис. 6. С помощью формул (15), (16) и (17) находим следующие уравнения связи между декартовыми x, y, z и криволинейными ξ, η, ζ координатами точек слоя вращения постоянной толщины:

$$x = f_1(\xi, \zeta) \cdot \cos \eta; \quad y = f_1(\xi, \zeta) \cdot \sin \eta; \quad z = f_2(\xi, \zeta), \quad (18)$$

где

$$\begin{cases} f_1(\xi, \zeta) = r(\xi) - \frac{\zeta \cdot H \cdot z'(\xi)}{\sqrt{E(\xi)}}; & f_2(\xi, \zeta) = z(\xi) + \frac{\zeta \cdot H \cdot r'(\xi)}{\sqrt{E(\xi)}}; \\ E(\xi) = (r'(\xi))^2 + (z'(\xi))^2 \end{cases} \quad (19)$$

(Знаком «штрих» обозначено дифференцирование по ξ). Можно непосредственной проверкой убедиться, что в области рассматриваемого слоя вращения постоянной толщины H координаты ξ, η, ζ ортогональны. С помощью формул (18) и (19) получаем следующие выражения для параметров Ламе:

$$H_1 = \sqrt{\zeta^2 \cdot H^2 \cdot A^2(\xi) + 2\zeta \cdot H \cdot B(\xi) + E(\xi)}; \quad H_2 = |f_1(\xi, \zeta)|; \quad H_3 = H = \text{const}, \quad (20)$$

где

$$A^2(\xi) = \left[\left(\frac{r'(\xi)}{\sqrt{E(\xi)}} \right)' \right]^2 + \left[\left(\frac{z'(\xi)}{\sqrt{E(\xi)}} \right)' \right]^2, \quad B(\xi) = z'(\xi) \cdot \left(\frac{r'(\xi)}{\sqrt{E(\xi)}} \right)' - r'(\xi) \cdot \left(\frac{z'(\xi)}{\sqrt{E(\xi)}} \right)'. \quad (21)$$

Теперь по формулам (6) можно будет вычислить коэффициенты проводимости криволинейного слоя вращения постоянной толщины и записать затем конкретный вид уравнения (5) для двумерной фильтрации в нём.

К примеру, когда подошва F_1 представляет собой сферу радиуса R_1 , функции $r(\xi)$ и $z(\xi)$ в формуле (17) имеют вид $r(\xi) = R_1 \sin \xi$; $z(\xi) = R_1 \cos \xi$. В соответствии с (17)-(21) получаем, что $H_1 = R_1 + \zeta H$; $H_2 = (R_1 + \zeta H) \sin \xi$; $H_3 = H$. Коэффициенты проводимости для однородного изотропного сферического слоя постоянной толщины H на основании (6) и (18)-(21), равны: $T_{11} = k \cdot H \cdot \sin \xi$; $T_{12} = 0$; $T_{22} = \frac{kH}{\sin \xi}$.

Уравнение (5) для однородного сферического изотропного слоя постоянной толщины с найденными коэффициентами проводимости примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sin \xi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\sin \xi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0. \quad (22)$$

С помощью замены переменной ξ на $\xi_1 = \ell n \left| \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right|$ уравнение (22) сводится к уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0$. Следовательно, для исследования всевозможных течений в однородных изотропных сферических слоях конечной толщины можно применять методы теории аналитических функций комплексного переменного. В подавляющем большинстве других слоёв вращения постоянной конечной толщины $T_{11} \cdot T_{22} - T_{12}^2 \neq \text{const}$, и поэтому необходимо будет применять для изучения в них двумерной фильтрации методы теории обобщённых аналитических функций.

Пример 2. Цилиндрические слои постоянной толщины. В этих слоях (рис. 7) образующие подошвы и кровли параллельны горизонтальной оси x декартовой системы x, y, z (ось z направлена вертикально вверх). Параметрическое уравнение $\vec{r}_0(\alpha)$ линии пересечения подошвы $\zeta = 0$ слоя с плоскостью uoz считаем заданным в виде

$$\vec{r}_0(\alpha) = f(\alpha)\vec{j} + g(\alpha)\vec{k}. \quad (23)$$

Тогда радиус-векторы $\vec{r}(\alpha, \zeta)$ точек слоя в плоскости uoz можно определить по формуле (рис. 7) $\vec{r}(\alpha, \zeta) = \vec{r}_0(\alpha) + \zeta \cdot N \cdot \vec{n}$, где N – постоянная толщина слоя, \vec{n} – единичный вектор нормали к линии (23) и ζ – безразмерная координата, $0 \leq \zeta \leq 1$. Радиус-векторы $\vec{R}(x, \alpha, \zeta)$ любой точки цилиндрического слоя, сечение которого дано на рис. 7, определим по формуле $\vec{R}(x, \alpha, \zeta) = x \cdot \vec{i} + \vec{r}(\alpha, \zeta)$. Вычислив координаты вектора \vec{n} по формуле (15) (в которой полагаем $\xi = x$ и $\eta = \alpha$) и пользуясь двумя последними формулами, для координат x, y, z точек рассматриваемого цилиндрического слоя следующие выражения:

$$x = x; \quad y = f(\alpha) - \zeta \cdot N \cdot \frac{g'(\alpha)}{\sqrt{E(\alpha)}}; \quad z = g(\alpha) + \zeta \cdot N \cdot \frac{f'(\alpha)}{\sqrt{E(\alpha)}}, \quad (24)$$

где $E(\alpha) = [f'(\alpha)]^2 + [g'(\alpha)]^2$. (Штрих ' обозначает дифференцирование по α). С помощью равенств (24) можно убедиться, что криволинейные координаты x, α, ζ ортогональные. Для координат x, α, ζ параметры Ламе оказываются равными

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \sqrt{\zeta^2 \cdot H^2 \cdot A^2(\alpha) + 2\zeta \cdot H \cdot B(\alpha) + E(\alpha)}, \quad H_3 = H = \text{const}, \quad (25)$$

где

$$A^2(\alpha) = \left[\left(\frac{f'(\alpha)}{\sqrt{E(\alpha)}} \right)' \right]^2 + \left[\left(\frac{g'(\alpha)}{\sqrt{E(\alpha)}} \right)' \right]^2, \quad B(\alpha) = g'(\alpha) \cdot \left(\frac{f'(\alpha)}{\sqrt{E(\alpha)}} \right)' - f'(\alpha) \cdot \left(\frac{g'(\alpha)}{\sqrt{E(\alpha)}} \right)'. \quad (26)$$

Теперь с помощью найденных параметров Ламе по формулам (6) и (23)–(26) можно вычислить коэффициенты проводимости цилиндрических слоёв постоянной толщины.

Например, для кругового цилиндрического слоя с радиусами подошвы и кровли R_1 и R_2 и с толщиной $H = R_2 - R_1$ уравнение (23) имеет вид: $\vec{e}_0 = R_1(\sin \alpha \cdot \vec{j} + \cos \alpha \cdot \vec{k})$, угол α отсчитываем от оси z по ходу часовой стрелки. Тогда в соответствии с (23), (25), (26) получим, что $H_2 = R_1 + \zeta \cdot H$. Поэтому для кругового цилиндрического пласта постоянной толщины, заполненного однородной изотропной ($k = \text{const}$) пористой средой, коэффициенты проводимости T_1 и T_2 в соответствии с (6) оказываются равными следующим постоянным значениям: $T_1 = \frac{1}{2}k \cdot (R_2^2 - R_1^2)$ и $T_2 = k \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$. Уравнение (5) для кругового однородного изотропного цилиндрического слоя постоянной толщины примет вид

$$T_1 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + T_2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0. \quad (27)$$

Если в (27) перейти к безразмерной переменной $x_1 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \cdot x$, то оно преобразуется

к уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$. Поэтому для описания двумерной фильтрации

в однородных круговых изотропных цилиндрических слоях постоянной толщины могут быть применены методы теории аналитических функций комплексного пе-

ременного, чего нельзя сказать по отношению к произвольному цилиндрическому слою постоянной конечной толщины.

2.3. Уравнения плоскопараллельных фильтрационных течений несжимаемой жидкости в анизотропно-неоднородных средах и их связь с обобщёнными аналитическими функциями комплексного переменного

В теории фильтрации важную роль в теоретическом и прикладном аспектах играют плоскопараллельные фильтрационные течения, которые представляют частный случай описанных в §2.2 двумерных. Плоскопараллельные фильтрационные течения жидкости существуют, если: 1) пласт ограничен плоскими параллельными непроницаемыми подошвой ($\zeta = \zeta_1 = 0$) и кровлей ($\zeta = \zeta_2 = H$, где H – толщина слоя), 2) одно из ГНА пористой среды в пласте всюду перпендикулярно к его подошве (кровле) и 3) все компоненты тензора проницаемости K зависят лишь от ортогональных координат ξ и η подошвы пласта.

Для ортогональных цилиндрических систем координат ξ, η, ζ (с перпендикулярной к подошве пласта осью ζ) параметры Ламе имеют вид: $H_1 = \sqrt{E(\xi, \eta)}$; $H_2 = \sqrt{G(\xi, \eta)}$; $H_3 = H$, где $E(\xi, \eta)$ и $G(\xi, \eta)$ – коэффициенты 1-ой квадратичной формы для ξ, η . Поэтому по формулам (2.6) для коэффициентов проводимости анизотропного неоднородного плоскопараллельного пласта получим следующие значения:

$$T_{11} = \sqrt{\frac{G}{E}} \cdot k_{11} \cdot H; \quad T_{12} = k_{12} \cdot H; \quad T_{22} = \sqrt{\frac{E}{G}} \cdot k_{22} \cdot H. \quad (1)$$

Система уравнений (2.7) с найденными коэффициентами (1) примет вид

$$\sqrt{\frac{G}{E}} \cdot k_{11} \cdot H \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + k_{12} \cdot H \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}; \quad k_{12} \cdot H \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \sqrt{\frac{E}{G}} \cdot k_{22} \cdot H \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad (2)$$

которую, однако, выгоднее переписать в другой, симметричной по отношению к координатам ξ и η форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_{11}}{\sqrt{E}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{k_{12}}{\sqrt{G}} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \\ \frac{k_{12}}{\sqrt{E}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{k_{22}}{\sqrt{G}} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \end{aligned} \right\}, \quad \text{где } \psi = \frac{1}{H} \cdot \Psi. \quad (2')$$

К этой же системе (2') в рассматриваемом случае приводит сравнение проекций скоростей фильтрации из тензорного закона Дарси (2.3)

$$v_{\xi} = \frac{k_{11}}{\sqrt{E}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{k_{12}}{\sqrt{G}} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}; \quad v_{\eta} = \frac{k_{12}}{\sqrt{E}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{k_{22}}{\sqrt{G}} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \quad (3)$$

с таковыми же (1.14), выраженными через функцию тока течения ψ . Таким образом, в случае плоскопараллельных течений предложенная в §2.2 общая теория двумерной фильтрации приводит к тем же результатам, что и классический подход.

Система уравнений (2) (а значит и (2')) приводится к каноническому виду при помощи частных решений системы (2.8). После подстановки в (2.8) коэффициентов проводимости (1) и тождественных преобразований система (2.8) запишется в виде

$$\frac{k_{11}}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi} + \frac{k_{12}}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta} = \frac{\sqrt{I_2}}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial \eta_1}{\partial \eta}; \quad \frac{k_{12}}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi} + \frac{k_{22}}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta} = -\frac{\sqrt{I_2}}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi}, \quad (4)$$

где I_2 – инвариант (1.3.8) тензора проницаемости

$$I_2 = k_{11} \cdot k_{22} - k_{12}^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2. \quad (5)$$

Система (2) путём перехода к новым переменным ξ_1, η_1 , удовлетворяющим (4), приводится к каноническому виду (2.9), который сейчас запишется следующим образом:

$$H \cdot \sqrt{I_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_1}; \quad H \cdot \sqrt{I_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_1}. \quad (6)$$

Канонический вид системы уравнений (2') немедленно вытекает из (6) после подстановки в неё выражения связи $\Psi = H \cdot \psi$, что приводит к следующей системе:

$$\sqrt{I_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta_1}; \quad \sqrt{I_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1}. \quad (6')$$

Система уравнений (6') совпадает с условиями р-аналитичности обобщённых аналитических функций Г.Н. Положего [104, 105]. Таким образом, плоско-

параллельные фильтрационные течения в рассматриваемых анизотропных средах описываются p -аналитическими функциями с характеристикой $p = \sqrt{I_2} = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$. Заметим ещё, что систему (6') можно трактовать как систему уравнений, описывающую плоскопараллельные фильтрационные течения на вспомогательной плоскости с декартовыми координатами ξ_1, η_1 в неоднородной изотропной среде с проницаемостью k , равной характеристике $p = \sqrt{I_2} = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$. Целесообразность такой трактовки [144, 157, 168] замены независимых переменных вытекает из того, что неортогональная сеть $\Phi = \text{const}, \psi = \text{const}$ течения в анизотропном грунте переходит в ортогональную сеть на вспомогательной плоскости ξ_1, η_1 . Последнее позволяет строить гидродинамические сетки плоскопараллельных течений в неоднородных анизотропных средах по ортогональным гидродинамическим сеткам сходных течений в неоднородных изотропных средах с проницаемостью $k = \sqrt{I_2} = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$.

2.4. Уравнения плоскопараллельных фильтрационных течений несжимаемой жидкости в анизотропно-однородных средах и их связь с аналитическими функциями комплексного переменного

Снова, как и в §2.3, рассматриваем плоскопараллельные течения несжимаемой жидкости в анизотропных средах, в которых одно из ГНА всюду перпендикулярно к плоскости течения. Но в отличие от предыдущего §2.3 рассмотрим случай, когда главные проницаемости $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ анизотропной среды постоянны. Тогда инвариант тензора проницаемости $I_2 = k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = \lambda_1 \lambda_2 = \text{const}$. С учётом этого замечания систему уравнений движения (3.2') можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{E}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{b}{\sqrt{G}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \\ \frac{b}{\sqrt{E}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{c}{\sqrt{G}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

в котором применены обозначения

$$a = \frac{k_{11}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} ; \quad b = \frac{k_{12}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} ; \quad c = \frac{k_{22}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} , \quad \left(\text{причём, заметим, } a \cdot c - b^2 \equiv 1 \right) \quad (2)$$

и

$$\varphi(\xi, \eta) = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot \Phi = -\frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot P}{\mu} = -\frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot (p + \rho gh)}{\mu}. \quad (3)$$

Система уравнений (3.4) в рассматриваемом случае $I_2 = \lambda_1 \lambda_2 = \text{const}$ совпадает с системой (1). Поэтому систему (1) можно привести к каноническому виду с помощью перехода к новым независимым переменным ξ_1, η_1 , которые выбираются из частных решений самой же системы (1). Каноническая форма (3.6') системы (1) ввиду постоянства инварианта I_2 и равенства (3) принимает вид условий Коши-Римана $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta_1}$; $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1}$. Поэтому все решения $\varphi(\xi, \eta)$ и $\psi(\xi, \eta)$ системы (1) выражаются через аналитические функции

$$\varphi(\xi, \eta) + i \cdot \psi(\xi, \eta) = w(\zeta) \quad (4)$$

комплексного переменного $\zeta = \xi_1 + i \cdot \eta_1$, где ξ_1 и η_1 - некоторые частные решения самой же системы (1). Такой вывод о решениях системы (1), являющейся ввиду тождества $a \cdot c - b^2 \equiv 1$ системой Бельтрами, совпадает с общей теорией этих систем [20]. Далее аналитическую функцию $w(\zeta)$ называем комплексным потенциалом плоскопараллельного течения в однородной анизотропной среде.

В заключение отметим, что если комплексный потенциал течения $w(\zeta)$ найден и, тем самым, функции $\varphi(\xi, \eta)$ и $\psi(\xi, \eta)$ определены, то тогда поле скоростей фильтрации вычислим через $\varphi(\xi, \eta)$ по формулам (3.3), которые с учётом равенств (2) и (3) переписутся в виде

$$v_\xi = \frac{a}{\sqrt{E}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{b}{\sqrt{G}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} ; \quad v_\eta = \frac{b}{\sqrt{E}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{c}{\sqrt{G}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \quad (5)$$

а через $\psi(\xi, \eta)$ - по формулам (1.14).

2.5. Комплексные потенциалы плоскопараллельных фильтрационных течений в анизотропно-однородных средах со специальными законами распределения ГНА

2.5.1. Теорема о комплексном потенциале для специальной серии законов распределения ГНА. Выберем в плоскости плоскопараллельного фильтрационного течения в однородной анизотропной среде изотермические криволинейные координаты ξ и η . Такие координаты задаются при помощи некоторой аналитической функции $\omega(z)$ комплексного переменного $z = x + i \cdot y$ (где x и y – декартовы координаты) формулой [41, 44]

$$\xi(x, y) + i \cdot \eta(x, y) = \omega(z). \quad (1)$$

Одно из ГНА пористых сред, в которых изучаются течения жидкости, по-прежнему расположено перпендикулярно к плоскости течения, а законы распределения двух других ГНА определим при помощи семейств попарно-ортогональных кривых $p(\xi, \eta) = \text{const}$ и $q(\xi, \eta) = \text{const}$. Эти функции $p(\xi, \eta)$ и $q(\xi, \eta)$, определяющие всевозможные законы распределения ГНА, будем задавать при помощи равенств

$$p(\xi, \eta) = \alpha \xi - \beta \int_{\eta_0}^{\eta} H(\eta) d\eta, \quad q(\xi, \eta) = \beta \xi + \alpha \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{H(\eta)}, \quad (2)$$

где α и β – произвольные одновременно не равные нулю постоянные, а $H(\eta)$ – произвольная положительная непрерывная функция, геометрический смысл которой в том, что она определяет угол γ пересечения линий $q(\xi, \eta) = \text{const}$ с координатными линиями $\eta = \text{const}$:

$$\text{tg } \gamma = -\frac{\beta}{\alpha} H(\eta). \quad (3)$$

Для данного класса анизотропных сред компоненты тензора проницаемости в изотермических координатах $(\xi; \eta)$ примут, согласно формуле (1.3.6), значения

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{\alpha^2 \lambda_1 + \beta^2 H^2(\eta) \lambda_2}{\alpha^2 + \beta^2 H^2(\eta)} = k_{11}(\eta), & k_{12} = k_{21} &= \frac{\alpha \beta H(\eta) (\lambda_2 - \lambda_1)}{\alpha^2 + \beta^2 H^2(\eta)} = k_{12}(\eta), \\ k_{22} &= \frac{\beta^2 H^2(\eta) \lambda_1 + \alpha^2 \lambda_2}{\alpha^2 + \beta^2 H^2(\eta)} = k_{22}(\eta) & (k_{11} k_{22} - k_{12}^2 &= \lambda_1 \lambda_2 = \text{const}; \lambda_1 \text{ и } \lambda_2 - \text{ постоянные}) \end{aligned} \quad (4)$$

Комплексные потенциалы плоскопараллельных фильтрационных течений в анизотропно-однородных средах представляют собой, как доказано в §2.4, аналитические функции комплексного переменного $\zeta = \xi_1 + i \cdot \eta_1$, действительная ξ_1 и мнимая η_1 части которого удовлетворяют системе уравнений (4.1). Решения системы уравнений (4.1) благодаря тому, что компоненты тензора проницаемости (4) зависят только от одной переменной η и $\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} = \text{const}$, удаётся построить с помощью операции Σ - интегрирования Берса и Гельбарта [234, 235]. В частности, как легко проверить, решениями ξ_1 и η_1 системы (4.1) будут функции

$$\xi_1 = \xi - \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{k_{12}(\eta)}{k_{22}(\eta)} d\eta = \xi - \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\alpha \beta H(\eta)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\beta^2 H^2(\eta) \lambda_1 + \alpha^2 \lambda_2} d\eta; \quad (5)$$

$$\eta_1 = \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{k_{22}(\eta)} d\eta = \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} (\alpha^2 + \beta^2 H^2(\eta))}{\beta^2 H^2(\eta) \lambda_1 + \alpha^2 \lambda_2} d\eta. \quad (6)$$

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы: *аргумент $\zeta = \xi_1 + i \cdot \eta_1$ комплексных потенциалов $\varphi(\xi, \eta) + i \cdot \psi(\xi, \eta) = w(\zeta)$ плоскопараллельных фильтрационных течений в однородных анизотропных средах, законы распределения ГНА в которых задаются формулами (2), определяется по формулам (5) и (6).*

Формулы (5) и (6) исчерпывают весь запас известных случаев (В.И. Аравин [2-6], Е.С. Ромм [120, 121], Г.К. Михайлов [90], Н.Р. Рабинович [113] и др.), когда плоскопараллельные течения в анизотропно-однородных средах исследуются методами аналитических функций комплексного переменного с помощью «изотропизирующих» подстановок.

Отметим ряд следствий, вытекающих из сформулированной теоремы.

2.5.2. Следствие 1. Конгруэнтные законы распределения ГНА

Определение 1. *Средами с конгруэнтными законами распределения ГНА будем называть грунты, в которых все кривые одного из двух семейств линий, определяющих ГНА, пересекают любую прямую ℓ из некоторого семейства L параллельных прямых под одним и тем же углом $\gamma(\ell)$.*

Плоскопараллельную фильтрацию в этих средах будем изучать в декартовой системе координат x, y , ось x которой совмещена с одной из прямых ℓ из семейства L . Поэтому функцию $\omega(z)$ в (1) задаём в виде $\omega(z) = z$ и, следовательно, $\xi = x$ и $\eta = y$. Уравнения $p(x, y) = \text{const}$ и $q(x, y) = \text{const}$ ортогональных ГНА сред с конгруэнтной анизотропией в декартовой системе координат в соответствии с (2) определяются при помощи формул

$$p(x, y) = \alpha x - \beta \int H(y) dy \quad ; \quad q(x, y) = \beta x + \alpha \int \frac{dy}{H(y)}. \quad (7)$$

Эти формулы обобщают закон распределения ГНА, именуемый прямолинейной анизотропией, который получается из (7) при $H(y) = 1$. Формулы (5) и (6), определяющие аргумент $\zeta = \xi_1 + i \cdot \eta_1$ комплексного потенциала для сред с конгруэнтными законами распределения ГНА, дадут выражения

$$\xi_1 = x + \int_0^y \frac{\alpha \beta H(y) (\lambda_1 - \lambda_2)}{\alpha^2 \lambda_2 + \beta^2 H^2(y) \lambda_1} dy \quad ; \quad \eta_1 = \int_0^y \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} [\alpha^2 + \beta^2 H^2(y)]}{\alpha^2 \lambda_2 + \beta^2 H^2(y) \lambda_1} dy. \quad (8)$$

2.5.3. Следствие 2. Центральнo-симметричные законы распределения ГНА

Определение 2. *Средами с центрально-симметричными законами распределения ГНА будем называть грунты, в которых все кривые одного из двух семейств линий ГНА, сходясь в некоторой точке C , пересекают любую окружность с радиусом r и с центром в C под одним и тем же углом $\gamma(r)$.*

Плоскопараллельную фильтрацию в этих средах удобно изучать в полярной системе координат r, θ полюс которой совмещен с точкой C . Именно поэтому функцию (1) сейчас зададим в виде $\omega(z) = i \cdot \ln z$ и, следовательно, $\xi = -\theta$, а $\eta = \ln r$. Учитывая, что в рассматриваемом случае $d\eta = \frac{dr}{r}$, а $d\xi = -d\theta$, уравнения (4) ортогональных криволинейных линий $p(r, \theta) = \text{const}$ и $q(r, \theta) = \text{const}$ ГНА в полярных координатах примут вид

$$p(r, \theta) = \alpha \int \frac{H(r)}{r} dr - \beta \theta \quad ; \quad q(r, \theta) = \beta \int \frac{dr}{rH(r)} + \alpha \theta. \quad (9)$$

(Постоянные в (2) для удобства были сейчас переобозначены по схеме: α, β в (2) \rightarrow $\beta, -\alpha$ в (9), что, конечно, не существенно). Формулы (5) и (6) (с учётом принятой

схемы переобозначений постоянных α, β) для аргумента $\zeta = \xi_1 + i \cdot \eta_1$ комплексного потенциала течений в средах с центрально-симметричными законами распределения ГНА дадут выражения

$$\xi_1 = \int_{r_0}^r \frac{\alpha\beta \cdot H(r) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot dr}{r \cdot [\alpha^2 H^2(r) \cdot \lambda_1 + \beta^2 \cdot \lambda_2]} - \theta ; \quad \eta_1 = \int_{r_0}^r \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot [\alpha^2 H^2(r) + \beta^2] \cdot dr}{r \cdot [\alpha^2 H^2(r) \cdot \lambda_1 + \beta^2 \cdot \lambda_2]} . \quad (10)$$

Однако комплексные потенциалы $w(\zeta)$ плоскопараллельных течений в рассматриваемых средах удобнее строить не с помощью аргумента ζ , а с помощью вспомогательного комплексного переменного $Z(\zeta)$, которое определим равенством $Z = r_0 \cdot e^{-i\zeta}$. С учётом формул (10) для аргумента $\zeta = \xi_1 + i \cdot \eta_1$ вспомогательное переменное $Z = r_0 \cdot e^{-i\zeta}$ будет определяться по формуле

$$Z = R(r) \cdot e^{i\omega(r, \theta)} , \quad (11)$$

где

$$R(r) = r_0 \cdot e^{\eta_1} = r_0 \cdot \exp \left(\int_{r_0}^r \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} [\alpha^2 H^2(r) + \beta^2] \cdot dr}{r \cdot [\alpha^2 H^2(r) \cdot \lambda_1 + \beta^2 \cdot \lambda_2]} \right) ; \quad \omega(r, \theta) = \theta - \int_{r_0}^r \frac{\alpha\beta H(r) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot dr}{r \cdot [\alpha^2 H^2(r) \cdot \lambda_1 + \beta^2 \cdot \lambda_2]} . \quad (12)$$

Удобство применения в решении конкретных задач комплексного переменного Z объясняется тем, что на окружности $x^2 + y^2 = r_0^2$ переменное Z совпадает с обычным комплексным переменным $x + i \cdot y$, т.е. $Z|_{r=r_0} = r_0 \cdot e^{i\theta}$, что непосредственно следует из (11) и (12). Итак, комплексные потенциалы плоскопараллельных течений в средах с центрально-симметричными законами распределения ГНА (9) будут определяться по формуле $\varphi(r, \theta) + i \cdot \psi(r, \theta) = w(Z)$, где $w(Z)$ – произвольная аналитическая функция комплексного переменного Z , определяемого формулами (11) и (12).

2.5.4. Следствие 3. Изотермические законы распределения ГНА

Определение 3. *Средами с изотермическими законами распределения ГНА будем называть грунты, в которых ГНА в каждой точке (x, y) направлены по касательным к линиям уровня двух сопряжённых [78] гармонических функций $p(x, y)$ и $q(x, y)$.*

В соответствии с определением 3 задание конкретного изотермического закона распределения ГНА определяется выбором некоторой аналитической функции

$$p(x, y) + i \cdot q(x, y) = \omega(z) \quad (13)$$

комплексного переменного $z = x + i \cdot y$. Плоскопараллельную фильтрацию в средах с изотермическими законами распределения ГНА удобно изучать в криволинейной системе координат (ξ, η) , совмещённой с ГНА (13). Совмещение системы координат (ξ, η) с ГНА (13) достигается выбором в формулах (2) функции $H(\eta) = 1$ и постоянных $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и $\eta_0 = 0$. Тогда $\xi = p(x, y)$ и $\eta = q(x, y)$. Для построения комплексных потенциалов плоскопараллельных фильтрационных течений в рассматриваемых средах остаётся определить аргумент $\zeta = \xi_1 + i \cdot \eta_1$. В соответствии с формулами (5) и (6) в рассматриваемом случае получаем, что $\xi_1 = \xi = p(x, y)$ и $\eta_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \eta = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot q(x, y)$. Таким образом, комплексные потенциалы плоскопараллельных течений в средах с изотермическими законами распределения ГНА (13) будут определяться по формуле

$$\varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y) = w(\zeta), \quad \text{где } \zeta = p(x, y) + i \cdot \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot q(x, y). \quad (14)$$

Ранее конкретные задачи линейной плоскопараллельной фильтрации, главным образом, в средах с прямолинейной ($\omega(z) = z$) и радиальной ($\omega(z) = \ln z$) анизотропией рассматривались в работах В.И. Аравина [2-6], В.А. Брагинской [21], О.В. Голубевой [39, 40, 44, 45], А.Т. Горбунова [47], В.С. Козлова [67], Г.К. Михайлова [88-90], П.Я. Полубариновой-Кочиной [106], Ю.Л. Соломко [130], С.Е. Холодовского [216, 218-223], Х. Маркуса и Д.Е. Ивентона [245], И. Литвинишина [242] и др. Доказанная в п. 2.5.1. теорема и её следствия 1, 2, 3 указывают способ описания плоскопараллельных фильтрационных течений в анизотропных средах с самыми разнообразными законами распределения ГНА. Все рассматриваемые ранее другими авторами законы распределения ГНА и соответствующие им виды комплексных потенциалов из этой теоремы и её следствий вытекают как частные случаи.

2.5.5 Типичные граничные условия для комплексных потенциалов плоскопараллельных течений в анизотропных средах. Перечислим наиболее часто встречающиеся на практике ситуации и выпишем соответствующие им граничные условия для комплексных потенциалов фильтрационных течений.

В §2.1 уже было отмечено одно из граничных условий: на контуре ℓ непроницаемого тела функция тока сохраняет постоянное значение

$$\psi|_{\ell} = \text{const.} \quad (15)$$

На практике часто встречаются ситуации, когда в области фильтрации бывают известны линии C , вдоль которых известно распределение приведённого давления P . Как правило, эти линии являются границами областей питания или же границами эксплуатационных и нагнетательных скважин. Так как давление P связано с φ зависимостью (4.3), то вдоль упомянутых линий C известно распределение значений φ . Поэтому ещё одно граничное условие имеет вид:

$$\varphi|_C = f(M), \text{ где } M \in C, \quad f - \text{заданная функция.} \quad (16)$$

Другой часто встречающейся на практике ситуацией является та, когда фильтрация происходит в двух (или более) кусочно-однородных средах (рис.8). В этом случае фильтрация описывается двумя комплексными потенциалами $w_1(\zeta)$ и $w_2(\zeta)$ в 1-ой и 2-ой средах соответственно, а на границе S их раздела требуют непрерывность давления и нормальной составляющей вектора скорости фильтрации, т. е. $P_1 = P_2$ и $v_{1n} = v_{2n}$. С помощью функций φ и ψ условие сопряжения комплексных потенциалов $w_1(\zeta)$ и $w_2(\zeta)$ на границе S раздела двух кусочно-однородных анизотропных сред записывается следующим образом [45, 143, 154, 173]:

$$\frac{\varphi_1}{\sqrt{\lambda_{11}\lambda_{12}}}\Big|_S = \frac{\varphi_2}{\sqrt{\lambda_{21}\lambda_{22}}}\Big|_S \quad ; \quad \psi_1|_S = \psi_2|_S \quad (17)$$

2.6. Комплексные потенциалы плоскопараллельных течений в однородных средах с прямолинейной анизотропией при произвольной ориентации ГНА

В предыдущих параграфах §2.3 и §2.4 рассматривались уравнения для плоскопараллельных фильтрационных течений в анизотропных пластах с плоскими и

параллельными друг другу подошвой и кровлей, когда одно из ГНА пласта было всюду перпендикулярно подошве и кровле. В этом параграфе доказывается, что плоскопараллельная фильтрация в однородных пористых средах с прямолинейной анизотропией вне зависимости от ориентации ГНА относительно подошвы и кровли слоя тоже описывается комплексными потенциалами, представляющими собой аналитические функции.

Если ГНА $\{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$ и соответствующие им постоянные главные проницаемости $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ среды с прямолинейной анизотропией будут заданы, то компоненты тензора проницаемости в расчетной декартовой системе координат (x, y, z) с ортами $\bar{e}_1 = \bar{i}, \bar{e}_2 = \bar{j}, \bar{e}_3 = \bar{k}$ найдутся по формуле (1.3.6). Пусть для конкретности в подошве (кровле) плоскопараллельного слоя, заполненного средой с прямолинейной анизотропией, меняются координаты x и y , а ось z направлена по толщине слоя. Распределение скорости фильтрации в такой среде в декартовых координатах согласно тензорному закону Дарси (1.3.9) найдем из уравнений

$$\begin{cases} v_x = k_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + k_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ v_y = k_{21} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + k_{23} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ v_z = k_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + k_{32} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + k_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{cases}, \quad (1)$$

где все $k_{ij} = k_{ji} = \text{const}$, а $\Phi = -\frac{P}{\mu}$. Выясним, когда течение (1) будет плоскопараллельным относительно подошвы и кровли слоя. Для этого, очевидно, проекция скорости фильтрации v_z должна быть равна нулю, т.е. согласно (1) должно выполняться условие

$$v_z = k_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + k_{32} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + k_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Будем рассматривать (2) как уравнение первого порядка относительно Φ . Решая (2) известными методами [59], найдем, что

$$\Phi = \Phi(X, Y) - \text{произвольная функция от } X = x - \frac{k_{13}}{k_{33}} \cdot z \ ; \ Y = y - \frac{k_{23}}{k_{33}} \cdot z. \quad (3)$$

Подставляя теперь (3) в первые два уравнения системы (1), для проекций скорости фильтрации v_x и v_y найдем следующие выражения:

$$v_x = a \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial X} + b \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \ ; \ v_y = b \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial X} + c \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial Y}. \quad (4)$$

В (4) через a , b и c – обозначены постоянные с размерностью проницаемости, имеющие вид

$$a = k_{11} - \frac{k_{13}^2}{k_{33}}; \quad b = k_{12} - \frac{k_{13} \cdot k_{23}}{k_{33}}; \quad c = k_{22} - \frac{k_{23}^2}{k_{33}}. \quad (5)$$

Кроме обобщённого на рассматриваемый случай закона Дарси поле скорости фильтрации должно удовлетворять уравнению неразрывности несжимаемой жидкости. С учетом того, что $v_z=0$, уравнение неразрывности будет, как известно,

иметь вид: $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$. Формулы (3) и (4) показывают, что v_x и v_y – сложные

функции, с промежуточными аргументами X и Y , т.е. $v_x = v_x(X, Y)$ и $v_y = v_y(X, Y)$.

Подставляя v_x и v_y в уравнение неразрывности, получим для него новое выражение

$\frac{\partial v_x}{\partial X} + \frac{\partial v_y}{\partial Y} = 0$, из которого следует существование функции $\Psi = \Psi(X, Y)$, позволяющей

выразить стандартным для гидродинамики способом скорости v_x и v_y через Ψ :

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \ ; \ v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}. \quad (6)$$

Сравнивая теперь формулы (4) и (6), получаем следующую систему уравнений, описывающую плоскопараллельную фильтрацию в плоскости xy в однородной среде с прямолинейной анизотропией при произвольной ориентации ГНА:

$$\begin{cases} a \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial X} + b \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \\ b \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial X} + c \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \end{cases} \quad (7)$$

Если вместо Φ ввести в рассмотрение функцию

$$\varphi = \sqrt{a \cdot c - b^2} \cdot \Phi = -\frac{\sqrt{a \cdot c - b^2} \cdot P}{\mu}, \quad (8)$$

то система уравнений (7) примет вид

$$\begin{cases} a_0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial X} + b_0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \\ b_0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial X} + c_0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \end{cases} \quad (9)$$

где

$$a_0 = \frac{a}{\sqrt{ac - b^2}}, \quad b_0 = \frac{b}{\sqrt{ac - b^2}}, \quad c_0 = \frac{c}{\sqrt{ac - b^2}}. \quad (10)$$

Но поскольку $a_0 \cdot c_0 - b_0^2 = 1$, то система уравнений (9) будет системой уравнений Бельтрами. На основании свойств [20, 28] системы Бельтрами вытекает, что всевозможные её решения можно построить с помощью аналитической функции $w(\zeta)$ комплексного переменного $\zeta = \varphi_0 + i\psi_0$ по формуле

$$\varphi(X, Y) + i\Psi(X, Y) = w(\zeta), \quad (11)$$

в которой φ_0 и ψ_0 любое конкретное частное решение исходной системы (9). Такое решение при постоянных a_0 , b_0 и c_0 легко найти. Например, частное решение системы (9) дают функции

$$\varphi_0 = X - \frac{b_0}{c_0} \cdot Y; \quad \Psi_0 = \frac{1}{c_0} \cdot Y. \quad (12)$$

Выполненные расчёты позволяют сформулировать алгоритм построения всевозможных частных решений, описывающих плоскопараллельную фильтрацию несжимаемой жидкости в однородных средах с прямолинейной анизотропией и с произвольной ориентацией ГНА. 1). По полю ГНА и главным проницаемостям вычисляем по формуле (1.3.6) компоненты тензора проницаемости. При этом оси x и y располагаем в плоскости течения (в подошве (кровле) плоскопараллельного слоя). 2). По формулам (3) и (5) записываем выражение для комплексного переменного

$$\zeta = X - \frac{b}{c} \cdot Y + i \cdot \frac{\sqrt{ac - b^2}}{c} \cdot Y. \quad (13)$$

3). Выбираем при решении обратных задач (или вычисляем при решении прямых задач по заданным граничным условиям) некоторую аналитическую функцию $w(\zeta)$ – комплексный потенциал течения, и по её действительной части

находим поле давлений в области фильтрации. На этом этапе применяем формулы (8) и (11):

$$\varphi = \sqrt{a \cdot c - b^2} \cdot \Phi = -\frac{\sqrt{a \cdot c - b^2} \cdot P}{\mu} = \operatorname{Re}(w(\zeta)). \quad (14)$$

4). После того, как из формулы (14) будет найдена функция Φ , по формулам (4) вычисляем поле скоростей фильтрации, а затем и потоки через заданные поверхности.

Вопрос о существовании и способах расчёта плоскопараллельной фильтрации в средах с иными законами распределения ГНА остается не исследованным и ждёт своего изучения.

Основные результаты 2-ой главы: 1). Выведено интегральное по толщине искривлённого слоя уравнение неразрывности для двумерных течений. 2). Выведены общие уравнения двумерной фильтрации несжимаемой жидкости в искривлённых слоях с конечной толщиной. 3). Указана связь общих уравнений двумерной фильтрации в анизотропных (однородных и неоднородных) средах с теорией обобщённых аналитических функций Г.Н. Положего и плоскопараллельной фильтрации в однородных анизотропных средах с теорией аналитических функций комплексного переменного. 4). Указан широкий класс законов распределения ГНА в анизотропно-однородных средах, для которого «изотропизирующие» подстановки находятся при помощи квадратур по выведенным в диссертации формулам. 5). Указан новый ранее не исследованный класс точных решений уравнений плоскопараллельной фильтрации в однородных средах с прямолинейной анизотропией.

ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЯ ТОЧНОСТИ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ РАСЧЁТОВ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ МЕТОДОМ АНИЗОТРОПНОГО ЭКВИВАЛЕНТИРОВАНИЯ

В 3-ей главе исследуется точность фильтрационных расчётов в слоистых средах методами однородно-анизотропного эквивалентирования. Впервые проводить расчёты потенциальных полей в слоистых средах методом однородно-анизотропной аппроксимации предложил \approx в 1932 г. немецкий физик-электротехник Ф. Оллендорф [252]. Несмотря на широкое применение этого метода в электротехнических и в фильтрационных (В.И. Аравин [2-6], Е.С. Ромм [120-122] и др.) расчётах, исследования его точности (В.Н. Острейко [97], В.А. Толпаев [185, 208, 210], С.Е. Холодовский [222] и др.) далеки от завершения и требуют целенаправленного продолжения. Поэтому в третьей главе ставились задачи: 1) исследовать погрешность фильтрационных расчётов в многослойных средах (МС-средах) методом однородно-анизотропного эквивалентирования и 2) дать рекомендации по его применению. Для этого выполнялись сопоставительные расчёты течений в слоистой среде и в её анизотропных моделях, к которым приводят конкретные методы эквивалентирования (локальный, интегральный и др.).

Во избежание недоразумений заметим, что в этой главе и далее *анизотропная среда с конкретным законом распределения ГНА* ради сокращения её названия именуется *средой с конкретным типом анизотропии* (например, средой с радиальным типом анизотропии, если ГНА распределены по координатным линиям полярной системы координат и т.п.).

3.1. Исследования точности расчётов дебита центральной скважины в слоистой круговой области методом анизотропного эквивалентирования

В §3.1 исследуется погрешность расчёта дебита скважины в слоистой среде (рис. 9 и 10) методами 1) локального и 2) интегрального однородно-анизотропного эквивалентирования. Поскольку погрешности находятся из сопоставительных расчётов для слоистой среды и её анизотропной модели, то предварительно вы-

числим дебиты скважины в круговой анизотропной области с конкретными законами распределения ГНА.

3.1.1. Обобщение формулы Дюпюи для сред с центрально-симметричными законами распределения ГНА. Плоскопараллельные течения жидкости в средах с центрально-симметричными законами распределения ГНА (2.5.9) (сокращённо, в средах с центральной анизотропией) и с главными проницаемостями λ_1 вдоль $q = \text{const}$ и λ_2 вдоль $p = \text{const}$ описываются согласно (2.4.3) и (2.4.4) комплексными потенциалами $\varphi + i\psi = w(Z)$, где $\varphi = -\frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2} \cdot P}{\mu}$, а Z находится по формулам (2.5.11) и (2.5.12). Рассмотрим в качестве конкретного потенциала аналитическую функцию

$$w(Z) = D \cdot \ln Z + F, \quad (1)$$

где D и F - действительные постоянные. Выделяя в (1) действительные и мнимые части, для φ и ψ получим выражения

$$\varphi = D \cdot \ln R(r) + F \quad ; \quad \psi = D \left(\theta + \int_0^r \frac{\alpha\beta H(r)(\lambda_1 - \lambda_2) dr}{r[\alpha^2 H^2(r)\lambda_1 + \beta^2 \lambda_2]} \right). \quad (2)$$

С помощью функции тока (2) по формулам (2.1.14) найдем распределение скоростей в потоке:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{D}{r}; \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\alpha\beta D H(r)(\lambda_1 - \lambda_2)}{r[\alpha^2 H^2(r)\lambda_1 + \beta^2 \lambda_2]}. \quad (3)$$

Формулы (3) показывают, что в начале координат при $D > 0$ имеем источник, а при $D < 0$ - сток. Решим теперь задачу следующего характера: пусть на окружностях $r = r_0$ и $r = R_{\Pi}$ заданы приведённые давления P_0 и P_{Π} соответственно. Требуется определить количество жидкости, стекающей в скважину $r = r_0$ за единицу времени - удельный дебит скважины с радиусом r_0 и с центром в начале координат. Для решения задачи по заданным условиям с помощью (2) записываем систему уравнений

$$-\frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} P_{\Pi}}{\mu} = D \ln[R(R_{\Pi})] + F \quad ; \quad -\frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} P_0}{\mu} = D \ln[R(r_0)] + F \quad ,$$

из которой с учётом формулы (2.5.12) находим D:

$$D = -\frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} (P_{\Pi} - P_0)}{\mu \int_{r_0}^{R_{\Pi}} \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} [\alpha^2 H^2(r) + \beta^2] dr}{r [\alpha^2 H^2(r) \lambda_1 + \beta^2 \lambda_2]}} \quad (4)$$

Теперь, когда D известно, из (3) для дебита Q получим: $Q = \left| \int_0^{2\pi} r v_r d\theta \right| = 2\pi |D|$, т.е. дебит центральной скважины в средах с центральной анизотропией равен

$$Q = \frac{2\pi \cdot \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot (P_{\Pi} - P_0)}{\mu \int_{r_0}^{R_{\Pi}} \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} [\alpha^2 H^2(r) + \beta^2] \cdot dr}{r [\alpha^2 H^2(r) \lambda_1 + \beta^2 \lambda_2]}} \quad (5)$$

Формула (5) является обобщением формулы Дюпюи [7, 8, 24 и др.] на рассматриваемые анизотропные среды.

3.1.2. Постановка задачи и численные расчёты дебита центральной скважины в круговых анизотропных пластах. Точный аналитический расчёт поля давления и дебита центральной круговой скважины в круговой анизотропной области в самом общем случае представляет серьёзные математические трудности. Они обусловлены тем, что после осуществления «изотропизирующих» подстановок вида (2.5.5) и (2.5.6) задача о дебите центральной круговой скважины в круговом пласте сводится к отысканию конформного отображения некоторой двухсвязной области на круговое кольцо. Граница же этой двухсвязной области в плоскости «изотропизирующего» комплексного переменного $\zeta = \xi_1 + i \cdot \eta_1$ имеет всегда достаточно сложный вид, что делает практически безнадёжной задачу поиска функции, реализующей указанное конформное отображение. В связи с этим становится необходимой разработка приближённых методов расчёта дебитов круговых скважин в анизотропных пластах. В этом пункте рассматриваются расчёты дебитов центральных

скважин в круговых пластах с прямолинейной и радиальной анизотропией (рис.11 и 12) численными конечно-разностными методами.

Течение к скважине описывается с помощью комплексного потенциала (2.4.4), действительная часть которого

$$\operatorname{Re}[w(\zeta)] = \varphi(r, \Theta) = \sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot \Phi(r, \Theta) \quad (6)$$

в полярных координатах (r, Θ) (с полюсом, совмещённым с центром скважины) удовлетворяет уравнению, вытекающему из системы (2.4.1):

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[a(r, \Theta) \cdot r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + b(r, \Theta) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \Theta} \left[b(r, \Theta) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{c(r, \Theta)}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} \right] = 0. \quad (7)$$

Здесь $a(r, \Theta)$, $b(r, \Theta)$, $c(r, \Theta)$ - компоненты безразмерного тензора проницаемости, которые находятся через заранее задаваемый закон распределения ГНА пласта и проницаемости λ_1 и λ_2 вдоль ГНА по формулам (1.3.6) и (2.4.2). Задача о дебите центральной круговой скважины в круговом анизотропном пласте сводится к интегрированию эллиптического уравнения (7) при граничных условиях

$$\varphi|_{r=r_1} = \varphi_1 = \sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot \Phi_1 \quad \text{и} \quad \varphi|_{r=r_2} = \varphi_2 = \sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot \Phi_2, \quad (8)$$

где Φ_1 и Φ_2 - постоянные, вычисляемые по заданным значениям приведённого давления на контуре питания $r = r_2 = R$ и на границе скважины $r = r_1 = r_c$. При разработке алгоритма численного решения задачи были введены безразмерные переменные x и $v(x, \Theta)$ по формулам

$$x = r/r_1; \quad 1 \leq x \leq x_0 = r_2/r_1; \quad \varphi(r, \Theta) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\ln x_0} \cdot [\ln x + v(x, \Theta)] + \varphi_1. \quad (9)$$

При этом на безразмерную функцию $v(x, \Theta)$ налагается требование

$$v|_{x=1} = v|_{x=x_0} = 0, \quad (10)$$

необходимость которого вытекает из граничных условий (8). Подставляя (9) в (7), для определения функции $v(x, \Theta)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a \cdot x \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial v}{\partial \Theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(b \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c}{x} \cdot \frac{\partial v}{\partial \Theta} \right) = - \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial b}{\partial \Theta} \right). \quad (11)$$

После отыскания функции $v(x, \Theta)$, а значит и $\varphi(r, \Theta)$, с помощью формул (2.4.5) найдём проекции скорости фильтрации на радиальное и трансверсальное направления:

$$\frac{v_r}{v_0} = a \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{b}{x} \cdot \frac{\partial v}{\partial \Theta} ; \quad \frac{v_\Theta}{v_0} = b \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{c}{x} \cdot \frac{\partial v}{\partial \Theta}, \quad (12)$$

где $v_0 = \frac{(\Phi_2 - \Phi_1)}{r_1 \cdot \ln x_0}$. Удельный дебит Q , приходящийся на единицу длины ствола

скважины, вычисляем с помощью интеграла $Q = \int_0^{2\pi} v_r \cdot r d\Theta$ по любой окружности

радиуса r , охватывающей скважину и располагающейся в области фильтрации.

После перехода в интеграле к безразмерным переменным, получим

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left(a + a \cdot x \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial v}{\partial \Theta} \right) \cdot d\Theta, \quad (13)$$

где

$$Q_0 = \frac{2\pi \cdot \sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot (P_{II} - P_C)}{\mu \cdot \ln \left(\frac{R}{r_c} \right)}.$$

Пример 1. Численный расчёт дебита центральной скважины в круговом пласте с прямолинейной анизотропией.

Для пласта с прямолинейной анизотропией (рис.11), ГНА которого совмещены с осями x и y декартовой системы координат, а главные проницаемости равны $\lambda_1 = \lambda_x = \lambda_{\max}$ и $\lambda_2 = \lambda_y = \lambda_{\min}$, составляющие нормированного безразмерного тензора проницаемости в полярных координатах вычисляются по формулам (1.3.6) и (2.4.2) и имеют вид:

$$a(\Theta) = \sqrt{\varepsilon} \cdot \sin^2 \Theta + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \cos^2 \Theta ; \quad b(\Theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \cdot \sin 2\Theta ; \quad c(\Theta) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \sin^2 \Theta + \sqrt{\varepsilon} \cdot \cos^2 \Theta, \quad (14)$$

где через ε обозначено отношение $\varepsilon = \lambda_{\min} / \lambda_{\max}$. (Конкретные примеры расчётов

тензоров проницаемостей по заданному закону распределения ГНА приведены в

приложении 2). Симметрия закона распределения ГНА позволяет интегрировать уравнение (11) не во всём кольце, а только в его четвертой части по углу Θ от 0 до $\pi/2$. При этом, однако, к граничным условиям (10) надо будет присоединить условия

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \Theta} \right|_{\Theta=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial \Theta} \right|_{\Theta=\pi/2} = 0, \quad (15)$$

смысл которых состоит в том, что лучи $\Theta=0$ и $\Theta=\pi/2$ являются линиями тока фильтрационного течения. Интеграл (13) в рассматриваемом случае можно упростить, так как первое слагаемое интегрируется непосредственно:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}} + \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \left[a(\Theta) \cdot x \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{db}{d\Theta} \cdot v(x, \Theta) \right] d\Theta. \quad (16)$$

Далее использовали стандартные для метода сеток преобразования: уравнение (11) и граничные условия (10) и (15) записывали в виде конечно-разностных соотношений. Получающуюся систему линейных алгебраических уравнений относительно значений $v(x, \Theta)$ в узлах сетки решали экстраполяционным методом Либмана [131, 135]. После отыскания значений $v(x, \Theta)$ в узлах сетки интеграл (16), не зависящий от выбора в расчётной области безразмерного радиуса x дуги окружности интегрирования, вычислялся по квадратурной формуле Симпсона [61, 213]. В программе было предусмотрено вычисление интеграла (16) по двадцати равномерно распределенным в расчётной области окружностям, охватывающим скважину. В качестве величины Q/Q_0 принималось среднее арифметическое вычисленных на этих 20 окружностях значений интегралов (16). По величине максимального отклонения интегралов (16) от их среднего арифметического определялась относительная (в процентах) ошибка в значении Q/Q_0 . Часть полученных результатов расчёта дебита и их относительные (в процентах) погрешности приведены в таблице 3.1 и представлены графически на рис.13.

Расчёты показывают, что 1) дебит центральной круговой скважины в круговых пластах с прямолинейной анизотропией больше дебита такой же скважины в

изотропном пласте с проницаемостью $\sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2}$, 2) с увеличением отношения $r_2/r_1 = R/r_c$ влияние анизотропии на дебит скважины убывает.

Таблица 3.1

Результаты численного расчета дебита Q/Q_0 центральной круговой скважины (рис.11) в среде с прямолинейной анизотропией (числители) и относительные (в процентах) погрешности вычислений (знаменатели)

ε	r_2/r_1								
	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	6,0	11,0	21,0	51,0
0,10	$\frac{1,726}{0,20}$	$\frac{1,701}{0,23}$	$\frac{1,672}{0,27}$	$\frac{1,643}{0,28}$	$\frac{1,622}{1,57}$	$\frac{1,378}{3,77}$	$\frac{1,301}{4,31}$	$\frac{1,258}{6,05}$	$\frac{1,182}{7,87}$
0,05	$\frac{2,319}{0,15}$	$\frac{2,267}{0,20}$	$\frac{2,210}{0,25}$	$\frac{2,156}{0,28}$	$\frac{2,117}{1,44}$	$\frac{1,670}{4,37}$	$\frac{1,525}{5,33}$	$\frac{1,422}{7,78}$	$\frac{1,314}{7,45}$
0,01	$\frac{4,931}{0,04}$	$\frac{4,755}{0,10}$	$\frac{4,582}{0,16}$	$\frac{4,422}{0,24}$	$\frac{4,302}{1,30}$	$\frac{2,873}{1,84}$	$\frac{2,391}{4,10}$	$\frac{2,068}{4,72}$	$\frac{1,705}{7,36}$

Приведенные в таблице 3.1 результаты можно использовать для оценки погрешности различных приближенных формул, обобщающих формулу Дюпюи для сред с прямолинейной анизотропией. Например, попытка расчёта дебита центральной круговой скважины в круговом пласте с прямолинейной анизотропией ранее была предпринята в [130]. Однако предложенная в [130] приближённая формула ошибочна, так как значения безразмерного дебита Q/Q_0 , вычисленные по ней, оказываются меньше единицы, чего, как видно из таблицы 3.1, быть не может.

Пример 2. Численный расчёт дебита центральной скважины в круговом пласте с радиальной анизотропией

В случае пласта с радиальной анизотропией (рис. 12) составляющие нормированного безразмерного тензора проницаемости в полярных координатах согласно (1.3.6) и (2.4.2) имеют вид:

$$\begin{aligned}
a(x, \Theta) &= \frac{1}{D} \left\{ \sqrt{\varepsilon} \cdot \left(\frac{x}{\ell_0} \right) \cdot \left[\frac{x}{\ell_0} + 2 \cos \Theta \right] + \sqrt{\varepsilon} \cos^2 \Theta + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sin^2 \Theta \right\}; \\
b(x, \Theta) &= -\frac{1}{D} \left(\frac{x}{\ell_0} + \cos \Theta \right) \cdot \sin \Theta \cdot \left(\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right); \\
c(x, \Theta) &= \frac{1}{D} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{x}{\ell_0} \cdot \left(\frac{x}{\ell_0} + 2 \cos \Theta \right) + \sqrt{\varepsilon} \sin^2 \Theta + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cos^2 \Theta \right\},
\end{aligned} \tag{17}$$

где λ_1 и λ_2 указаны на рис.12, $\varepsilon = \lambda_1/\lambda_2$, а $D = (x/\ell_0)^2 + 2(x/\ell_0) \cdot \cos \Theta + 1$ и $\ell_0 = \ell/r_1$.

Симметрия закона распределения ГНА позволяет интегрировать уравнение (11) только в половине кольцевой области по углу Θ от 0 до π . При этом к граничным

условиям (10) присоединяются условия $\left. \frac{\partial v}{\partial \Theta} \right|_{\Theta=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial \Theta} \right|_{\Theta=\pi} = 0$, смысл которых в том,

что лучи $\Theta = 0$ и $\Theta = \pi$ являются линиями тока течения. В остальном вся процедура вычисления дебита скважины в пласте с радиальной анизотропией, полностью повторяет описанную в предыдущем случае. Изменения были только в задании тензора проницаемости, угловом размере области интегрирования и вместо (16) вычислялся интеграл (13). Результаты расчётов для значения $r_2/r_1 = 6$ представлены в таблице 3.2 и для наглядности в виде графиков на рис.14 и рис.15.

При $\ell = 0$ рассматриваемый тип анизотропии представляет частные случаи центральной, моделирующие изображённые на рис.9 и 10 ситуации. Точные значения дебита скважины в этих частных случаях вычисляются по формуле (5) при $\alpha=0$ и $\beta=1$, если $\lambda_1 < \lambda_2$ или при $\alpha=1$ и $\beta=0$, если $\lambda_1 > \lambda_2$. В первом случае получаем

формулу $\left. \frac{Q}{Q_0} \right|_{\ell=0} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, а во втором $\left. \frac{Q}{Q_0} \right|_{\ell=0} = \sqrt{\varepsilon}$, которые и дополняют представленные

в таблице 3.2 и на рис.14 и 15 результаты. Для дальнейшего отметим, что обе эти формулы для дебита центральной скважины в однородном круговом пласте с радиальной анизотропией, представляющей модель слоистых сред на рис. 9 и 10, можно записать в одном и том же виде

$$Q = \frac{2\pi \cdot \lambda_r \cdot (P_n - P_c)}{\mu \cdot \ln\left(\frac{R}{r_c}\right)}, \quad (18)$$

где λ_r – значение главной проницаемости вдоль радиального направления.

Таблица 3.2

Результаты численного расчёта дебита Q/Q_0 центральной круговой скважины (рис.12) в среде с радиальной анизотропией (числители) и относительные (в процентах) погрешности вычислений (знаменатели). (В вычислительном эксперименте $r_2/r_1 = 6$. В клетках, помеченных *, результат соответствует значению $l/r_1 = 1,022$).

ε	l/r_1								
	0,1	0,5	0,9	1,025	2,11	3,11	4,11	12	30
0,10	$\frac{0,318}{0,04}$	$\frac{0,352}{0,23}$	$\frac{0,407}{0,13}$	$\frac{*0,427}{0,09}$	$\frac{0,685}{0,77}$	$\frac{1,047}{0,55}$	$\frac{1,285}{3,48}$	$\frac{1,348}{0,13}$	$\frac{1,355}{0,14}$
0,05	$\frac{0,266}{0,09}$	$\frac{0,257}{0,51}$	$\frac{0,306}{0,320}$	$\frac{0,325}{0,38}$	$\frac{0,604}{1,48}$	$\frac{1,161}{1,03}$	$\frac{1,506}{0,69}$	$\frac{1,625}{0,22}$	$\frac{1,634}{0,23}$
0,01	$\frac{0,102}{0,48}$	$\frac{0,125}{0,45}$	$\frac{0,155}{2,02}$	$\frac{0,168}{2,37}$	$\frac{0,455}{5,11}$	$\frac{0,737}{2,88}$	$\frac{2,647}{1,8}$	$\frac{2,914}{0,41}$	$\frac{2,938}{0,44}$
10	$\frac{3,158}{0,00}$	$\frac{3,043}{0,01}$	$\frac{2,686}{0,08}$	$\frac{*2,427}{0,25}$	$\frac{1,606}{3,14}$	$\frac{1,452}{4,38}$	$\frac{1,364}{5,09}$	$\frac{1,361}{0,29}$	-
20	$\frac{4,465}{0,00}$	$\frac{4,291}{0,01}$	$\frac{3,736}{0,09}$	$\frac{3,293}{0,33}$	$\frac{1,972}{4,77}$	$\frac{1,746}{7,22}$	$\frac{1,650}{6,53}$	-	-
100	$\frac{9,984}{0,00}$	$\frac{9,573}{0,01}$	$\frac{8,233}{0,11}$	$\frac{7,058}{0,45}$	$\frac{3,628}{7,48}$	$\frac{3,075}{12,60}$	$\frac{2,941}{9,37}$	-	-

Расчёты показали, что 1) при $l/r_1 \rightarrow \infty$ значение Q/Q_0 для скважины в круговом пласте со смещённой радиальной анизотропией стремится к Q/Q_0 для такого же пласта с прямолинейной анизотропией. Это подтверждает и сравнение данных таблицы 3.2 с данными таблицы 3.1 при $r_2/r_1 = 6$; 2) дебит скважины в пласте со смещённой радиальной анизотропией существенно зависит от расположения центра радиальной анизотропии только в случае, когда $l_0 < x_0$. Если же центр радиальной анизотропии находится за контуром питания (то есть $l_0 > x_0$), то дебит

скважины практически не зависит от ℓ_0 и его можно принять приближённо равным своему предельному при $\ell \rightarrow \infty$ значению – дебиту скважины в пласте с прямолинейной анизотропией. (Поэтому в таблице 3.2 и приведены подробно значения расчётов только для случая $\ell_0 < x_0$).

3.1.3. Исследования точности методов интегрального и локального однородно-анизотропного эквивалентирования в расчётах дебита центральной скважины в слоистой среде.

Рассмотрим теперь расчёт дебита скважины в слоистой среде на рис. 9 и 10 методами локального и интегрального однородно-анизотропного эквивалентирования. На этом простом примере удобно подчеркнуть отличия в подходах названных методов и отметить их преимущества и недостатки.

Точные значения дебитов центральной круговой скважины на рис. 9 и 10 вычисляются по формулам:

$$Q_{\text{точн}} = \frac{2\pi \cdot \Lambda_{1,2} \cdot (P_{\text{п}} - P_{\text{с}})}{\mu \cdot \ln\left(\frac{R}{r_{\text{с}}}\right)}, \quad (19)$$

где $\Lambda_{1,2}$ – эффективные проницаемости слоистых областей на рис. 9 и 10 соответственно. Для слоистой среды из чередующихся изотропных круговых колец с проницаемостями k_1 и k_2 на рис. 9 эффективная проницаемость

$$\Lambda_1 = \frac{k_1 k_2}{\delta \cdot (k_1 - k_2) + k_2}, \quad \text{где} \quad \delta = \frac{\ln\left(\frac{r_3 r_5 r_7 \dots r_{2N+1}}{r_2 r_4 r_6 \dots r_{2N}}\right)}{\ln\left(\frac{R}{r_{\text{с}}}\right)}, \quad (20)$$

r_i - радиусы колец, $r_1 = r_{\text{с}}$ и $R = r_{2N+1}$ (когда в области фильтрации укладывается N пар слоёв k_1 и k_2) и $R = r_{2N+2}$ (когда в области фильтрации укладывается N пар и один дополнительный слой с проницаемостью k_1). Для среды из чередующихся изотропных одинаковых по размерам круговых секторов с проницаемостями k_1 и k_2 на рис. 10 эффективная проницаемость

$$\Lambda_2 = \begin{cases} \frac{k_1 + k_2}{2}, & \text{в случае (1)} \\ \frac{N}{2N+1} \cdot \left(k_1 + k_2 + \frac{k_1}{N} \right), & \text{в случае (2)} \end{cases}, \quad (21)$$

в которой в 1-ом случае в круговую область укладывается N пар секторов, а во 2-ом $-N$ пар и один дополнительный сектор с проницаемостью k_1 .

Слоистые среды на рис. 9 и 10 естественно моделировать радиально-анизотропными, у которых ГНА направлены по координатным линиям полярной системы координат. Дебит скважины $Q_{\text{аниз}}$ в среде с радиальной анизотропией вычисляется по формуле (18). Желая, чтобы радиально-анизотропная модель слоистых сред при расчёте дебита центральной скважины приводила к точному результату, подберём λ_r в (18) так, чтобы значения Q по формулам (18) и (19) совпадали. Сравнивая (18) и (19), для λ_r получим значение, совпадающее с $\Lambda_{1,2}$. Описанный сейчас подход, предлагаемый автором для определения главной проницаемости $\lambda_r = \Lambda_{1,2}$, носит название метода интегрального однородно-анизотропного эквивалентирования. Из изложенного в иллюстративном примере ясно, что предложенный метод в задачах эквивалентирования всегда приводит к точным результатам при любом числе слоёв и любом законе изменения их толщин. Это объясняется тем, что расчёт главных проницаемостей $\lambda_{1,2}$ в этом методе выполняется не для структурной ячейки ω в её локальных декартовых координатах, а для всей многослойной области в целом, в системе координат, координатные линии которой совпадают как с границами раздела чередующихся слоёв многослойной среды, так и с границами области, для которой осуществляется анизотропное эквивалентирование. В результате для $\lambda_{1,2}$ получаются значения, совпадающие с эффективными проницаемостями $\Lambda_{1,2}$ в точных решениях задач эквивалентирования. Недостатком метода интегрального однородно-анизотропного эквивалентирования, значительно ограничивающим область его применения, является то, что координатные линии выбираемой системы могут совпадать с границами раздела слоёв, но не сов-

падать с границами расчётной области. В этом случае расчёт главных проницаемостей анизотропной модели неизбежно приходится выполнять по методу локального однородно-анизотропного эквивалентирования.

Кристаллофизический метод локального однородно-анизотропного эквивалентирования для сред из чередующихся изотропных слоёв k_1, k_2 с одинаковыми толщинами h для главных проницаемостей $\lambda_{1,2}$ перпендикулярно к слоям и вдоль слоёв приводит к значениям, получающимся из (1.1.14) при $h_1 = h_2 = h$ и равным

$$\lambda_1 = \frac{2k_1k_2}{k_1 + k_2} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (22)$$

В соответствии с формулами (22) для рис.9 $\lambda_r = \lambda_1$, а для рис. 10 $\lambda_r = \lambda_2$. Результаты относительных погрешностей $\frac{Q_{\text{точн}} - Q_{\text{аниз}}}{Q_{\text{точн}}}$ (в %) расчётов дебита методом локального однородно-анизотропного эквивалентирования для рис.9 приведены в таблице 3.3, а для рис.10 – в таблице 3.4.

Таблица 3.3

Относительные погрешности (в %) расчётов дебита скважины на рис.9 методом локального однородно-анизотропного эквивалентирования

Число слоёв	Отношение $h/r_{\text{скв}}$	1-ый случай: $R/r_{\text{скв}} = 100$			
		Отношение проницаемостей $\varepsilon = k_1/k_2$			
		2,00	10,00	20,00	100,00
		0,50	0,10	0,05	0,01
100	0,9900	±3,20	±7,87	±8,70	±9,42
500	0,1980	±0,70	±1,73	±1,91	±2,07
50000	0,0020	±0,01	±0,02	±0,02	±0,02
Число слоёв	Отношение $h/r_{\text{скв}}$	2-ой случай: $R/r_{\text{скв}} = 1000$			
1000	0,9990	±2,17	±5,34	±5,90	±6,40
5000	0,1998	±0,48	±1,17	±1,30	±1,41
50000	0,0200	±0,05	±0,12	±0,13	±0,14
Число слоёв	Отношение $h/r_{\text{скв}}$	3-ий случай: $R/r_{\text{скв}} = 10000$			
5000	1,9998	±2,83	±6,96	±7,69	±8,33
10000	0,9999	±1,63	±4,01	±4,44	±4,80
100000	0,10000	±0,18	±0,44	±0,49	±0,53

(Знаки «+» соответствуют значениям $\varepsilon = 2; 10; 20$ и 100 ,

а знаки «-» - для $\varepsilon = 0,50; 0,10; 0,05$ и $0,01$)

Таблица 3.4

Относительные погрешности (в %) расчётов дебита скважины на рис.10 методом локального однородно-анизотропного эквивалентирования

Число секторов	Отношение проницаемостей $\varepsilon = k_1/k_2$							
	0,01	0,05	0,10	0,50	2,00	10,00	20,00	100,00
7	-16,28	-14,84	-13,24	-5,00	4,55	10,47	11,45	12,28
11	-9,78	-8,96	-8,04	-3,13	2,94	6,92	7,60	8,18
21	-4,90	-4,50	-4,05	-1,61	1,56	3,75	4,13	4,46
51	-1,96	-1,81	-1,63	-0,66	0,65	1,58	1,74	1,89
101	-0,98	-0,90	-0,82	-0,33	0,33	0,80	0,89	0,96
501	-0,20	-0,18	-0,16	-0,07	0,07	0,16	0,18	0,20
1001	-0,10	-0,09	-0,08	-0,03	0,03	0,08	0,09	0,10
5001	-0,02	-0,02	-0,02	-0,01	0,01	0,02	0,02	0,02

Представленные результаты показывают медленную сходимость этого метода к точному решению, которое практически достигается лишь тогда, когда в области фильтрации укладывается не менее $\sim 5 \cdot 10^4 \div 10^6$ слоёв. В естественных условиях толщины пропластков в слоистых средах могут составлять $\approx 0,10 \div 2,00$ м, а характерный размер области фильтрации $\approx 100 \div 5000$ м. Поэтому число слоёв в реальных многослойных средах, как правило, изменяется в диапазоне $\approx 50 \div 5 \cdot 10^4$, недостаточном для достижения высокой точности расчётов по кристаллофизическому методу локального однородно-анизотропного эквивалентирования.

Таким образом, рассмотренный пример показывает, что для повышения точности фильтрационных расчётов в слоистых средах в случае возможности нужно применять метод интегрального однородно-анизотропного эквивалентирования.

3.2. Обобщение фильтрационных теорем об окружности и прямой для анизотропных сред

В этом параграфе фильтрационные теоремы об окружности и прямой, сформулированные в [41, 42] для кусочно-однородных изотропных сред, обобщаются для сред со специальными видами криволинейной анизотропии. Полученные результаты позволяют точно описать разнообразные фильтрационные течения в рассматриваемых кусочно-однородных анизотропных средах, граница раздела которых представляет собой прямую или окружность. В большинстве же случаев при

решении задач фильтрации в кусочно-однородных средах с криволинейной анизотропией часто приходится ограничиваться приближёнными методами расчёта. Результаты, полученные в данном параграфе, далее применяются в расчётах по оценке точности метода локального однородно-анизотропного эквивалентирования слоистых сред. Кроме того, полученные результаты применены 1) к исследованию искажения плоскопараллельного поступательного потока в изотропной среде круглым радиально-анизотропным включением, 2) к построению комплексного потенциала течения от источника в рассматриваемых кусочно-однородных анизотропных средах и 3) к построению комплексного потенциала течения от диполя в таких же средах.

3.2.1. Теорема об окружности. Пусть плоскость z разделена окружностью $|z| = r_0$ на две области, как показано на рис.16. В каждой области пористые среды обладают своими центрально-симметричными законами распределения ГНА (2.5.9), имеющими в полярных координатах r, θ вид

$$p_m(r, \theta) = \alpha_m \cdot \int \frac{H_m(r)}{r} dr - \beta_m \cdot \theta \quad ; \quad q_m(r, \theta) = \beta_m \cdot \int \frac{dr}{r \cdot H_m(r)} + \alpha_m \cdot \theta \quad ; m = 1, 2, \quad (1)$$

и главными проницаемостями $\lambda_{1m}, \lambda_{2m}$ вдоль $q_m = \text{const}$ и $p_m = \text{const}$ соответственно. В этом случае плоскопараллельное течение жидкости описывается двумя комплексными потенциалами $\varphi_1(r, \theta) + i \cdot \psi_1(r, \theta) = w_1(Z_1)$ и $\varphi_2(r, \theta) + i \cdot \psi_2(r, \theta) = w_2(Z_2)$, аргументы Z_1 и Z_2 в которых в соответствии с (2.5.11) и (2.5.12) вычисляются по формулам

$$Z_m = R_m(r) \cdot e^{i \cdot \omega_m(r, \theta)} \quad ; \quad m = 1, 2 \quad (2)$$

в которых

$$R_m(r) = r_0 \cdot \exp \left(\int_0^r \frac{\sqrt{\lambda_{1m} \lambda_{2m}} \cdot [\alpha_m^2 \cdot H_m^2(r) + \beta_m^2]}{r \cdot [\alpha_m^2 H_m^2(r) \cdot \lambda_{1m} + \beta_m^2 \cdot \lambda_{2m}]} \cdot dr \right) ; \quad \omega_m(r, \theta) = \theta - \int_0^r \frac{\alpha_m \cdot \beta_m \cdot H_m(r) \cdot (\lambda_{2m} - \lambda_{1m})}{r \cdot [\alpha_m^2 H_m^2(r) \cdot \lambda_{1m} + \beta_m^2 \cdot \lambda_{2m}]} \cdot dr$$

На границе раздела кусочно-однородных анизотропных сред должны выполняться условия непрерывности давления и нормальной составляющей скорости

фильтрации. Эти граничные условия через действительные и мнимые части комплексных потенциалов согласно (2.5.17) записываются в виде:

$$\text{при } r = r_0 : \frac{\varphi_1}{K_1} = \frac{\varphi_2}{K_2}, \quad \psi_1 = \psi_2, \quad \text{где } K_m = \sqrt{\lambda_{1m} \lambda_{2m}}, \quad m = 1, 2. \quad (3)$$

В случае рассматриваемых кусочно-однородных сред с центрально-симметричной анизотропией потенциал $w_1(Z_1)$, описывающий искаженный круглым включением $r < r_0$ фильтрационный поток, помимо (3) должен удовлетворять также дополнительному условию на бесконечности. Например, если речь идет об искажении круглым включением потока от особенностей (источников, стоков, диполей), расположенных вне включения, то требуется, чтобы на бесконечности распределение скоростей от $w_1(Z_1)$ совпадало с распределением скоростей неискаженного течения.

Для кусочно-однородных сред с центрально-симметричной анизотропией (1) комплексные потенциалы $w_1(Z_1)$ и $w_2(Z_2)$, удовлетворяющие (3), как легко проверить, имеют вид

$$\begin{aligned} w_1(Z_1) &= F(Z_1) + \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \overline{F\left(\frac{r_0^2}{Z_1}\right)} + \frac{2K_1}{K_1 + K_2} G(Z_1); \\ w_2(Z_2) &= \frac{2K_2}{K_1 + K_2} F(Z_2) + G(Z_2) + \frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \overline{G\left(\frac{r_0^2}{Z_2}\right)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $F(Z_m)$ и $G(Z_m)$ - аналитические функции, первая из которых имеет особые точки вне окружности $|z| = r_0$, а вторая - внутри неё, черта - знак комплексного сопряжения. Если характеристики анизотропных сред в областях 1 и 2 совпадают, то $K_1 = K_2$ и $Z_1 = Z_2 = Z$. Поэтому из (4) получим, что $w_1(Z) = w_2(Z) = F(Z) + G(Z)$. Следовательно, гидродинамический смысл функций $F(Z)$ и $G(Z)$ состоит в том, что их сумма $F(Z) + G(Z)$ представляет собой комплексный потенциал неискаженного круглым включением фильтрационного потока от особенностей, расположенных вне и внутри окружности $|z| = r_0$. Отметим ещё, что комплексный потенциал $w_1(Z_1)$ из (4), в чем легко убедиться в каждом конкретном случае, удовлетворяет на бес-

конечности условию естественного для существа задачи характера. В частности, если функция $G=0$ (поток создается особенностями, расположенными вне включения), то скорость на бесконечности искаженного потока $w_1(Z_1)$ совпадает со скоростью неискаженного потока. Наконец, отметим, что в частном случае, когда $H(r) \equiv 1$, формулы (4) дают ранее полученный в [45] результат. Для кусочно-однородных изотропных сред (4) переходят в фильтрационную теорему О.В. Голубевой об окружности.

3.2.2. Теорема о прямой. Пусть плоскость xy разделена прямой $y = 0$ на две области $y > 0$ и $y < 0$, как показано на рис.17. В каждой области пористые среды обладают своими конгруэнтными законами распределения ГНА (2.5.7), имеющими в декартовых координатах x, y вид

$$p_m(x, y) = \alpha_m \cdot x - \beta_m \cdot \int H_m(y) dy \quad ; \quad q_m(x, y) = \beta_m \cdot x + \alpha_m \cdot \int \frac{dy}{H_m(y)} \quad ; \quad m = 1, 2, \quad (5)$$

и главными проницаемостями $\lambda_{1m}, \lambda_{2m}$ вдоль $q_m = \text{const}$ и $p_m = \text{const}$ соответственно. Плоскопараллельное течение жидкости описывается двумя комплексными потенциалами $\varphi_1(x, y) + i \cdot \psi_1(x, y) = w_1(\zeta_1)$ и $\varphi_2(x, y) + i \cdot \psi_2(x, y) = w_2(\zeta_2)$, аргументы $\zeta_m = \xi_m + i \cdot \eta_m$ (где $m = 1, 2$) в которых в соответствии с (2.5.8) вычисляются по формулам

$$\xi_m = x + \int_0^y \frac{\alpha_m \cdot \beta_m \cdot H_m(y) \cdot (\lambda_{1m} - \lambda_{2m})}{\alpha_m^2 \cdot \lambda_{2m} + \beta_m^2 \cdot H_m^2(y) \cdot \lambda_{1m}} dy \quad ; \quad \eta_m = \int_0^y \frac{\sqrt{\lambda_{1m} \lambda_{2m}} \cdot [\alpha_m^2 + \beta_m^2 \cdot H_m^2(y)]}{\alpha_m^2 \cdot \lambda_{2m} + \beta_m^2 \cdot H_m^2(y) \cdot \lambda_{1m}} dy. \quad (6)$$

Для кусочно-однородных сред с конгруэнтной анизотропией (5) комплексные потенциалы $w_1(\zeta_1)$ и $w_2(\zeta_2)$, удовлетворяющие при $y = 0$ условиям (3), как легко проверить, имеют вид

$$\begin{aligned} w_1(\zeta_1) &= F(\zeta_1) + \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \overline{F(\zeta_1)} + \frac{2K_1}{K_1 + K_2} G(\zeta_1); \\ w_2(\zeta_2) &= \frac{2K_2}{K_1 + K_2} F(\zeta_2) + G(\zeta_2) + \frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \overline{G(\zeta_2)}. \end{aligned} \quad (7)$$

где $F(\zeta_m)$ и $G(\zeta_m)$, $m = 1, 2$ - аналитические функции, особые точки первой из них расположены в верхней полуплоскости, а второй - в нижней. Если характеристики анизотропной среды в нижней полуплоскости совпадают с соответствующими характеристиками среды в верхней полуплоскости, то $K_1 = K_2$ и $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$. Поэтому из (7) получим, что $w_1(\zeta_1) = w_2(\zeta_2) = F(\zeta) + G(\zeta)$. Следовательно, гидродинамический смысл функций $F(\zeta)$ и $G(\zeta)$ в том, что их сумма $F(\zeta) + G(\zeta)$ представляет комплексный потенциал неискаженного кусочной однородностью фильтрационного потока от особенностей, расположенных в областях $y > 0$ и $y < 0$.

3.2.3. Примеры применения теорем. В качестве примера применения обобщённой фильтрационной теоремы об окружности исследуем искажения плоскопараллельных фильтрационных течений в изотропной среде с проницаемостью k_0 круглым однородным радиально-анизотропным цилиндрическим включением с радиусом r_0 . Главные проницаемости включения в трансверсальном и в радиальном направлениях обозначим как $\lambda_\theta = \lambda_{22}$ и $\lambda_r = \lambda_{12}$ соответственно. Для сред с радиальной анизотропией в формулах (1) $\alpha = 1$ и $\beta = 0$. Поэтому, согласно (2), переменные Z_1 и Z_2 в изотропной и анизотропной частях области фильтрации будут соответственно равны

$$Z_1 = re^{i\theta} = z, \quad Z_2 = r_0 \cdot \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\sqrt{\varepsilon}} \cdot e^{i\theta}, \quad \text{где } \varepsilon = \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}} \equiv \frac{\lambda_\theta}{\lambda_r}. \quad (8)$$

Пусть заданный комплексный потенциал невозмущённого течения $F(z)$ имеет точечные особенности только за пределами круглого включения. Тогда $G(z) = 0$ и комплексные потенциалы искажённого течения в изотропной среде $w_1(z)$ и в анизотропном включении $w_2(Z_2)$ найдутся через $F(z)$ в соответствии с (4) и (8) по формулам

$$w_1(z) = F(z) + \frac{k_0 - \sqrt{\lambda_{12}\lambda_{22}}}{k_0 + \sqrt{\lambda_{12}\lambda_{22}}} \cdot \overline{F\left(\frac{r_0^2}{\bar{z}}\right)}; \quad w_2(Z_2) = \frac{2\sqrt{\lambda_{21}\lambda_{22}}}{k_0 + \sqrt{\lambda_{12}\lambda_{22}}} \cdot F(Z_2). \quad (9)$$

Зная комплексные потенциалы (9), можно определить все интересующие нас характеристики искаженного включением плоскопараллельного фильтрационного течения. Например, величина фильтрационного потока $Q_{\text{аниз}}$ через диаметр АВ круглого анизотропного включения, совпадающий с осью u -ов, будет равна

$$Q_{\text{аниз}} = \psi_1(0, r_0) - \psi_1(0, -r_0) . \quad (10)$$

Пример 1. Применим формулы (9) и (10) к исследованию искажения поступательного фильтрационного потока в однородной изотропной среде круглым включением с радиусом r_0 и с радиальной анизотропией. Комплексный потенциал $F(z)$ неискаженного поступательного потока,двигающегося в положительном направлении оси x со скоростью v_∞ , известен: $F(z) = v_\infty z$. Подставляя $F(z)$ в (9), найдем следующие комплексные потенциалы искажённого поступательного потока в изотропной и радиально-анизотропной частях области фильтрации:

$$w_1(z) = v_\infty z + \frac{k_0 - \sqrt{\lambda_{12}\lambda_{22}}}{k_0 + \sqrt{\lambda_{12}\lambda_{22}}} \frac{v_\infty r_0^2}{z} ; \quad w_2(Z_2) = \frac{2\sqrt{\lambda_{12}\lambda_{22}}}{k_0 + \sqrt{\lambda_{12}\lambda_{22}}} v_\infty Z_2 . \quad (11)$$

Пользуясь формулами (10) и (11), найдём поток $Q_{\text{аниз}}$ искаженного поступательного течения через диаметр АВ круглого радиально-анизотропного включения

$$Q_{\text{аниз}} = 2v_\infty \cdot R \cdot \frac{2\sqrt{\lambda_{12}\lambda_{22}}}{k_0 + \sqrt{\lambda_{12}\lambda_{22}}} . \quad (12)$$

Пример 2. В качестве другого применения результатов (9) рассмотрим комплексные потенциалы течения от источника (стока). Пусть источник располагается за пределами круглого включения на отрицательной части оси x -ов в точке с полярными координатами (b, π) . Комплексный потенциал неискаженного включением течения от источника имеет вид $F(z) = \frac{q}{2\pi} \ln(z + b)$. Подставляя $F(z)$ в (9), получаем комплексные потенциалы течения от источника в изотропной среде и в радиально-анизотропном включении в виде

$$w_1(z) = \frac{q}{2\pi} \cdot \left[\ln(z+b) + \frac{k_0 - \sqrt{\lambda_{12} \cdot \lambda_{22}}}{k_0 + \sqrt{\lambda_{12} \cdot \lambda_{22}}} \cdot \ln \frac{z + \frac{r_0^2}{b}}{z} \right], \quad w_2(Z_2) = \frac{q}{2\pi} \cdot \frac{2\sqrt{\lambda_{12} \cdot \lambda_{22}}}{k_0 + \sqrt{\lambda_{12} \cdot \lambda_{22}}} \cdot \ln(Z_2 + b). \quad (13)$$

Поток $Q_{\text{аниз}}$ искаженного течения от источника через диаметр АВ круглого радиально-анизотропного включения в соответствии с (10) и (13) найдётся по формуле

$$Q_{\text{аниз}} = \frac{q}{\pi} \cdot \frac{2\sqrt{\lambda_{12}\lambda_{22}}}{k_0 + \sqrt{\lambda_{12}\lambda_{22}}} \operatorname{arctg} \frac{r_0}{b}. \quad (14)$$

Пример 3. Применим ещё результаты (9) к построению комплексных потенциалов течения от диполя с действительным моментом m в условиях двух предыдущих примеров. Пусть диполь располагается за пределами круглого включения на отрицательной части оси x -ов в точке с полярными координатами (b, π) . Комплексный потенциал неискаженного включением течения от диполя $F(z) = \frac{m}{2\pi \cdot (z+b)}$. Подставляя $F(z)$ в (9), получаем комплексные потенциалы исследуемого течения от диполя в изотропной среде и в радиально-анизотропном включении:

$$w_1(z) = \frac{m}{2\pi \cdot (z+b)} + \frac{k_0 - \sqrt{\lambda_{12} \cdot \lambda_{22}}}{k_0 + \sqrt{\lambda_{12} \cdot \lambda_{22}}} \cdot \frac{m \cdot z}{2\pi \cdot (r_0^2 + b \cdot z)}, \quad w_2(Z_2) = \frac{2\sqrt{\lambda_{12} \cdot \lambda_{22}}}{k_0 + \sqrt{\lambda_{12} \cdot \lambda_{22}}} \cdot \frac{m}{2\pi \cdot (Z_2 + b)}. \quad (15)$$

Поток $Q_{\text{аниз}}$ искаженного течения от диполя через диаметр АВ круглого радиально-анизотропного включения в соответствии с (10) и (15) найдётся по формуле

$$Q_{\text{аниз}} = -\frac{m}{\pi} \cdot \frac{2\sqrt{\lambda_{12}\lambda_{22}}}{k_0 + \sqrt{\lambda_{12}\lambda_{22}}} \cdot \frac{r_0}{b^2 + r_0^2}. \quad (16)$$

В заключение подчеркнём, что область приложений результатов (4), (7) и (9), конечно, не исчерпывается приведенными примерами.

3.3. Искажение поступательного фильтрационного потока в изотропной среде круглым включением с прямолинейной анизотропией

В этом параграфе продолжим исследование влияния круглого однородно-анизотропного включения с радиусом R в однородной изотропной среде на плоскопараллельные течения жидкости.

Пусть в плоскости xy находится однородная изотропная среда с проницаемостью k , а в начале координат - круглое однородное включение с прямолинейной анизотропией. Уравнения ГНА зададим равенством $p(x, y) + i \cdot q(x, y) = z \cdot \exp(-i \cdot \tilde{\alpha})$, где $z = x + i \cdot y$, а $\tilde{\alpha}$ - угол, который составляют ГНА $q = \text{const}$ с положительным направлением оси x -ов. Главные проницаемости вдоль $q = \text{const}$ и $p = \text{const}$ равны λ_1 и λ_2 соответственно. Уравнения ГНА получаются из (2.5.1) при $\omega(z) = z$, тогда $\xi = x$, $\eta = y$ и (2.5.2) при $H(y) = 1$, $\alpha = \cos \tilde{\alpha}$, $\beta = -\sin \tilde{\alpha}$. (В дальнейшем знак \sim не пишется). Требуется определить влияние этого включения на фильтрационные потоки, созданные теми или иными гидродинамическими особенностями. Сейчас решим эту задачу для исследования влияния круглого анизотропного включения на поступательный поток.

Так как в изотропной и в анизотропной областях фильтрации плоскопараллельный поток описывается аналитическими функциями, то требуется найти комплексные потенциалы

$$\varphi_1 + i\psi_1 = w_1(z), \quad z = x + iy \quad (1)$$

для течения в 1-ой области (изотропная среда) и

$$\varphi_2 + i\psi_2 = w_2(\zeta), \quad \zeta = \xi + i\eta$$

$$\xi = x + \frac{\cos \alpha \sin \alpha (\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1 \sin^2 \alpha + \lambda_2 \cos^2 \alpha} \cdot y \quad ; \quad \eta = \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot y}{\lambda_1 \sin^2 \alpha + \lambda_2 \cos^2 \alpha} \quad (2)$$

для течения во 2-ой области (внутри анизотропного включения). В (2) аргумент ζ определяли по формулам (2.5.5) и (2.5.6) с $H(y) = 1$, $\alpha = \cos \tilde{\alpha}$, $\beta = -\sin \tilde{\alpha}$. Действи-

тельные и мнимые части комплексных потенциалов (1) и (2) согласно (2.5.17) на границе раздела 1-ой и 2-ой областей должны удовлетворять краевым условиям

$$\frac{\varphi_1}{k} \Big|_{r=R} = \frac{\varphi_2}{\sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2}} \Big|_{r=R} ; \quad \psi_1 \Big|_{r=R} = \psi_2 \Big|_{r=R} . \quad (3)$$

Комплексный потенциал $w_1(z)$, кроме условий (3), должен удовлетворять ещё дополнительному требованию: т.к. влияние включения ограниченных размеров на бесконечности не проявляется, то $\bar{v}_1|_{r \rightarrow \infty} = \bar{v}_0$, где \bar{v}_0 - скорость поступательного потока на бесконечности. Направляя ось x по потоку на бесконечности и учитывая,

что $\frac{dw_1}{dz} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + i \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = v_x - iv_y$, сформулированное требование запишем в виде

$$\frac{dw_1}{dz} \Big|_{z \rightarrow \infty} = v_0 .$$

Приступим теперь к отысканию комплексных потенциалов. Поскольку

во внешности круга радиуса R комплексная скорость течения $\frac{dw_1}{dz}$ не имеет

особенностей, то при $|z| > R$ её производная $\frac{dw_1}{dz}$ может быть представлена главной

частью ряда Лорана $\frac{dw_1}{dz} = v_0 + \frac{c'_1}{z} + \frac{c'_2}{z^2} + \frac{c'_3}{z^3} + \dots + \frac{c'_n}{z^n} + \dots$, где v_0 - скорость потока на

бесконечности, c'_n - пока неизвестные коэффициенты разложения. Интегрируя выписанный ряд, для $w_1(z)$ получаем следующее представление:

$$w_1(z) = v_0 z + ic_0 \cdot \ln z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \dots + \frac{c_n}{z^n} + \dots \quad (4)$$

(мнимый коэффициент перед $\ln z$ взят потому, что в начале координат по условию задачи источников нет). Отметим, что потенциал вида (4) удовлетворяет условию

$$\text{на бесконечности } \frac{dw_1}{dz} \Big|_{z \rightarrow \infty} = v_0 .$$

В анизотропном включении потенциал течения будем искать в виде

$$w_2(\zeta) = (a + ib)\zeta = (a\xi - b\eta) + i(b\xi + a\eta), \quad (5)$$

где a и b - подлежащие определению постоянные. Неопределённые постоянные $c_n = \gamma_n + i\delta_n$ для $n = 0, 1, 2, \dots$ в разложении (4) и a и b в (5) найдём из граничных ус-

ловий (3). С этой целью выделяем в (4) и (5) действительные и мнимые части в полярных координатах r, θ и подставляем в (3). В результате получим, что $c_0 = 0$, $\gamma_n = \delta_n = 0$ при $n = 2, 3, 4, \dots$, а оставшиеся четыре постоянные a, b, γ_1 и δ_1 должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\frac{1}{k} \left(v_0 R + \frac{\gamma_1}{R} \right) = \frac{aR}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}; \quad \frac{\delta_1}{kR} = \frac{[a \cos \alpha \sin \alpha (\lambda_2 - \lambda_1) - b \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}] \cdot R}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} (\lambda_1 \sin^2 \alpha + \lambda_2 \cos^2 \alpha)} \quad (6)$$

$$\frac{\delta_1}{R} = bR; \quad v_0 R - \frac{\gamma_1}{R} = \frac{[a \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} + b \cos \alpha \sin \alpha (\lambda_2 - \lambda_1)] \cdot R}{\lambda_1 \sin^2 \alpha + \lambda_2 \cos^2 \alpha}$$

Решая систему (6), найдем, что

$$a = \frac{2v_0 \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} (\lambda_1 \sin^2 \alpha + \lambda_2 \cos^2 \alpha) (\lambda_1 \sin^2 \alpha + \lambda_2 \cos^2 \alpha + k)}{k (\lambda_1 \sin^2 \alpha + \lambda_2 \cos^2 \alpha) (\lambda_1 \sin^2 \alpha + \lambda_2 \cos^2 \alpha + k) + \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 \sin^2 \alpha + \lambda_2 \cos^2 \alpha + k) + k \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha (\lambda_2 - \lambda_1)^2}$$

$$b = \frac{ak \cos \alpha \sin \alpha (\lambda_2 - \lambda_1)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} (\lambda_1 \sin^2 \alpha + \lambda_2 \cos^2 \alpha + k)}; \quad \delta_1 = bR^2;$$

$$\gamma_1 = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{ak (\lambda_1 \sin^2 \alpha + \lambda_2 \cos^2 \alpha) - \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} [a \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} + b \cos \alpha \sin \alpha (\lambda_2 - \lambda_1)]}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} (\lambda_1 \sin^2 \alpha + \lambda_2 \cos^2 \alpha)} \quad (7)$$

Итак, комплексные потенциалы искаженного поступательного потока в 1-ой и 2-ой областях фильтрации имеют вид:

$$w_1(z) = v_0 z + \frac{c_1}{z}, \quad c_1 = \gamma_1 + i\delta_1, \quad w_2(\zeta) = (a + ib)\zeta. \quad (8)$$

В частном случае, когда $\alpha = 0$ (главное направление анизотропии направлено вдоль скорости \vec{v}_0 потока на бесконечности), потенциалы (8) будут иметь вид

$$w_1(z) = v_0 \left(z + \frac{k - \lambda_1}{k + \lambda_1} \cdot \frac{R^2}{z} \right); \quad w_2(z) = \frac{2v_0 \sqrt{\lambda_2 \lambda_1}}{k + \lambda_1} \zeta; \quad \zeta = x + i \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} y. \quad (8')$$

Для других типов течений построить решения о влиянии на них круглого включения с прямолинейной анизотропией также просто не удаётся. Поэтому в подобных ситуациях отдельные точные решения приобретают самостоятельную ценность.

3.4. Исследования точности аппроксимации включений из слоистых сред их анизотропными моделями

Практические потребности теории фильтрации часто приводят к необходимости расчёта полей давления и скорости течения в слоистых средах. Кроме теории фильтрации необходимость расчёта полей в слоистых средах встречается и в других практических областях, например, в электротехнике.

В начале XX века для расчёта электростатических полей в таких средах Оллендорф предложил моделировать последние анизотропными. Однако вопрос о точности расчётов методом анизотропного эквивалентирования до сих пор до конца не исследован и требует дальнейшего изучения. Авторы, в частности, В.И. Аравин [2-6] ограничивались только лишь качественными соображениями, что в пределе, при стремлении к нулю толщин чередующихся изотропных слоёв, будем иметь анизотропную среду. Первые количественные оценки «скорости» достижения слоистой средой «анизотропного состояния» получил В.Н. Острейко. В [97] им был приведён такой пример, когда при послойном расчёте магнитостатического поля дальнейшее уменьшение толщин изотропных пластин уже технически не оправдано, а оценки характеристик поля по методике Оллендорфа все ещё приводят к большим погрешностям. На основании этого в [97] делается вывод о малой практической пригодности метода анизотропного эквивалентирования для расчёта статических полей в слоистых средах.

В настоящем параграфе указываются примеры расчёта фильтрационных течений в слоистых средах, в которых многослойная среда со стремлением к нулю толщин изотропных слоёв сравнительно быстро достигает своего «анизотропного» состояния, и поэтому расчёты интегральных характеристик стационарных плоскопараллельных векторных полей (фильтрационных, электрических) по методике Оллендорфа оказываются оправданными. Наличие таких примеров говорит о том, что вывод В. Н. Острейко о малой практической пригодности метода анизотроп-

ного эквивалентирования требует детального уточнения, в связи с чем в диссертации и проводятся подобные исследования.

3.4.1. Искажение плоскопараллельных течений круглым слоистым включением

Исследуем искажения плоскопараллельных фильтрационных течений в изотропной среде с проницаемостью k_0 круглым цилиндрическим включением радиуса R , представляющим собой совокупность вложенных друг в друга n трубочек с сечениями в виде колец толщиной $a=R/n$ (рис.18). Центральное кольцо вырождается при этом в круг, число колец – чётное, проницаемости колец с нечётными номерами k_1 , а с чётными – k_2 . Нумерация колец идет изнутри наружу - рис.18. В плоскости течения применяем декартовы координаты x, y с началом в центре включения, и полярные r, θ ; ($z = x + iy = re^{i\theta}$).

Пусть некоторое течение создаётся заданными точечными особенностями (источники, диполи и т.д.). Если бы круглое включение не отличалось от внешней среды (то есть $k_1=k_2=k_0$), то в плоскости xOy течение описывалось бы одним комплексным потенциалом $W_B(z)$. Но если $k_1 \neq k_2 \neq k_0$, то для описания течения нужно знать $(n+1)$ комплексных потенциалов: $W_m(z)$, $m = 1, 2, \dots, n$ для кольцевых зон и $W_{n+1}(z)$ - для внешней к включению области.

Будем рассматривать случай, когда все точечные особенности плоскопараллельного течения находятся за пределами круглого включения в области $|z| > R_1 > R$. Тогда каждый комплексный потенциал $W_m(z)$ будет аналитической в своей кольцевой области функцией и, следовательно, разложимой в ней в ряд Лорана. А именно:

$$W_1(z) = \varphi_1(x, y) + i\psi_1(x, y) = c_{11} + ic_{21} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{k1} + i\beta_{k1})z^k, \quad (1)$$

$$W_m(z) = \varphi_m(x, y) + i\psi_m(x, y) = c_{1m} + ic_{2m} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{k1} + i\beta_{k1})z^k + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{-km} + i\beta_{-km})z^{-k}, \quad (2)$$

где $m=2, 3, \dots, n$. Комплексный потенциал $W_{n+1}(z)$ течения в $(n+1)$ -ой области, находящейся за слоистым включением, найдём путём наложения на заданный ком-

плесный потенциал невозмущённого внешнего потока $W_B(z)$ функции $W(z)$, определяющей его искажение от включения. Поскольку само включение новых в области $|z| > R$ особых точек не даёт, то функция $W(z)$ при $|z| > R$ должна быть аналитической, и поэтому, представимой главной частью ряда Лорана. Окончательно для $W_{n+1}(z)$ в области $|z| > R$ получаем следующее выражение:

$$W_{n+1}(z) = W_B(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{-k,n+1} + i\beta_{-k,n+1})z^{-k} = \varphi_{n+1} + i\psi_{n+1} \quad (3)$$

Учитывая, что при $|z| < R_1$ функция $W_B(z)$ аналитическая, то в кольце $R < |z| < R_1$ комплексный потенциал $W_{n+1}(z)$ можно представить не только в виде (3), но и разложением в полный ряд Лорана

$$W_{n+1}(z) = q_{0,n+1} + ip_{0,n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} (q_{k,n+1} + ip_{k,n+1})z^k + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{-k,n+1} + i\beta_{-k,n+1})z^{-k} \quad (4)$$

Подчеркнем, что в отличие от (1) и (2) в (4) часть коэффициентов разложения известна - известны коэффициенты разложения $q_{0,n+1}, p_{0,n+1}, q_{k,n+1}, p_{k,n+1}$ в тейлоровской части ряда Лорана заданного комплексного потенциала $W_B(z)$ невозмущенного течения. В комплексных потенциалах (1)-(3) мнимые части $\psi_s(x,y)$ ($s=1,2,\dots,n+1$) представляют собой функции тока, а действительные $\varphi_s(x,y)$ связаны с приведённым давлением формулами $\varphi_s(x,y) = -\frac{k_s \cdot P}{\mu}$, где $k_s=k_1$ для всех нечетных s (кроме $s=n+1$, когда $k_s=k_0$) и $k_s=k_2$ для всех четных s .

Неизвестные в (1), (2) и (4) коэффициенты разложения находятся из граничных условий на поверхностях раздела слоёв с разными коэффициентами проницаемости по алгоритму, описанному в конце этого параграфа. Зная комплексные потенциалы, можно определить все интересующие нас характеристики искаженного включением плоскопараллельного фильтрационного течения. Например, величина потока $Q_{\text{мелк}}$ через диаметр АВ (рис.18) круглого слоистого включения, совпадающий с осью u -ов, будет равна

$$Q_{\text{мелк}} = \psi_{n+1}(0, R) - \psi_{n+1}(0, -R). \quad (5)$$

В частности, если поле обладает симметрией относительно оси x -ов и она является нулевой линией тока, то из (4) и (5) с учётом вычисленных по упомянутому алгоритму коэффициентов разложения найдём, что

$$Q_{\text{мелк}} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (1 - \mu_{2k+1, n}) \cdot q_{2k+1, n+1} R^{2k+1}, \quad (6)$$

где $q_{2k+1, n+1}$ - известные коэффициенты, а $\mu_{2k+1, n}$ вычисляются по алгоритму, описанному в конце параграфа. Приведём конкретные примеры расчётов величины $Q_{\text{мелк}}$.

Пример 1. Если изучается искажение *поступательного потока*, параллельного оси x -ов, то $W_B(z) = v_{\infty} \cdot z$, где $v_{\infty} = \text{const}$. Поэтому на основании (6) получим:

$$Q_{\text{мелк}} = 2 \cdot v_{\infty} \cdot R \cdot (1 - \mu_{1n}). \quad (7)$$

Пример 2. В случае течения, созданного *точечным источником*, расположенном на оси x -ов, $W_B(z) = \frac{q}{2\pi} \ln(z + b)$. Разложив $W_B(z)$ в области $|z| < b$ в ряд Тейлора и подставив коэффициенты найденного разложения в (6), получим:

$$Q_{\text{мелк}} = \frac{q}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot (1 - \mu_{2k+1, n}) \left(\frac{R}{b}\right)^{2k+1}. \quad (8)$$

Пример 3. В случае течения, созданного *диполем*, расположенным в точке $z = -b$ на оси x -ов и момент которого параллелен оси x -ов, $W_B(z) = \frac{m}{2\pi \cdot (z + b)}$. Как и выше, разлагая $W_B(z)$ в ряд Тейлора и подставляя найденные коэффициенты разложения в (6), получим:

$$Q_{\text{мелк}} = -\frac{m}{\pi b} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot (1 - \mu_{2k+1, n}) \left(\frac{R}{b}\right)^{2k+1}. \quad (9)$$

3.4.2. Сравнение фильтрационных потоков в слоистой среде и в её радиально-анизотропной модели

Слоистое включение на рис.18 естественно моделировать в расчётах как радиально-анизотропное, с ГНА, направленными по координатным линиям поляр-

ной системы координат. Главные проницаемости вдоль радиального и трансверсального направлений $\lambda_r = \lambda_{12}$ и $\lambda_\theta = \lambda_{22}$ в анизотропной модели будем определять в соответствии с методом локального однородно-анизотропного эквивалентирования по формулам (1.22): $\lambda_{12} = \frac{2k_1k_2}{(k_1 + k_2)}$ и $\lambda_{22} = \frac{(k_1 + k_2)}{2}$. Замена слоистого включения на его модель приводит к задачам обтекания фильтрационными потоками круглого однородного радиально-анизотропного включения в однородной изотропной среде. Именно эти задачи рассматривались в §3.2. Во всех трёх примерах в этом параграфе и в одноимённых примерах в §3.2 вычислялись фильтрационные потоки при одинаковых условиях через один и тот же диаметр АВ на рис.18. Полученные для потоков формулы (2.12) и (7), (2.14) и (8), (2.16) и (9) были использованы для сравнения величин $Q_{\text{мелк}}$ и $Q_{\text{ан}}$ в рассматриваемой слоистой среде и в её анизотропной модели. Результаты расчетов отношений $Q_{\text{мелк}}/Q_{\text{ан}}$ и относительных погрешностей δ (в процентах), возникающих при замене слоистой среды её радиально-анизотропной моделью, представлены в таблице 3.5.

Расчёты показали, что метод локального однородно-анизотропного эквивалентирования для оценки фильтрационных потоков имеет ограниченное применение. В частности, его применение на практике приведёт к большим погрешностям (см. в таблице 3.5 столбцы для числа слоёв $n=10, 20$ и 30) тогда, когда толщины чередующихся изотропных слоёв от характерного размера R составляют более 5%. Однако с уменьшением толщин слоёв (с ростом n) точность метода локального однородно-анизотропного эквивалентирования в оценке величин потоков растёт. В частности, при толщинах чередующихся изотропных слоев, составляющих $0,02R$ (когда $n=50$), погрешность в оценке потока методом анизотропного эквивалентирования не превышает $\approx 9...10\%$ даже тогда, когда $k_1/k_2 = 10^3$. При $a = 0,01R$ (когда $n = 100$) погрешность метода анизотропного эквивалентирования при k_1/k_2 не большем 10^3 не превышает $4...5\%$. Таким образом, для расчёта фильтрационных потоков, искажённых круглым слоистым включением, слоистую среду

в большинстве случаев (ориентировочно определяемых по приведенной таблице 3.5.) можно моделировать как радиально-анизотропную.

Таблица 3.5

Сравнение фильтрационных потоков в слоистой среде и её радиально-анизотропной модели. (В левых столбиках отношения $\frac{Q_{\text{мелк}}}{Q_{\text{аннз}}}$, в правых - относительная погрешность в расчётах потоков по методу локального однородно-анизотропного эквивалентирования).

$\frac{k_1}{k_2}$	$\frac{k_0}{\sqrt{k_1 \cdot k_2}}$	$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$	Вид поля	n = 10		n = 20		n = 30		n = 50		n = 80		n = 100	
				$\frac{Q_{\text{мелк}}}{Q_{\text{аннз}}}$	$\delta, \%$	$\frac{Q_{\text{мелк}}}{Q_{\text{аннз}}}$	$\delta, \%$	$\frac{Q_{\text{мелк}}}{Q_{\text{аннз}}}$	$\delta, \%$	$\frac{Q_{\text{мелк}}}{Q_{\text{аннз}}}$	$\delta, \%$	$\frac{Q_{\text{мелк}}}{Q_{\text{аннз}}}$	$\delta, \%$	$\frac{Q_{\text{мелк}}}{Q_{\text{аннз}}}$	$\delta, \%$
2	2,243	0,889	1	0,972	2,88	0,986	1,42	0,990	1,01	0,995	0,60	0,996	0,40	0,997	0,30
			2	1,099	9,00	1,048	4,58	1,032	3,10	1,019	1,86	1,011	1,09	1,009	0,89
			3	1,030	2,91	1,014	1,38	1,009	0,89	1,005	0,50	1,003	0,30	1,002	0,20
6	2,449	0,490	1	0,929	7,64	0,964	3,73	0,976	2,46	0,986	1,42	0,991	0,91	0,992	0,81
			2	1,003	0,30	1,001	0,10	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00
			3	0,996	0,40	0,999	0,1	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00
1/16	1	0,221	1	1,093	8,51	1,047	4,49	1,031	3,01	1,019	1,86	1,012	1,19	1,009	0,89
			2	1,066	6,19	1,032	3,10	1,022	2,15	1,013	1,28	1,008	0,79	1,007	0,70
			3	1,026	2,53	1,016	1,57	1,006	0,60	1,003	0,30	1,002	0,20	1,001	0,10
60	0,516	0,064	1	0,865	15,61	0,933	7,18	0,956	4,60	0,974	2,67	0,984	1,63	0,987	1,32
			2	0,887	12,74	0,945	5,82	0,964	3,73	0,978	2,25	0,986	1,42	0,989	1,11
			3	0,956	4,60	0,984	1,63	0,988	1,21	0,994	0,60	0,996	0,40	0,997	0,30
1000	0,316	0,004	1	0,618	61,81	0,793	26,10	0,863	15,87	0,919	8,81	0,950	5,26	0,961	4,06
			2	0,662	51,06	0,831	20,34	0,893	11,98	0,939	6,50	0,963	3,84	0,970	3,09
			3	0,758	31,93	0,928	7,76	0,970	3,09	0,987	1,32	0,992	0,81	0,993	0,70
0,001	0,316	0,004	1	1,209	17,29	1,143	12,51	1,106	9,58	1,069	6,45	1,045	4,31	1,036	3,47
			2	1,159	13,72	1,110	9,90	1,079	7,32	1,048	4,58	1,030	2,91	1,024	2,34
			3	1,163	14,02	1,087	8,00	1,051	4,85	1,022	2,15	1,011	1,09	1,008	0,79

1 – поступательный поток; 2 – источник; 3 – диполь; (b/R=1,2).

В заключение отметим, что в приведенных в параграфе примерах с ростом п слоистая среда гораздо быстрее достигала своего «анизотропного состояния», чем в ситуациях, рассмотренных В. Н. Острейко. В частности, вычисляя магнитный поток в квадратном сердечнике методом анизотропного эквивалентирования и методом послойного расчета (при n=50 и отношении проницаемостей равном 1000) в [97] получилась погрешность в 68% (см. табл. 6 и 7б в [97]). В данном параграфе для рассмотренных видов течений при том же числе слоёв и том же отношении проницаемостей, что и в [97], погрешность метода анизотропного экви-

валентирования равнялась $\approx 9\%$. Последнее позволяет сделать вывод, что метод анизотропного эквивалентирования приводит к приемлемым результатам в расчётах интегральных характеристик (связанных с потоками) тогда, когда изучается искажение статического поля ограниченной по размерам слоистой областью с гладкими границами. Такие области можно моделировать подходящими анизотропными средами. Если же расчётная область целиком слоистая, что и было в [97], то метод анизотропного эквивалентирования может приводить к большим погрешностям.

3.4.3. Расчет коэффициентов разложения для комплексных потенциалов изотропных колец

Неизвестные в (1), (2), (3) и (4) коэффициенты разложения найдем из граничных условий сопряжения:

$$\text{при } r = a \cdot s \quad \varphi_s / k_s = \varphi_{s+1} / k_{s+1} \quad \text{и} \quad \psi_s = \psi_{s+1}; \quad s = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (10)$$

которые представляют собой требования непрерывности на границах раздела сред приведённого давления и нормальной составляющей вектора скорости фильтрации. Отметим ещё, что комплексный потенциал $W_{s+1}(z)$, кроме (10), должен удовлетворять добавочному требованию: на бесконечности искаженное включением течение должно совпадать с невозмущенным. (Во всех рассмотренных конкретных случаях это условие на бесконечности выполнялось, в чем легко убедиться непосредственной проверкой).

Подставляя действительные и мнимые части (1), (2) и (4) в граничные условия (10) и приравнивая в правых и левых частях получающихся выражений свободные члены, а также коэффициенты при синусах и косинусах одинаковой кратности, получим цепочку бесконечно большого числа линейных уравнений относительно искомым неизвестных. Из этой цепочки находим:

$$c_{2m} = p_{0,n+1} \quad \text{для } m = 1, 2, \dots, n; \quad c_{1m} = \begin{cases} (k_1 / k_0) \cdot q_{0,n+1} & \text{для нечетных } n \\ (k_2 / k_0) \cdot q_{0,n+1} & \text{для четных } n \end{cases}, \quad (11)$$

а также получаем рекуррентные формулы, выражающие коэффициенты $\alpha_{ks}, \beta_{ks}, \alpha_{-ks}, \beta_{-ks}$ через $q_{k,n+1}$ и $p_{k,n+1}$. Расчётный алгоритм по этим рекуррентным формулам заключается в следующем.

1. Вычисляются вспомогательные коэффициенты μ_{km} по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{k1} &= \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}; \\ \dots\dots\dots \\ \mu_{k,m} &= \frac{(1 - \lambda) + \mu_{k,m-1} \cdot \left[\frac{(m-1)}{m} \right]^{2k} (1 + \lambda)}{(1 + \lambda) + \mu_{k,m-1} \cdot \left[\frac{(m-1)}{m} \right]^{2k} (1 - \lambda)}; \quad (m = 2, 3, \dots, n-1) \\ \dots\dots\dots \\ \mu_{k,n} &= \frac{1 - k_0/k_2 + \mu_{k,n-1} \left[\frac{(n-1)}{n} \right]^{2k} (1 + k_0/k_2)}{1 + k_0/k_2 + \mu_{k,n-1} \left[\frac{(n-1)}{n} \right]^{2k} (1 - k_0/k_2)} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

В (12) через λ обозначено $\lambda = \begin{cases} k_2/k_1, & \text{если } m \text{ нечетное} \\ k_1/k_2, & \text{если } m \text{ четное} \end{cases}$.

2. Вычисляются вспомогательные коэффициенты γ_{km} по формулам: $\gamma_{k1} = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, а остальные формулы для γ_{km} получаются из (12) замещением всех μ_{km} на γ_{km} (с сохранением указанных в (12) значений индексов).

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{k2} &= \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \alpha_{k1}; \\ \alpha_{-k2} &= \mu_{k1} a^{2k} \alpha_{k2}; \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{k,m+1} &= \frac{\alpha_{km}}{2} \left[(1 + \lambda) + \mu_{k,m-1} \left(\frac{m-1}{m} \right)^{2k} (1 - \lambda) \right]; \\ \alpha_{-k,m+1} &= \mu_{km} \cdot (am)^{2k} \alpha_{k,m+1}; \\ \dots\dots\dots \\ q_{k,n+1} &= \frac{\alpha_{kn}}{2} \left[\left(1 + \frac{k_0}{k_2} \right) + \mu_{k,n-1} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{2k} \left(1 - \frac{k_0}{k_2} \right) \right]; \\ \alpha_{-k,n+1} &= \mu_{kn} (an)^{2k} q_{k,n+1} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

3. Оставшиеся неизвестные $\alpha_{ks}, \beta_{ks}, \alpha_{-ks}, \beta_{-ks}$ через заданные коэффициенты $q_{k,n+1}$ и $p_{k,n+1}$ и вспомогательные параметры μ_{km} и γ_{km} , находятся из систем уравнений (13) и (14).

$$\left. \begin{aligned}
 \beta_{k_2} &= \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \beta_{k_1}; \\
 \beta_{-k_2} &= \gamma_{k_1} a^{2k} \beta_{k_2}; \\
 \dots\dots\dots \\
 \beta_{k,m+1} &= \frac{\beta_{km}}{2} \left[(1 + \lambda) + \gamma_{k,m-1} \left(\frac{m-1}{m} \right)^{2k} (1 - \lambda) \right]; \\
 \beta_{-k,m+1} &= \gamma_{km} \cdot (am)^{2k} \beta_{k,m+1}; \\
 \dots\dots\dots \\
 p_{k,n+1} &= \frac{\beta_{kn}}{2} \left[\left(1 + \frac{k_0}{k_2} \right) + \gamma_{k,n-1} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{2k} \left(1 - \frac{k_0}{k_2} \right) \right]; \\
 \beta_{-k,n+1} &= \gamma_{kn} (an)^{2k} p_{k,n+1}.
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Порядок решения системы уравнений (13) следующий: из предпоследнего уравнения по известному $q_{k,n+1}$ находим α_{kn} , затем по α_{kn} находим $\alpha_{k,n-1}$ и т.д. до α_{k_2} и α_{k_1} . Затем по значению α_{k_2} получаем α_{-k_2} , по α_{k_3} получаем α_{-k_3} и т.д. до α_{-kn} . Значение же $\alpha_{-k,n+1}$ находится из последнего уравнения системы (13) через $q_{k,n+1}$ непосредственно. Система (14) решается аналогично.

3.5. Исследование точности фильтрационных расчётов в слоистых средах методом однородно-анизотропного эквивалентирования

В этом параграфе, в отличие от предыдущего, анализируется ситуация, когда слоистая среда заполняет не часть, а всю область фильтрации. Естественно, оценки точности расчётов фильтрационных потоков, когда анизотропное эквивалентирование применяется ко всей расчётной области, отличаются от тех, когда оно применяется лишь к части расчётной области. Случай, когда метод однородно-анизотропного эквивалентирования применяется ко всей области фильтрации, проанализируем на примере расчёта течения жидкости в фильтрационном лотке, изображённом на рис.19. Для этого снова проводим сопоставительные расчёты полного фильтрационного потока в слоистой среде на рис.19 и, при тех же граничных условиях, в анизотропной модели слоистой среды. Применительно к рис.19 (когда в прямоугольной области фильтрации размещается целое число пар

чередующихся изотропных слоёв с одинаковой шириной и с проницаемостями k_1 и k_2) оба метода, локального и интегрального однородно-анизотропного эквивалентирования, для главных проницаемостей дают одни и те же значения: $\lambda_{\min} = \lambda_1 = \frac{2k_1k_2}{k_1 + k_2}$, $\lambda_{\max} = \lambda_2 = \frac{k_1 + k_2}{2}$, а ГНА всюду направлены по осям x и y декартовой системы координат (рис.19) и аналитически задаются функцией (2.5.13) в виде $\omega(z) = z$.

3.5.1. Расчёт полного фильтрационного потока в прямоугольной анизотропной области

Плоскопараллельное фильтрационное течение жидкости в среде с прямолинейной анизотропией $\omega(z) = z$ описывается комплексным потенциалом (2.5.14), который в рассматриваемом случае имеет вид

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = w(\zeta), \quad \text{где } \zeta = x + i\sqrt{\lambda_1/\lambda_2} \cdot y. \quad (1)$$

При этом $\varphi(x, y) = -\frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2} \cdot P}{\mu}$ и $\psi(x, y)$, являющиеся соответственно потенциалом скорости фильтрации и функцией тока, применительно к случаю, указанному на рис.19, должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\varphi|_{AB} = 0; \quad \varphi|_{CD} = -\frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2} \cdot \rho g T}{\mu}; \quad \psi|_{BC} = 0; \quad \psi|_{AD} = +Q, \quad (2)$$

где Q – полный фильтрационный поток, протекающий в лотке от AB к CD и подлежащий определению в процессе решения задачи. Из (2) видно, что область значений $w(\zeta)$ -прямоугольник, изображенный на рис.20. Таким образом, для отыскания $w(\zeta)$, описывающей плоскопараллельную фильтрацию в лотке с пористой анизотропной средой, необходимо найти функцию, реализующую конформное отображение прямоугольника на рис.20 на прямоугольник, получающийся из изображенного на рис.19 путем его растяжения вдоль оси y в $\sqrt{\lambda_1/\lambda_2}$ раз. (Этот получающийся при растяжении прямоугольник определяет область значений комплексного переменного ζ).

Конформное отображение одного прямоугольника на другой осуществлялось в четыре этапа. На первом этапе нижняя полуплоскость первого вспомогательного комплексного переменного τ (рис.21) отображалась конформно на растянутый прямоугольник BMDE (рис.19) (в соответствии с аналогичным примером в [78, 123]) при помощи эллиптического интеграла первого рода

$$\zeta = b \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-m^2\tau^2)}}, \quad (3)$$

где $b = \ell/K(m)$; $K(m)$ - полный эллиптический интеграл первого рода,

$$m = 4 \left\{ \frac{\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}} \right\}^2, \quad q = \exp \left(-\frac{\pi \cdot H}{\ell \cdot \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}} \right). \text{ Обращение эллиптического интеграла (3) да-}$$

ет хорошо изученную в математике функцию – эллиптический синус:

$$\tau = \operatorname{sn} \left(\frac{K(m) \cdot \zeta}{\ell}, m \right). \quad (4)$$

На втором этапе по формуле (4) вычислялись координаты τ_A и τ_C точек на плоскости τ , соответствующих значениям ζ_A и ζ_C точек A и C на рис.19. На третьем этапе нижняя полуплоскость плоскости τ конформно отображалась на нижнюю полуплоскость второго вспомогательного комплексного переменного t (рис.22) так, чтобы точки B и C отобразились в точки с координатами $t_B = -1$ и $t_C = +1$, а образы точек A и D отстояли от начала координат на одинаковом расстоянии $1/k$, где $0 < k < 1$. Такое отображение осуществляется с помощью дробно-линейной функции, однозначно определяемой соответствием трех точек A, B и C плоскости τ одноименным им точкам плоскости t :

$$\frac{\tau - \tau_A}{\tau - \tau_C} \cdot \frac{\tau_B - \tau_C}{\tau_B - \tau_A} = \frac{t + 1/k}{t - 1} \cdot \frac{-1 - 1}{-1 + 1/k}. \quad (5)$$

Неизвестный в последнем уравнении параметр k находится из требования отображения точки D на рис.21 в одноименную точку на рис.22. Решая получающуюся при этом требовании уравнение, для k найдем

$$k = \frac{(\sqrt{\rho+1}-1)^2}{\rho}, \text{ где } \rho = \frac{\tau_D - \tau_A}{\tau_D - \tau_C} \cdot \frac{\tau_C - \tau_B}{\tau_B - \tau_A}.$$

(Для указанного на рис.19 положения $\tau_B = -1$ и $\tau_D = 1/m$). На четвертом этапе нижняя полуплоскость плоскости t конформно отображалась на внутренность прямоугольника на рис.20 при помощи интеграла Шварца-Кристоффеля, имеющего вид (6):

$$w(t) = a \int_{i}^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} - \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot \rho g T}{\mu}, \text{ где } a = -\frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot \rho g T}{2 \cdot \mu \cdot K(k)}. \quad (6)$$

Формула (6) с учетом зависимостей (4) и (5) и определяет искомый комплексный потенциал $w(\zeta)$ плоскопараллельного течения в прямоугольной анизотропной области. Для определения с помощью найденного потенциала $w(\zeta)$ фильтрационного потока Q , заметим, что согласно рис.22 и рис.20 $w\left(-\frac{1}{k}\right) = i \cdot Q$.

Вычисляя интеграл (6) при $t = -1/k$ и сравнивая результат с указанной для $w(-1/k)$ величиной, найдем поток $Q_{\text{аниз}}$

$$Q_{\text{аниз}} = \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot \rho g T \cdot K(k')}{2\mu \cdot K(k)}, \quad (7)$$

где $K(k')$ - полный эллиптический интеграл первого рода при дополнительном

модуле $k' = \sqrt{1-k^2}$. Для частного случая, когда точка A совпадает с M и C совпадает с E (рис.19), для величины полного фильтрационного потока потока из (7) получим значение, равное

$$Q_0 = \frac{\lambda_1 \cdot \rho g T \cdot H}{2\mu \cdot \ell}. \quad (8)$$

Из (7) и (8) найдём, что безразмерные отношения фильтрационных потоков в рассматриваемой фильтрационной задаче определяются формулой

$$\frac{Q_0}{Q_{\text{аниз}}} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \frac{K(k)}{K(k')} \cdot \frac{H}{e} \quad (9)$$

Формула (9) в вычислительном эксперименте применялась для вычисления точных значений $Q_0/Q_{\text{аниз}}$ для различных отношений λ_1/λ_2 . Результаты расчётов по формуле (9) отражены в таблице 3.6.

Таблица 3.6

Результаты расчётов полных фильтрационных потоков $\frac{Q_0}{Q_{\text{мелк}}}$ в слоистой среде (рис.19) и в её анизотропной модели $\frac{Q_0}{Q_{\text{аниз}}}$. (В вычислительном эксперименте MBED – квадрат; $|AB| = |CD| = 0,5 \cdot H$).

Общее число слоев	2	4	10	20	30
Для $\lambda_1 / \lambda_2 = 0,1$ величина $Q_0 / Q_{\text{аниз}} = 1,139$					
$Q_0 / Q_{\text{мелк}}$	1,428	1,338	1,226	1,188	1,167
Погрешность $\delta, \%$	20,2	17,5	7,1	4,1	2,4
Для $\lambda_1 / \lambda_2 = 0,5$ величина $Q_0 / Q_{\text{аниз}} = 1,317$					
$Q_0 / Q_{\text{мелк}}$	1,449	1,397	1,341	1,328	1,321
Погрешность $\delta, \%$	9,1	5,7	1,8	0,8	0,3
Для $\lambda_1 / \lambda_2 = 0,75$ величина $Q_0 / Q_{\text{аниз}} = 1,396$					
$Q_0 / Q_{\text{мелк}}$	1,463	1,433	1,404	1,400	1,396
Погрешность $\delta, \%$	4,6	2,6	0,6	0,3	0,0

3.5.2. Расчет фильтрационного потока в слоистой области

Аналитический расчёт плоскопараллельного течения в слоистой области на рис.19 в общем случае встречает серьезные математические трудности. Исключением служит тот частный случай расположения границ АВ и CD, о котором говорилось выше. Если слоистая область содержит в этом частном случае целое число пар слоёв, то для фильтрационного потока в ней из простых аналитических расчётов получается значение, совпадающее с (8). В общем случае «послойное» решение задачи сводится к интегрированию системы уравнений Лапласа

$$\Delta \varphi_m(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (10)$$

для потенциалов $\varphi_m(x, y) = -\frac{k_m \cdot P}{\mu}$ всех изотропных слоёв (общее число которых обозначено через M) с проницаемостями k_m . Решения уравнений Лапласа на границах раздела слоёв Γ_m должны удовлетворять условиям сопряжения

$$\left. \frac{\varphi_m}{k_m} \right|_{\Gamma_m} = \left. \frac{\varphi_{m+1}}{k_{m+1}} \right|_{\Gamma_m} \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \right|_{\Gamma_m} = \left. \frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial x} \right|_{\Gamma_m}, \quad (11)$$

на всех непроницаемых участках условиям

$$\left. \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \right|_{y=-H} = \left. \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{AM} = \left. \frac{\partial \varphi_M}{\partial x} \right|_{CE} = 0, \quad (12)$$

и на границах CD и AB условиям

$$\varphi_1|_{AB} = 0; \quad \varphi_M|_{CD} = -\frac{k_M \cdot \rho g T}{\mu}. \quad (13)$$

Аналитическое решение задачи (10)-(13) встречает серьёзные математические трудности. Поэтому эта задача решалась численным методом - методом сеток [131, 135]. Для этого вся область MBED покрывалась равномерной квадратной сеткой узлов. Уравнения для потенциалов узлов, расположенных на границах BE, EC, MD и AM, выводятся из краевых условий на этих участках. Так, например, для узлов, расположенных на границе BE, выполняется условие $\partial \varphi / \partial x = 0$. Заменяя производную $\partial \varphi / \partial x$ её конечно-разностной аппроксимацией, для $\varphi(i, 0)$ получим

$$\varphi(i, 0) = -\frac{1}{3} \varphi(i, 2) + \frac{4}{3} \varphi(i, 1); \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (14)$$

где N - общее число узлов на стороне BE. (Аналогично получаются и записываются уравнения для узлов, расположенных на границах AM, MD, CE).

Для потенциалов $\varphi(i, j)$ узлов, лежащих на границах раздела слоёв и узлов, лежащих внутри изотропных слоёв, пользуемся известными конечно-разностными представлениями [131, 135]. Значения потенциалов в узлах, расположенных на границах AB и CD, известны (из граничных условий (13)).

Записывая уравнения для потенциалов каждого узла сетки, получим относительно $\varphi(i, j)$ систему линейных алгебраических уравнений. Особенность получающейся системы уравнений в том, что она с помощью простых алгебраических преобразований легко приводится к форме, пригодной для решения методом итераций – применялся метод Зейделя. Достаточные условия сходимости метода Зейделя оказываются при этом выполненными. (Выполнение достаточных условий сходимости достигалось за счёт того, что выражения для потенциалов граничных узлов на непроницаемых участках MD, AM, BE, CE подставляли в уравнения для внутренних узлов области, смежных с граничными). Для уравнений узлов, смежных с границами AB и CD, условия сходимости метода Зейделя удовлетворяются автоматически. Для повышения скорости сходимости итерационного процесса в вычислениях применяли ускоряющий множитель Либмана [131, 135].

Вычислив значения потенциала в узлах сетки затем можно определить полный фильтрационный поток $Q_{\text{мелк}}$. Для этого в каком-либо m -ом изотропном слое области фильтрации проводили сечение, параллельное границам MB и DE и вычисляли (численным методом по формуле Симпсона) вдоль этого сечения интеграл

$$Q_{\text{мелк}} = \int_{-H}^0 \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial x} \cdot dy = \int_{-H}^0 \frac{\varphi_{i+1}^{(m)} - \varphi_{i-1}^{(m)}}{2h} \cdot dy, \text{ где } \varphi_{i+1}^{(m)} \text{ и } \varphi_{i-1}^{(m)} \text{ – потенциалы на линии сече-$$

ния в выбранном m -ом слое, а h - шаг сетки. Последний интеграл, величина которого не должна зависеть от выбора места сечения, даёт полный фильтрационный поток $Q_{\text{мелк}}$ в слоистой среде. В действительности при расчётах $Q_{\text{мелк}}$ в качестве вычисленного значения этой величины бралось среднее арифметическое для 10 равномерно распределённых в области фильтрации сечений. По величине разброса значений потока по сечениям вокруг среднего арифметического определялась относительная погрешность расчёта $Q_{\text{мелк}}$. Заметим, что во всех расчётах относительная погрешность $Q_{\text{мелк}}$ не превышала 2%. Такая точность достигалась за счёт специального выбора шага сетки – проводились последовательные контрольные расчёты с уменьшением вдвое шага сетки. Расчёты показали, что для достижения

в расчётах $Q_{\text{мелк}}$ указанной точности на стороне BE слоистой области из k слоев ($k=10\dots30$) нужно размещать не менее $5k$ узлов; из 10 и менее слоев – 50...60 узлов.

Некоторые результаты расчётов потоков $Q_{\text{мелк}}$ в слоистой области и в её анизотропной модели приведены в таблице 3.6. Общее расположение границ АВ и CD для приведенных в таблице 3.6 расчётов соответствует указанному на рис.19, длины участков АВ и CD брались одинаковыми и равными половине стороны квадрата MBED.

Вычисления показывают, что в данном конкретном примере при слабой анизотропии, когда $\varepsilon = \lambda_1 / \lambda_2 = 0,75$, даже если слоистая среда состоит всего из двух слоев, она хорошо аппроксимируется анизотропной. При этом относительная погрешность δ расчётов потоков $\delta = \frac{|Q_{\text{мелк}} - Q_{\text{аниз}}|}{Q_{\text{мелк}}} \cdot 100\%$ не превышает 5%. При стремлении ε к нулю (когда проницаемости k_1 и k_2 изотропных слоёв все резче отличаются друг от друга) погрешность расчётов потоков в слоистых средах, моделируемых анизотропными, не будет превышать 5...7%, если: 1) при средней анизотропии, когда $\varepsilon = 0,5$, отношение $s/H \leq 0,17$ (что соответствует наличию в слоистом квадрате 3 или более пар изотропных слоев, через s обозначена ширина отдельного слоя); 2) при сильной анизотропии, когда $\varepsilon = 0,1$, отношение $s/H \leq 0,06$ (в слойчатом квадрате 9 или более пар изотропных полос). При соотношении $s/H \leq 0,03$ (в слойчатом квадрате 15 и более пар слоев) относительная погрешность расчетов интегральных характеристик методом аппроксимации слоистой среды анизотропной не превысит 3...5%, если $0,1 \leq \varepsilon < 1$.

Для случаев, когда длины участков АВ и CD больше половины стороны квадрата (большая часть линий тока при этом почти ортогональная границам раздела слоев) точность расчета потоков в слоистой среде методом аппроксимации её анизотропной оказывается ещё более высокой, чем в таблице 3.6.

Если же длины участков АВ и CD становятся меньше и меньше, то погрешность расчётов потоков рассматриваемым методом растёт и, начиная с длин около $0,3H$, составляет 15...20%.

Выводы по 3-ей главе. Рассмотренные примеры подтверждают, что со стремлением к нулю отношения a/L (a - толщина отдельного слоя в слоистой среде, L - характерный размер многослойной области фильтрации) величины таких интегральных характеристик, как поток, можно вычислять с достаточной для практики точностью, аппроксимируя в расчётах слоистые среды их анизотропными моделями. Такая аппроксимация существенно упрощает расчёты и приводит к удобному для анализа аналитическому решению задачи. При этом точность аппроксимации выше у метода интегрального, нежели у метода локального однородно-анизотропного эквивалентирования. Кроме того, точность метода однородно-анизотропного эквивалентирования тем выше, чем большая часть линий тока поля почти ортогональна (или, наоборот, почти параллельна) границам раздела изотропных слоев, составляющих слоистую среду. В проанализированных в 3-ей главе примерах, относящихся к абсолютно различным ситуациям, погрешность при оценке интегральных характеристик поля в слоистой среде, моделируемой анизотропной, не превышала 5% при широком диапазоне изменения коэффициента анизотропии ($0,1 \leq \lambda_{\text{мин}} / \lambda_{\text{макс}} < 1$), если $a/L \leq 0,03$.

ГЛАВА 4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПРИЗАБОЙНЫХ ЗОНАХ СКВАЖИН (ПЗС)

В 4-ой главе исследуются особенности фильтрации жидкости в призабойных зонах вертикальных скважин, работающих в плоскопараллельных пластах.

4.1. Причины выделения исследования течений в призабойных зонах скважин в самостоятельный раздел теории фильтрации

Призабойной зоной скважины (ПЗС) называют часть продуктивного пласта, непосредственно примыкающую к стволу скважины. В первом приближении ПЗС для изотропного пласта можно принять за круговую цилиндрическую область, ось симметрии которой – ось ствола скважины. Радиус ПЗС может составлять от $(2\div 3)\cdot r_{\text{скв}}$ до $(300\div 400)\cdot r_{\text{скв}}$, где $r_{\text{скв}}$ – радиус скважины. Для анизотропных пластов ПЗС в первом приближении можно принять за эллиптическую цилиндрическую область с осью симметрии, совпадающей с осью ствола скважины. Главные оси этой области совпадают с ГНА пласта в ПЗС.

Необходимость специального изучения особенностей фильтрации жидкости в ПЗС вызвана целым рядом причин.

1). Коэффициент проницаемости ПЗС может существенно отличаться от коэффициента проницаемости остальной части пласта (например, вследствие химической обработки ПЗС или вследствие образования глинистой корки в ПЗС [77, 92, 112, 113]). В связи с этим возникает необходимость в уточнении расчётов по интерференции скважин, учитывающих индивидуальные особенности всех ПЗС, что составило содержание исследований 5-ой главы.

2). В зависимости от физико-механических свойств пласта на практике применяют разнообразные конструкции скважинных фильтров и забоев, описанных в [10, 81, 84] и схематически представленных на рис.23 и 24. Технические особенности скважинных фильтров приводят к тому, что в ПЗС фильтрационный поток сильно отличается от плоскорадиального течения, и поэтому расчёты фильтрации для различных математических моделей ПЗС актуальны.

3). В ПЗС может произойти переход от линейного режима фильтрации к нелинейному. Поэтому применять уравнения линейной фильтрации ко всему пласту

можно не всегда и, следовательно, продолжение фильтрационного расчёта в ПЗС может идти с другими уравнениями, отличными от остальной части пласта.

4). Применение технологических операций вертикального и горизонтального гидроразрыва пласта [81, 84, 112] приводит к тому, что течение существенно отклоняется от плоскорадиального главным образом в ПЗС, что требует их детального исследования вблизи от скважины.

5). Работа скважины в условиях аномальных пластовых давлений приводит к образованию глинисто-песчаных пробок в скважине [31]. Такие пробки искажают плоскопараллельный поток к скважине так, что в ПЗС течение становится пространственным, поэтому вблизи скважины требуется его отдельное изучение.

Отличительной особенностью фильтрационных течений в ПЗС является то, что они, как правило, пространственные. Поэтому расчёт и анализ этих течений выполняется гораздо сложнее, чем плоскопараллельных. Во всех наиболее распространённых учебных пособиях [10, 16, 87, 103, 112, 229] для студентов нефтегазовых специальностей все вопросы, связанные с анализом сложных пространственных фильтрационных течений (течения к кольчатым и перфорационным фильтрам, течения к трещинам гидроразрыва и др.), излагаются на описательном уровне. Автор этой работы ставит цель - предложить приемлемый для решения инженерно-технических задач, а также для применения в учебном процессе приближённый аналитический метод исследования всех основных видов пространственных фильтрационных течений в ПЗС. Диссертант предлагает для исследования пространственных течений в ПЗС применять метод средневзвешенного потенциала (СВП). Ранее на него при решении конкретной задачи теории фильтрации обращал внимание В.Н. Николаевский [95]. Тем не менее в теории фильтрации метод СВП не нашёл широкого применения, хотя под другим названием (метод Хоу) он часто применяется в электротехнике [62, 98,99] для расчёта электрической ёмкости. Особенностью этого метода служит сочетание простоты физической идеи, на которой основан метод СВП, с возможностью применения классических методов решения краевых задач математической физики. Кроме того, этот метод приводит к приемлемым при-

ближёнными решениям, практически во всех случаях всегда с заниженной величиной фильтрационного потока \approx на 5-7%. Теоретическое объяснение таких свойств метода СВП даётся в [212]. Это свойство заниженности против точной получающейся по методу СВП величины фильтрационного потока позволяет подкорректировать полученные приближённые расчёты путём увеличения вычисленных значений \approx на 5-7%.

В следующих параграфах 4.5-4.7 и 4.10, 4.11 даются решения всех основных типов фильтрационных задач в ПЗС на основе единого подхода – применения метода СВП. Изложенные в этих параграфах решения позволяют делать прогностические расчёты при проектировании конструкции фильтра скважины, при проектировании числа и размеров трещин гидроразрыва в ПЗС и, кроме того, позволяют в случае их использования в учебном процессе поднять изложенные упомянутых выше вопросов с описательного уровня на теоретический.

Таким образом, исследования течений жидкости в ПЗС актуальны и составляют самостоятельный раздел теории фильтрации. Перечисленным проблемам и посвящена 4-я глава диссертации.

4.2. Влияние неопределённости в критериях существования линейного режима фильтрации на погрешность в расчётах дебитов скважин

При эксплуатации нефте- и газодобывающих скважин с большими удельными дебитами в их призабойных зонах (ПЗС) скорость фильтрации может превзойти критическую величину, за которой происходит нарушение линейного закона Дарси [8, 16, 24, 108, 228]. Поэтому в ПЗС течение может описываться нелинейными законами фильтрации – степенными, в частности, законом А.А. Краснопольского. В реальных условиях чёткой границы перехода от линейного к нелинейному режиму фильтрации нет. Разные авторы для этой границы перехода указывают разные критерии и разные числа Рейнольдса [16, 87, 112, 229]. В связи с этим в условиях сосуществования различных режимов фильтрации при расчётах дебитов скважин неминуемо появляется неустрани-

мая погрешность. В этом параграфе исследуется оценка такой погрешности и радиусы ПЗС с нелинейным режимом фильтрации.

4.2.1. Исследуем течение несжимаемой жидкости к центральной скважине с радиусом r_c в круговом пласте радиуса R . Радиус ПЗС, где происходит нарушение линейного режима фильтрации, обозначим через r_0 , ($r_c < r_0 < R$). За пределами ПЗС течение подчиняется линейному закону Дарси, и поэтому удельный приток жидкости к границе r_0 определяется по формуле Дюпюи

$$Q = \frac{2\pi k(P_{\Pi} - P')}{\mu \cdot \ln\left(\frac{R}{r_0}\right)}, \quad (1)$$

где P_{Π} и P' – давления на границах пласта и ПЗС соответственно, k - проницаемость пласта, μ - динамическая вязкость флюида. Пусть внутри ПЗС фильтрация подчиняется степенному закону

$$\frac{dp}{dr} = B \cdot v^{\alpha}, \quad (2)$$

где $\alpha > 1$. В частности, при $\alpha = 2$ имеем закон А.А.Краснопольского. Скорость фильтрации v в (2) можно выразить с помощью уравнения неразрывности через удельный дебит скважины Q по формуле $v = \frac{Q}{2\pi r}$, после чего из (2) получаем решение

$$P' - P_c = B \cdot \left(\frac{Q}{2\pi}\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \left[\frac{1}{r_c^{\alpha-1}} - \frac{1}{r_0^{\alpha-1}}\right], \quad (3)$$

в котором через P_c обозначено давление на поверхности ствола скважины. Уравнения (1) и (3) содержат три неизвестных величины: P' , Q и r_0 . Недостающее уравнение найдём из условия достижения числом Рейнольдса [16, 112, 229] $Re = \frac{v \cdot \sqrt{k} \cdot \rho}{\mu} \cdot f(m)$ критической величины $Re_{кр}$ на границе ПЗС с радиусом r_0 :

$$\frac{Q}{2\pi r_0} \cdot \frac{\sqrt{k} \cdot \rho}{\mu} \cdot f(m) = Re_{кр} \quad (4)$$

Здесь ρ – плотность флюида, $f(m)$ - функция пористости пласта, вид которой, как и значения $Re_{кр}$, разные авторы определяют по-разному. Именно неоднозначность в значениях $Re_{кр}$ и $f(m)$ приводит к неустранимым погрешностям в расчётах дебитов.

Система уравнений (1), (3), (4) для искомого дебита Q и радиуса ПЗС r_0 приводит к следующему расчётному алгоритму:

- вычисляем константы \tilde{Q}_0 , T , B , и \tilde{B} ;

$$\tilde{Q}_0 = \frac{2\pi k(P_{\Pi} - P_C)}{\mu \cdot \ln(R_0)}, \quad \text{где } R_0 = \frac{R}{r_C} \quad (5)$$

$$T = \frac{\tilde{Q}_0 \cdot \sqrt{k} \cdot f(m) \cdot \rho}{2\pi \cdot r_C \cdot \mu \cdot Re_{кр}}; \quad B = \left(\frac{f(m)}{Re_{кр}} \right)^{\alpha-1} \cdot k^{\frac{\alpha-3}{2}} \cdot \mu^{2-\alpha} \cdot \rho^{\alpha-1}; \quad (6)$$

$$\tilde{B} = B \cdot \left(\frac{\tilde{Q}_0}{2\pi} \right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{(\alpha-1) \cdot (P_{\Pi} - P_C) \cdot r_C^{\alpha-1}}; \quad (7)$$

- находим корень λ трансцендентного уравнения

$$\lambda = \frac{\ln(R_0)}{\ln\left(\frac{R_0}{\lambda T}\right)} \cdot \left[1 - \tilde{B} \cdot \lambda^{\alpha} + \frac{\tilde{B}}{T^{\alpha-1}} \cdot \lambda \right]; \quad (8)$$

- и, наконец, определяем Q и r_0 по формулам

$$Q = \lambda \cdot \tilde{Q}_0; \quad r_0 = \lambda T \cdot r_C \quad (9)$$

4.2.2. Исследуем теперь течение сжимаемой жидкости (идеального газа) к центральной скважине в круговом пласте. Все рассуждения остаются прежними, с тем лишь уточнением, что плотность флюида связана с давлением уравнением $\rho = a \cdot P$, где $a = \frac{\rho_{атм}}{P_{атм}}$ (рассматриваем изотермический режим течения). Опуская выкладки, аналогичные вышеприведённым, сразу дадим расчётный алгоритм:

- вычисляем константу \tilde{Q}_0 ,

$$\tilde{Q}_0 = \frac{\pi \cdot k \cdot P_{атм} \cdot (P_{оп}^2 - P_{ос}^2)}{\mu \cdot \ln(R_0)}; \quad P_{оп} = \frac{P_{\Pi}}{P_{атм}}; \quad P_{ос} = \frac{P_C}{P_{атм}}, \quad (10)$$

а T , B , и \tilde{B} после этого находим снова по формулам (6) и (7), в которых вязкость газа μ берётся для пластовых условий, а плотность газа ρ задаётся при

пластовой температуре и для давления в 1 т. атм. Затем находим корень λ трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned} (P_{oc})^{\alpha+1} + (P_{оп} - P_{oc}) \cdot \tilde{B} \cdot (\alpha + 1) \cdot \left(\lambda^\alpha - \frac{\lambda}{T^{\alpha-1}} \right) = \\ = \sqrt{\left[(P_{оп})^2 - \frac{\lambda \cdot \ln\left(\frac{R_0}{\lambda T}\right)}{\ln(R_0)} \cdot (P_{оп}^2 - P_{oc}^2) \right]^{\alpha+1}}, \quad (11) \end{aligned}$$

- после чего по формулам (9) определяем удельный объёмный дебит газа при пластовой температуре и при давлении в 1 т. атм., а также радиус ПЗС r_0 .

4.2.3. Расчётный алгоритм (5) - (9) использовался для оценки возможных погрешностей в расчётах дебитов нефтедобывающих скважин, вызванных неопределённостью критериев перехода к нелинейному режиму фильтрации. В вычислительном эксперименте в качестве исходных выбирались следующие данные: $R = 1$ км, $r_c = 10$ см, $k = 1D$ (дарси), пористость $m = 0,25$, $\mu = 1$ сантипуаз, $\rho = 1000$ кг/м³, $\alpha = 2$ (т.е. в ПЗС фильтрация описывалась законом А.А.Краснопольского). Для перечисленных данных и депрессии $P_{П} - P_{C} = 10$ т. атм. базисная величина Q_0 , с которой сравнивался удельный дебит скважины Q , имела значение $Q_0 = 58,597$ м³/сутки. Естественно, Q кроме как от депрессии ($P_{П} - P_{C}$) зависит также от числа $Re_{кр}$ и функции $f(m)$, которые определяют условия возникновения ПЗС с нелинейным режимом фильтрации.

В эксперименте задавались различные критерии перехода к нелинейному режиму – критерии Щелкачёва В.Н. $Re_{кр} = 1$, Миллионщикова М.Д. $Re_{кр} = 0,022$ и Котяхова Ф.И. $Re_{кр} = 0,20$ [16, 112]. Результаты расчётов Q/Q_0 представлены на диаграмме №1 (рис.25). На диаграмме №2 (рис.26) представлена неустранимая относительная ошибка в расчёте дебита нефтедобывающей скважины, если в качестве Q брать среднее арифметическое между минимальным и максимальным его возможными значениями, определяемыми на множестве всех допустимых критериев из уравнения (4). На следующей диаграмме №3 (рис.27) представлены погрешности в расчёте дебита, которые появляются при пренебрежении наличием ПЗС с нелинейным режимом фильтрации и применением закона Дарси ко всей об-

ласти течения. Радиусы же ПЗС с нелинейным режимом фильтрации для рассматриваемого случая представлены на диаграмме №4 (рис.28).

Результаты вычислений показывают, что: 1). Ощутимых погрешностей в расчётах дебитов нефтедобывающих скважин, вызванных только лишь неопределённостью критериев перехода к нелинейному режиму, но учитывающих ПЗС через любой конкретный критерий, нет. Относительная погрешность в расчётах дебита в таком случае не превышает 6% при очень высоких депрессиях и для слабовязких нефтей (диаграмма №2 на рис.26). Для нефтей со средней и сильной вязкостью режим фильтрации в ПЗС в большинстве практических условий сохраняется линейным. 2). Пренебрежение ПЗС с нелинейным режимом фильтрации приводит в расчётах к завышенному значению дебита нефтедобывающей скважины. Для большинства практических условий относительная ошибка, появляющаяся в этом случае, имеет порядок 3-5%, но для больших депрессий и при малой вязкости она может представить значимые величины (диаграмма №3 на рис.27). Экономически выгодно соблюдать такие режимы эксплуатации нефтедобывающих скважин, чтобы не появлялись ПЗС с нелинейными режимами течения. Последнее обусловлено тем, что темпы прироста дебита с увеличением депрессии при линейном режиме фильтрации выше, чем при наличии ПЗС с нелинейными режимами. 3). Размер r_0 ПЗС с нелинейным режимом не превышает $4r_{\text{скв}}$. Например, для приведённых в вычислительном эксперименте условий $r_0 < 40 \text{ см}$.

4.2.4. Алгоритм (10) - (11) применялся для оценки возможных погрешностей в расчётах дебитов газодобывающих скважин. В вычислительных экспериментах в качестве исходных выбирались следующие данные: $R = 10 \text{ км}$, $r_c = 10 \text{ см}$, $k = 0,1D$ (дарси), пористость $m = 0,20$, $\mu = 0,014 \text{ снз}$ (сантипуаз), $\rho = 1,25 \text{ кг/м}^3$, $\alpha = 2$ (т.е. в ПЗС фильтрация по-прежнему описывалась законом А.А.Краснопольского). Для этих данных и депрессии $P_{\Pi} - P_c = 10 \text{ т. атм.}$ базисная величина удельного дебита $Q_0 = 2021,399 \text{ м}^3/\text{сутки}$. Результаты вычислений дебитов Q/Q_0 для различных депрессий и различных критериев перехода к нелинейному режиму фильтрации представлены на диаграмме №5 (рис.29), на которой для указанных трёх значений чисел Рейнольдса все три графика фактически совпали друг с другом. Среднее

арифметическое между минимальной и максимальной величиной для дебита Q в 1-ом случае, когда по Щелкачёву В.Н. $Re_{кр} = 1$, по Миллионщикову М.Д. $Re_{кр} = 0,022$ и по Котяхову Ф.И. $Re_{кр} = 0,29$, даёт значение с относительной погрешностью, представленной на диаграмме №6 (рис.30). На этой же диаграмме представлены относительные погрешности в расчёте дебита Q , если взять другие значения чисел Рейнольдса: по Щелкачёву В.Н. $Re_{кр} = 12$, по Миллионщикову М.Д. и по Котяхову Ф.И. $Re_{кр} = 0,29$ (случай 2). На диаграмме №7 (рис.31) указаны погрешности в расчёте дебита, которые появятся, если пренебречь наличием ПЗС с нелинейным режимом и применить закон Дарси ко всей области фильтрации. Радиусы ПЗС с нелинейным режимом применительно к исходным данным 1-го случая указаны на диаграмме №8 (рис.32).

Результаты расчётов показывают, что: 1). В расчётах дебитов газодобывающих скважин относительные погрешности, вызванные только лишь неопределённостью в критериях существования линейного режима фильтрации, но учитывающих ПЗС по любому конкретному критерию, тоже не превосходят 6%. 2). В призабойных зонах газодобывающих скважин (в отличие от нефтедобывающих) фильтрация, как правило, подчиняется квадратичному закону А.А.Краснопольского. Неучёт ПЗС с нелинейным режимом фильтрации приводит в расчётах к заниженному значению дебита со значимыми погрешностями (диаграмма №7 на рис.31). 3). Радиусы ПЗС с нелинейным режимом фильтрации могут достигать величин до $50-60r_{скв}$ (например, для условий 1-го случая $r_0 \approx 500 - 600$ см).

Таким образом, для газодобывающих скважин в расчётах дебитов необходимо учитывать возможность появления ПЗС с нелинейным режимом фильтрации. Для нефтедобывающих скважин в ПЗС практически всегда фильтрация подчиняется линейному закону Дарси. Однако на больших удалениях от скважин, где скорости фильтрации нефти малы, могут проявляться другие эффекты нелинейных режимов течения – в частности, режимы с начальным сдвиговым градиентом давления.

4.3. Исследование фильтрации в призабойной зоне и в стволе нефтедобывающей скважины с гравийным фильтром

4.3.1. Постановка задачи. В нефтепромысловой практике применяются скважинные фильтры различных конструкций [10, 30, 81, 84, 134]. Гравийный скважинный фильтр представляет из себя наиболее простую и дешёвую конструкцию. Для его создания в открытую в продуктивном пласте часть ствола скважины засыпают крупнозернистый материал (например, гравий) и, для предотвращения выноса засыпки током нефти, в верхней части ствола у кровли пласта устанавливают пакер сетчатого типа. Принципиальная схема устройства гравийного скважинного фильтра представлена на рис.33.

Целью данного параграфа является вывод уравнений для расчета гидротехнических характеристик нефтедобывающей скважины с гравийным фильтром и анализ их решений. Подчеркнем, что в отличие от фильтров перфорационной конструкции [30, 81], гидротехнические свойства гравийных фильтров в известной литературе не исследовались.

4.3.2. Вывод основных уравнений

(А) Вывод интегро-дифференциального уравнения для давления в фильтре скважины

Будем рассматривать фильтрацию несжимаемой жидкости (нефти) к вертикальной скважине, эксплуатирующей горизонтальный пласт с мощностью b (рис.33). Поток жидкости внутри ствола скважины примем за одномерный, направленный вдоль оси z , т.е. радиальной составляющей течения внутри ствола скважины и неравномерностью потока по её сечению пренебрегаем. Поэтому вертикальную составляющую $u(z)$ скорости течения будем считать зависящей только от одной координаты z . Приведенное давление

$$P=p+\rho gz, \quad (1)$$

внутри скважины в первом приближении тоже считаем функцией только лишь координаты z . Связь между скоростью $u(z)$ и давлением P в гравийном фильтре скважины определяется из закона фильтрации

$$\frac{dP}{dz} = -f(u), \quad (2)$$

где $f(u)$ – заданная функция, удовлетворяющая условию $f(0)=0$. В частности, если в фильтре скважины фильтрация линейная, то

$$f(u) = \frac{\mu u}{k_2}. \quad (3)$$

Если в фильтре режим фильтрации подчиняется двучленному закону, то

$$f(u) = Au + Bu^2, \quad (4)$$

где A и B – некоторые экспериментально устанавливаемые положительные постоянные. Кроме (3), (4) под $f(u)$ могут пониматься и другие законы фильтрации, например степенные

$$f(u) = A \cdot u^\alpha. \quad (5)$$

Если функция $P(z)$ будет найдена, то с помощью (2) можно определить скорость $u(z)$, а следовательно и дебит скважины $Q = \pi \cdot r_c^2 \cdot u(b)$. Для вывода уравнения, которому должна удовлетворять функция $P(z)$, рассмотрим течение к скважине между двумя бесконечно близкими плоскостями z и $z+dz$ (рис.34). Течение жидкости между плоскостями z и $z+dz$ будем в первом приближении рассматривать как плоско-радиальное. Поэтому величину притока $dq(z)$ жидкости к части боковой поверхности ствола скважины, заключенной между z и $z+dz$, найдем по известной [7, 24, 68, 85, и др.] формуле Дюпюи:

$$dq(z) = \frac{2\pi k_1 \cdot (P_{\Pi} - P(z)) \cdot dz}{\mu \cdot \ln\left(\frac{R}{r_c}\right)}, \quad (6)$$

где P_{Π} – давление на контуре питания $r=R$, а $P(z)$ – давление в скважине. К величине $dq(z)$ добавляется поток со стороны поступающей снизу жидкости, равный $\pi \cdot r_c^2 \cdot u(z)$ (рис.34). Поэтому за одну единицу времени в участок скважины $[z, z+dz]$ поступает суммарный поток жидкости, равный $dq(z) + \pi \cdot r_c^2 \cdot u(z)$. Следовательно, в сечении скважины $z+dz$ вертикальная составляющая скорости потока будет равна

$$u(z+dz) = \frac{dq(z) + \pi r_c^2 \cdot u(z)}{\pi r_c^2} = u(z) + \frac{2k_1 \cdot (P_{\Pi} - P(z)) \cdot dz}{\mu \cdot r_c^2 \cdot \ln\left(\frac{R}{r_c}\right)}. \quad (7)$$

С другой стороны, величина скорости $u(z+dz)$ связана с распределением давления в стволе скважины по закону (2). Поэтому должно быть выполнено равенство

$$\frac{dP(z+dz)}{dz} = -f[u(z+dz)]. \quad (8)$$

Вычитая из (8) соответствующие части равенства (2), получим

$$\frac{dP(z+dz)}{dz} - \frac{dP(z)}{dz} = -\{f[u(z+dz)] - f[u(z)]\}. \quad (9)$$

Если теперь к обеим частям последнего выражения применить известную в математическом анализе теорему Лагранжа [61, 213] и перейти к пределу при $dz \rightarrow 0$, то из (9) с учетом равенства (7) получим:

$$\frac{d^2P(z)}{dz^2} = -\frac{2k_1 \cdot [P_{\Pi} - P(z)] \cdot f'[u(z)]}{\mu \cdot r_c^2 \cdot \ln\left(\frac{R}{r_c}\right)}. \quad (10)$$

(Штрих ' обозначает дифференцирование f по u). Уравнение (10) содержит две неизвестных функции: приведенное давление внутри ствола скважины $P(z)$ и скорость потока жидкости в стволе скважины $u(z)$. Поэтому для решения задачи еще нужно определить уравнение для $u(z)$. Чтобы найти $u(z)$ подсчитаем, пользуясь формулой (6), весь приток жидкости к скважине на участке $[0, z]$:

$$q(z) = \int_0^z dq(z) = \frac{2\pi k_1}{\mu \cdot \ln\left(\frac{R}{r_c}\right)} \cdot \int_0^z (P_{\Pi} - P(z)) dz. \quad (11)$$

Таким образом, через сечение z скважины должен проходить за единицу времени поток жидкости $q(z)$, но тогда средняя скорость течения жидкости $u(z)$ будет равна $\frac{q(z)}{\pi r_c^2}$, т.е.

$$u(z) = \frac{2k_1}{\mu \cdot r_c^2 \cdot \ln\left(\frac{R}{r_c}\right)} \cdot \int_0^z (P_{\Pi} - P(z)) dz. \quad (12)$$

Подставив (12) в (10), относительно неизвестной функции распределения давления $P(z)$ в стволе скважины получим одно интегро-дифференциальное уравнение. Для решения этого уравнения нужно еще дополнительно задать краевые условия на границах $z=0$ и $z=b$ активного участка скважины. В сечении на кровле пласта $z=b$ (рис.33) должно быть задано давление в скважине, поэтому

$$P|_{z=b}=P_c. \quad (13)$$

В сечении $z=0$ (на подошве пласта) нормальная составляющая скорости потока

$u(0)=0$, а следовательно, $\left. \frac{dP}{dz} \right|_{z=0} = -f[u(0)] = -f(0) = 0$. Поэтому

$$\left. \frac{dP}{dz} \right|_{z=0} = 0. \quad (14)$$

Таким образом, интегро-дифференциальное уравнение, получающееся при подстановке (12) в (10), должно интегрироваться совместно с краевыми условиями (13), (14).

После того, как функция $P(z)$ будет найдена, дебит Q скважины можно вычислить по формуле (11) при $z=b$:

$$Q = \frac{2\pi k_1}{\mu \cdot \ln\left(\frac{R}{r_c}\right)} \cdot \int_0^b (P_{\Pi} - P(z)) dz. \quad (15)$$

Формула (15) представляет собой уточнение классической формулы Дюпюи для дебита Q_0 совершенной центральной скважины

$$Q_0 = \frac{2\pi k_1 \cdot (P_{\Pi} - P_c) \cdot b}{\mu \cdot \ln\left(\frac{R}{r_c}\right)}. \quad (16)$$

Отношение Q/Q_0 , равное

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{b \cdot (P_{\Pi} - P_c)} \cdot \int_0^b (P_{\Pi} - P(z)) dz, \quad (17)$$

будет характеризовать величину погрешности, если для расчета дебита скважины с гравийным фильтром использовать формулу Дюпюи (16).

(Б) Вывод дифференциального уравнения для скорости течения в фильтре скважины

Более простой по сравнению с (10), (12) и удачно его дополняющий способ расчета гидротехнических характеристик скважины можно получить, если за основу взять распределение в её фильтре скорости течения $u(z)$. Поэтому в дополнение к (10), (12) выведем ещё дифференциальное уравнение для скорости фильтрации $u(z)$. Прежде всего заметим, что для производной $\frac{du}{dz}$ из формулы (7) с учетом (16) получается значение

$$\frac{du}{dz} = \frac{Q_0}{\pi \cdot r_c^2 \cdot b} \cdot \frac{P_{\Pi} - P(z)}{P_{\Pi} - P_c}. \quad (18)$$

Дифференцируя обе части (18) по z и учитывая формулы (2) и (16), для скорости фильтрации $u(z)$ получим уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{Q_0}{\pi \cdot r_c^2 \cdot b \cdot (P_{\Pi} - P_c)} \cdot f(u). \quad (19)$$

Дифференциальное уравнение (19) должно интегрироваться совместно с крайевыми условиями

$$u|_{z=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{du}{dz} \right|_{z=b} = \frac{Q_0}{\pi \cdot r_c^2 \cdot b}. \quad (20)$$

Первое из условий (20) означает, что нормальная составляющая скорости потока на подошве пласта отсутствует, а второе условие сразу следует из (18) при $z=b$. Для интегрирования уравнения (19) применяем известный прием – вводим подстановку

$$\frac{du}{dz} = G(u), \quad (21)$$

с помощью которой из (19) находим, что

$$G^2(u) = \frac{2Q_0}{\pi \cdot r_c^2 \cdot b \cdot (P_{\Pi} - P_c)} \cdot \int_0^u f(u) du + C_1, \quad (22)$$

где C_1 – произвольная постоянная. Для определения C_1 рассмотрим равенство (22) при $z=b$. Обозначим неизвестную скорость фильтрации при $z=b$ через u_* , т.е.

$$u_* = \frac{Q}{\pi \cdot r_c^2} = u(b), \quad (23)$$

где Q – дебит скважины с гравийным фильтром. Тогда с учетом второго краевого условия (20) для C_1 из (22) получим значение

$$C_1 = \frac{Q_0^2}{\pi^2 \cdot r_c^4 \cdot b^2} - \frac{2Q_0}{\pi \cdot r_c^2 \cdot b \cdot (P_{II} - P_C)} \cdot \int_0^{u_*} f(u) du. \quad (24)$$

Подставляя теперь (24) в (22) для вспомогательной функции $G(u)$ найдем выражение

$$G^2(u) = \frac{Q_0^2}{\pi^2 \cdot r_c^4 \cdot b^2} \left[1 - \frac{2\pi \cdot r_c^2 \cdot b}{Q_0 \cdot (P_{II} - P_C)} \cdot \int_0^{u_*} f(u) du \right]. \quad (25)$$

Теперь, когда $G(u)$ стала известной, с помощью (21) и первого условия (20) определим распределение скорости $u(z)$:

$$z = \frac{1}{A} \cdot \int_0^{u_*} \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{2}{A \cdot (P_{II} - P_C)} \cdot \int_u^{u_*} f(u) du}}, \quad (26)$$

где введено обозначение

$$A = \frac{Q_0}{\pi \cdot r_c^2 \cdot b}. \quad (27)$$

Для того, чтобы можно было применить (26) к расчету скорости $u(z)$ остается определить оставшуюся неизвестной постоянную u_* . Уравнение для u_* получим с помощью (26) при значении $z=b$. Учитывая (23), приходим к следующему уравнению для u_* :

$$A \cdot b = \int_0^{u_*} \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{2}{A \cdot (P_{II} - P_C)} \cdot \int_u^{u_*} f(u) du}}. \quad (28)$$

Из уравнения (28) вычислим u_* , а стало быть и дебит Q по формуле (23). Затем по формуле (26) можно будет найти распределение скорости $u(z)$ в фильтре скважины. Наконец, с помощью формул (18), (21) и (25) найдем распределение давления в стволе скважины по ее высоте:

$$\frac{P_{II} - P(z)}{P_{II} - P_C} = \sqrt{1 - \frac{2}{A \cdot (P_{II} - P_C)} \cdot \int_u^{u_*} f(u) du}. \quad (29)$$

Таким образом, задача о расчете гидротехнических характеристик скважины с гравийным фильтром оказалось полностью решенной.

4.3.3. Анализ работы гравийного фильтра при линейном режиме фильтрации

Рассмотрим случай, когда в скважине с гравийным фильтром обеспечивается линейный режим фильтрации. В этом случае функция $f(u)$ задается формулой (3), а уравнение (28) после вычисления интегралов примет вид:

$$\frac{Q_0}{\pi \cdot r_c^2} = \tilde{v} \cdot \ln \left| \frac{u_* + \tilde{v}}{\sqrt{\tilde{v}^2 - u_*^2}} \right|, \quad (30)$$

где введено обозначение

$$\tilde{v} = \sqrt{\frac{A \cdot k_2 \cdot (P_{II} - P_C)}{\mu}}. \quad (31)$$

Решая уравнение (30) для u_* найдем значение

$$\frac{u_*}{v_0} = \frac{2b}{r_c} \cdot h(x) \quad \text{где} \quad h(x) = \frac{th(x)}{x}. \quad (32)$$

В формуле (32) через x обозначена вспомогательная безразмерная переменная

$$x = \frac{b}{r_c} \sqrt{\frac{2k_1}{k_2 \cdot \ln\left(\frac{R}{r_c}\right)}}, \quad (33)$$

а через v_0 – масштабная постоянная с размерностью скорости фильтрации, вычисляемая с помощью формулы Дюпюи (16):

$$v_0 = \frac{Q_0}{2\pi \cdot r_c \cdot b} = \frac{k_1 \cdot (P_{II} - P_C)}{\mu \cdot r_c \cdot \ln\left(\frac{R}{r_c}\right)}. \quad (34)$$

Теперь, зная u_* , по формуле (23) находим дебит Q скважины с гравийным фильтром

$$\frac{Q}{Q_0} = h(x). \quad (35)$$

Распределение скорости фильтрации в скважине с гравийным фильтром по её высоте находим по формуле (26). После вычисления интегралов получим, что

$$\frac{u(z)}{v_0} = \frac{2b}{r_c} \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(x \cdot \frac{z}{b}\right)}{x \cdot \operatorname{ch}(x)}. \quad (36)$$

Распределение по высоте приведенного давления в скважине с гравийным фильтром находим по формуле (29). В результате расчетов получили, что

$$\frac{P(z)}{P_{\Pi}} = 1 - \left(1 - \frac{P_c}{P_{\Pi}}\right) \cdot \frac{\operatorname{ch}\left(x \cdot \frac{z}{b}\right)}{\operatorname{ch}(x)}. \quad (37)$$

Важной количественной характеристикой работы фильтра является распределение скорости фильтрации

$$v(z) = \frac{dq(z)}{2\pi \cdot r_c \cdot dz} = \frac{k_1 \cdot (P_{\Pi} - P(z))}{\mu \cdot r_c \cdot \ln\left(\frac{R}{r_c}\right)} \quad (38)$$

(формула (6) и рис.34) флюида по высоте внешней поверхности ствола скважины.

После подстановки в (38) формулы (37) для $v(z)$ получаем выражение

$$\frac{v(z)}{v_0} = \frac{\operatorname{ch}\left(x \cdot \frac{z}{b}\right)}{\operatorname{ch}(x)}. \quad (39)$$

Заметим, что формулы (35), (36) и (37) в случае линейного в стволе скважины с гравийным фильтром закона Дарси могут быть получены иначе. А именно, с помощью уравнений (10) и (12), которые при линейной фильтрации становятся независимыми друг от друга. Вследствие этого уравнение (10) будет обыкновенным дифференциальным уравнением, не вызывающим затруднений с его интегрированием.

Формулы (36) и (39) применены для вычисления фильтрационных чисел Рейнольдса в 1 и 2 областях (рис.33) с целью определения условий, обеспечивающих скважине с гравийным фильтром линейный режим фильтрации. Число Рейнольдса Re , как известно, вычисляется по формуле [16, 112]

$$Re = \frac{v \cdot \sqrt{k}}{\nu} \cdot f, \quad (40)$$

где v – скорость фильтрации; k – проницаемость среды; $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ – кинематический коэффициент вязкости флюида; f – множитель, зависящий, главным образом, от пористости m среды, а также от формы и шероховатости стенок поровых каналов и их извилистости. Разные авторы для f дают разные формулы. Так, Щелкачев В.Н., Миллионщиков М.Д., Котяхов Ф.И. и Требин Г.Ф. для f предлагают соответственно формулы [16, 112, 229]

$$f_{\text{Щ}} = \frac{10}{m^{2,3}}; \quad f_{\text{М}} = \frac{1}{m^{1,5}}; \quad f_{\text{КТ}} = \frac{4\sqrt{2}}{m^{1,5}}. \quad (41)$$

Для того, чтобы в области фильтрации был справедлив линейный закон Дарси требуется выполнение неравенства $Re < Re_{\text{кр}}$. Перечисленные авторы для определения верхней границы существования закона Дарси указывают не только разные формулы (41) для f , но и разные значения критического числа $Re_{\text{кр}}$. По Щелкачеву В.Н. $Re_{\text{кр}} = 1 \div 12$; по Миллионщикову М.Д. $Re_{\text{кр}} = 0.022 \div 0.6$; по Котяхову Ф.И. и Требину Г.Ф. $Re_{\text{кр}} = 0.2 \div 3.4$.

Подставляя в (40) скорость фильтрации $v(z)$ из (39), для чисел Рейнольдса Re_1 в 1-ой зоне области фильтрации (рис.33) на внешней поверхности ствола скважины получаем выражение

$$\frac{Re_1}{Re_0} = \frac{\text{ch}\left(x \cdot \frac{z}{b}\right)}{\text{ch}(x)} = \frac{v(z)}{v_0}, \quad (42)$$

где

$$Re_0 = \frac{v_0 \cdot \sqrt{k_1}}{\nu} \cdot f_1. \quad (43)$$

Формула (43) определяет значение числа Рейнольдса Re_0 на внешней поверхности ствола совершенной центральной скважины, для которой справедлива формула Дюпюи (16).

Если в (40) подставить скорость фильтрации $u(z)$ из (36), то получим значения чисел Рейнольдса Re_2 для течения в фильтре скважины (во 2-ой зоне области фильтрации):

$$\frac{Re_2}{Re_0} = \frac{2b}{r_c} \cdot \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \cdot \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(x \cdot \frac{z}{b}\right)}{x \cdot \operatorname{ch}(x)}. \quad (44)$$

Таблица 4.1. Режимы течения жидкости во внешней окрестности и внутри ствола скважины с гравийным фильтром при $r_{\text{СКВ}} = 0,1$ м; $R / r_{\text{СКВ}} = 5000$ м; $\rho = 850$ кг / м³; $m = 0,2$; $b / r_{\text{СКВ}} = 100$; $P_n - P_c = 10$ МПа;

k_1 , Д	μ , спз	k_1 / k_2						
		1,0	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
0,100	40							
0,100	10							
0,100	2						+++++++ ++	+++++++ ++
0,500	40							
0,500	10						+++++++ ++	+++++++ ++
0,500	2		+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++
0,750	40							
0,750	10					+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++
0,750	2	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	##### #
1,000	40							
1,000	10				+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++
1,000	2	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	##### #	##### #
1,500	40							+++++++ ++
1,500	10			+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++
1,500	2	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	##### #	##### #	##### #
2,000	40						+++++++ ++	+++++++ ++
2,000	10		+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++
2,000	2	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	##### #	##### #	##### #
3,000	40					+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++
3,000	10	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	##### #
3,000	2	+++++++ ++	+++++++ ++	+++++++ ++	##### #	##### #	##### #	##### #

Примечания:

- 1) Пустая ячейка указывает на линейный режим фильтрации по всей длине фильтра скважины; линейный режим фильтрации вблизи внешней поверхности ствола скважины.
- 2) Ячейка заполненная символом «+» указывает на переходный режим фильтрации (у подошвы пласта фильтрация линейная, у кровли – нелинейная).
- 3) Ячейка заполненная символом «#» указывает на нелинейный режим фильтрации по всей длине фильтра скважины.
- 4) Ячейка серого цвета обозначает, что вблизи внешней поверхности ствола скважины переходный режим фильтрации (от линейной фильтрации у подошвы пласта к нелинейной у его кровли).
- 5) Ячейка темно-серого цвета обозначает, что вблизи внешней поверхности ствола скважины существует нелинейный режим фильтрации по всей длине фильтра скважины.

Сопоставление формул (36) и (44) показывает, что

$$\frac{Re_2}{Re_0} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{u(z)}{v_0}}, \quad (45)$$

т.е. числа Рейнольдса Re_2 течения флюида в гравийном фильтре прямо пропорциональны скорости фильтрации $u(z)$ в стволе скважины. Формулы (35)-(39), (42) и (45) применялись для расчётов дебитов скважин с гравийным фильтром, для распределений давления и скорости фильтрации по высоте и для выявления условий существования линейного режима фильтрации. Результаты некоторых вычислений представлены в таблице 4.1 и на рис.35-39. По результатам вычислений можно сделать следующие выводы.

4.3.4. Выводы:

1). Если безразмерный параметр x , определяемый по формуле (21), принимает значение $x \leq 0.5$, то тогда:

- приведенное давление вдоль ствола скважины можно считать постоянным, равным P_c ;
- дебит центральной скважины можно вычислять по классической формуле Дюпюи;
- скорость фильтрации имеет равномерное распределение по всей длине ствола скважины.

2). Если $x > 0.5$, то приток флюида в скважину происходит неравномерно: у подошвы пласта скорости фильтрации ничтожно малы (застойная зона), а при приближении к кровле пласта скорости резко возрастают. Последнее может приводить к вымыву частиц породы пласта возле кровли в скважину. Приведенное давление может вдоль ствола изменяться в очень широких пределах, включая крайние пределы

изменения от P_{II} до P_C . Расчет дебита по формуле Дюпюи (16) в этих случаях приводит к сильно завышенным значениям.

3). Из таблицы 4.1 вытекает, что в ПЗС и в гравийном фильтре может наблюдаться пять различных режимов течений. По порядку распространения на практике это будут следующие режимы: линейный-линейный; линейный-переходный; переходный-переходный; переходный-нелинейный; нелинейный-нелинейный. Наиболее часто встречается первый режим (линейная фильтрация в ПЗС и линейная фильтрация в гравийном фильтре). Следующий линейный-переходный (линейный режим фильтрации в ПЗС и переходный от линейного у подошвы пласта к нелинейному у кровли пласта) режим течения встречается реже для фильтрации нефти и чаще для фильтрации воды. (Хотя, строго говоря, остальные четыре режима, получены из анализа линейного решения задачи, поэтому в отношении их вывод носит лишь прогностический характер). Остальные режимы будут встречаться ещё более редко.

4). Подчеркнем, что формулы (20), (22) и (24), полученные на основании (10) и (12), больше носят качественный характер. Нужно помнить, что в предложенной теории пренебрегли искривлением линий тока у ствола скважины. Поэтому значение выведенных формул (10) и (12) не столько в точных количественных оценках, сколько в том, что с их помощью удастся сравнительно просто выявить основные фильтрационные эффекты, вызванные взаимодействием потока флюида в ПЗС с течением в фильтре скважины.

4.4. Точное решение задачи фильтрации к скважине с гравийным фильтром при линейном законе Дарси

4.4.1 Постановка задачи

В задачах подземной гидромеханики при расчетах дебитов скважин поверхность их ствола принимается в качестве поверхности с постоянным значением приведенного давления [41, 44, 108, 109 и др.]. Так как напор $h = \frac{P}{\rho g}$ и потенциал

скорости фильтрации $\varphi = -\frac{kP}{\mu}$ лишь постоянными множителями отличаются от приведенного давления P , то поверхность ствола скважины в рассматриваемых расчетах в то же время принимается и за поверхность с постоянным напором H и за эквипотенциальную. Между тем для скважин, эксплуатирующих пласты большой мощности и обладающих большим дебитом, предположение о том, что поверхность её ствола эквипотенциальна, может приводить к заметным ошибкам в фильтрационных расчетах.

Впервые задача об учете градиента потенциала вдоль ствола скважины при расчете ее дебита для фильтров перфорационных конструкций ставилась в [253] и наиболее широко для совершенной скважины рассматривалась в [26]. Однако в [26, 253] вывод расчетного уравнения (схема вывода которого приведена также в [109]) для переменного вдоль ствола скважины расхода был основан на том, что напор на внешней стенке фильтра, т.е. на стволе скважины, считался постоянным. Подчеркнем, что такое допущение о постоянстве напора на поверхности ствола скважины не совместимо с неравномерным распределением скорости фильтрации по её высоте.

В этом параграфе автор даёт точное решение уравнений напорной фильтрации в осесимметричной постановке для фильтров, создаваемых способом гравийной набивки [134] и принципиальная схема которых приведена на рис.33. Полученное решение, в котором учитывается неравномерность распределения приведенного давления и скорости притока флюида по высоте фильтра, применено для точного расчета дебита нефтескважины.

4.4.2. Уравнения и граничные условия

Фильтрация флюида в областях 1 и 2 на рис.33 считается линейной, следующей закону Дарси.

$$\vec{v}_1 = \text{grad } \varphi_1 \quad ; \quad \varphi_1 = -\frac{k_1 P}{\mu} \quad (1)$$

$$\vec{v}_2 = \text{grad } \varphi_2 \quad ; \quad \varphi_2 = -\frac{k_2 P}{\mu} \quad (2)$$

Поскольку для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности для областей 1 и 2 имеет вид

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0, \quad (3)$$

то после подстановки (1) и (2) в (3) для φ_1 и φ_2 в цилиндрических координатах получаем одно и то же уравнение - уравнение Лапласа

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

В классической постановке задачи о дебите скважины круговая цилиндрическая поверхность AA_1B_1B (рис.33) принимается за эквипотенциальную: $\varphi_1|_{r=r_c} = \varphi_c = \text{const}$. В такой постановке для давления внутри проницаемого стакана AA_1B_1B (рис.33) по всей мощности пласта считается возможным принять гидростатический закон. В результате для дебита скважины получается следующая хорошо известная формула Дюпюи

$$Q_0 = \frac{2\pi k_1 b (P_{\Pi} - P_c)}{\mu \ln \left(\frac{R}{r_c} \right)}. \quad (5)$$

На самом же деле цилиндрическую поверхность AA_1B_1B фильтра считать эквипотенциальной нельзя. Действительно, движение флюида вдоль вертикальной оси z внутри фильтра (область 2 с проницаемостью k_2) обеспечивается за счет градиента потенциала и, следовательно, φ_1 и φ_2 на цилиндрической поверхности AA_1B_1B постоянными не являются.

Сформулируем теперь граничные условия для уравнений (4) в точной постановке задачи о дебите скважины. На круговой цилиндрической поверхности питания с радиусом R скорость фильтрации параллельна подошве и кровле пласта и не зависит от координаты z . Поэтому

$$\varphi_1|_{r=R} = \varphi_{\Pi} = \text{const}. \quad (6)$$

Поскольку кровля и подошва пласта непроницаемы, то при $r_c \leq r \leq R$

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right|_{z=b} = 0. \quad (7)$$

Во второй зоне области фильтрации ось Oz ствола скважины является линией тока течения. Поэтому $\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$. Внутри фильтра подошва пласта тоже непроницаема, поэтому при $0 \leq r \leq r_c$

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (8)$$

Скорость фильтрации в сечении A_1B_1 ствола скважины будем рассматривать как строго вертикальную и имеющую постоянную величину v_0 . Поэтому при $0 \leq r \leq r_c$

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right|_{z=b} = v_0 = \text{const}. \quad (9)$$

Чему равна величина v_0 - этот вопрос пока остается открытым, но если v_0 будет найдена, то объемный дебит скважины (отнесенный к единице времени) найдется по формуле

$$Q = \pi r_c^2 v_0. \quad (10)$$

Решения двух уравнений Лапласа на границе круговой цилиндрической поверхности AA_1B_1B областей 1 и 2 должны удовлетворять условиям непрерывности давления и нормальной к AA_1B_1B составляющей скорости фильтрации. Эти условия, в силу формул (1) и (2), будут иметь вид:

$$\left. \frac{\varphi_1}{k_1} \right|_{r=r_c} = \left. \frac{\varphi_2}{k_2} \right|_{r=r_c} \quad (11)$$

и

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right|_{r=r_c} = \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|_{r=r_c}. \quad (12)$$

После того как сформулированные краевые задачи для уравнений Лапласа (4) будут решены, можно будет подсчитать среднее значение $\langle \varphi_2 \rangle$ потенциала φ_2 в круговом сечении A_1B_1 ствола скважины:

$$\langle \varphi_2 \rangle = \frac{1}{\pi r_c^2} \iint_{(A_1B_1)} \varphi_2(r, b) \cdot r \cdot dr d\Theta = \frac{2}{r_c^2} \int_0^{r_c} \varphi_2(r, b) \cdot r \cdot dr. \quad (13)$$

Величина $\langle \varphi_2 \rangle$, найденная из (13), будет зависеть от v_0 . С другой стороны, в круговом сечении A_1B_1 бывает известным приведенное давление P_C , по которому $\langle \varphi_2 \rangle$ будет определяться, в соответствии с (2), по формуле

$$\langle \varphi_2 \rangle = -\frac{k_2 P_C}{\mu}. \quad (14)$$

Поэтому на основании уравнений (13) и (14) через известное значение P_C удастся вычислить скорость фильтрации v_0 , а затем по (10) и объемный дебит скважины.

Перейдем теперь к решению сформулированных краевых задач.

4.4.3 Расчет потенциала $\varphi_1(r, z)$

Решение уравнения (4) для функции φ_1 , удовлетворяющее граничным условиям (6) и (7), находится методом Фурье и имеет вид:

$$\varphi_1(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_n(r) \cos\left(\frac{\pi n z}{b}\right), \quad (15)$$

где $\tilde{R}_n(r)$ решение дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dr}(r\tilde{R}'_n(r)) - \lambda_n^2 r\tilde{R}_n(r) = 0, \quad (16)$$

а

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{b}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Если в формулах (15) и (16) выделить отдельно слагаемое для $n=0$, то, с учетом граничного условия (6), получим:

$$\varphi_1(r, z) = \varphi_{\Pi} + C_0 \ln\left(\frac{R}{r}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{R}_n(r) \cos\left(\frac{\pi n z}{b}\right). \quad (18)$$

В (18) функции $\tilde{R}_n(z)$ должны удовлетворять уравнению (16) и, для того чтобы удовлетворялось (6), граничному условию

$$\tilde{R}_n \Big|_{r=R} = 0. \quad (19)$$

С помощью подстановки

$$\xi = \lambda_n r = \frac{\pi n r}{b}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (20)$$

уравнение (16) приводится к виду $\tilde{R}_n''(\xi) + \frac{1}{\xi} \tilde{R}_n'(\xi) - \tilde{R}_n(\xi) = 0$, которое представляет собой уравнение для функций Бесселя [131, 135] мнимого аргумента $I_0(\xi)$ и $K_0(\xi)$. Поэтому общее решение уравнения (16) будет иметь вид [135]

$$\tilde{R}_n(r) = C_1 \cdot I_0\left(\frac{\pi n r}{b}\right) + C_2 \cdot K_0\left(\frac{\pi n r}{b}\right), \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (21)$$

Так как при $r = R$ должно выполняться условие (19), то C_1 и C_2 в (21) должны быть подчинены требованию $C_1 \cdot I_0\left(\frac{\pi n R}{b}\right) + C_2 \cdot K_0\left(\frac{\pi n R}{b}\right) = 0$, откуда получаем

$$C_1 = A \cdot K_0\left(\frac{\pi n R}{b}\right), \quad C_2 = -A \cdot I_0\left(\frac{\pi n R}{b}\right), \quad \text{где } A - \text{ произвольная постоянная. Таким образом,}$$

функция $\varphi_1(r, z)$ в первой зоне области фильтрации будет иметь вид:

$$\varphi_1(r, z) = \varphi_{II} + C_0 \ln\left(\frac{R}{r}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot w_n(r) \cdot \cos\left(\frac{\pi n z}{b}\right), \quad (22)$$

где

$$w_n(r) = \begin{cases} I_0\left(\frac{\pi n r}{b}\right); & K_0\left(\frac{\pi n r}{b}\right) \\ I_0\left(\frac{\pi n R}{b}\right); & K_0\left(\frac{\pi n R}{b}\right) \end{cases}, \quad (23)$$

а I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка.

4.4.4 Расчет потенциала $\varphi_2(r, z)$

Решение уравнения Лапласа для $\varphi_2(r, z)$ во второй зоне области фильтрации с проницаемостью k_2 будем искать в виде

$$\varphi_2(r, z) = \frac{v_0}{2b} \left(z^2 - \frac{1}{2} r^2 \right) + U(r, z). \quad (24)$$

После подстановки (24) в уравнение Лапласа (4) для $U(r, z)$ снова получим уравнение Лапласа:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (25)$$

Поскольку, как следует из (24), $\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{v_0 z}{b} + \frac{\partial U}{\partial z}$, то для выполнения условий (8) и

(9) придется потребовать, чтобы

$$\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=b} = 0. \quad (26)$$

Решение уравнения (25), удовлетворяющее условиям (26), ищем в виде

$$U(r, z) = D_0 \ln\left(\frac{r_c}{r}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(r) \cos\left(\frac{\pi n z}{b}\right) + \text{const}, \quad (27)$$

где D_0 и const — произвольные постоянные. После подстановки (27) в (25) для функций $\omega_n(r)$ получается уравнение $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega_n}{dr} \right) - \lambda_n^2 \omega_n = 0$, где $\lambda_n = \frac{\pi n}{b}$. Решение последнего уравнения, совпадающего с (16), уже известно и имеет вид

$$\omega_n(r) = C_1 \cdot I_0\left(\frac{\pi n r}{b}\right) + C_2 \cdot K_0\left(\frac{\pi n r}{b}\right). \quad (28)$$

Произвольные постоянные D_0 , C_1 и C_2 подберем так, чтобы $\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$, т.к. ось Oz

является линией тока. Из (24), (27) и (28) следует, что $\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = -\frac{v_0 r}{2b} - \frac{D_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{b}\right) \cdot \left[C_1 \cdot I_1\left(\frac{\pi n r}{b}\right) - C_2 \cdot K_1\left(\frac{\pi n r}{b}\right) \right] \cdot \cos\left(\frac{\pi n z}{b}\right)$. (Были использованы известные [131, 135] правила дифференцирования модифицированных функций Бесселя I_0 и K_0).

Для обращения в нуль $\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$ при $r=0$ потребуем, чтобы $D_0=0$ и $C_1 \cdot I_1(0) - C_2 \cdot K_1(0) = 0$.

Так как $I_1(0)=0$, а $K_1(0)=\infty$, то $C_2=0$, а C_1 — произвольная постоянная. Таким образом, окончательно для $\varphi_2(r, z)$ получаем следующее представление:

$$\varphi_2(r, z) = \frac{v_0}{2b} \left(z^2 - \frac{1}{2} r^2 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cdot I_0\left(\frac{\pi n r}{b}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n z}{b}\right) + \text{const}, \quad (29)$$

где D_n — произвольные постоянные.

4.4.5 Алгебраизация граничных условий сопряжения

Произвольные постоянные C_0 , C_n , v_0 , D_n и const в (22) и (29) подберем так, чтобы оказались выполненными граничные условия сопряжения (11) и (12). Граничное условие (11) приводит к равенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_1} \left(\varphi_{II} + C_0 \ln\left(\frac{R}{r_c}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot w_n(r_c) \cdot \cos\left(\frac{\pi n z}{b}\right) \right) = \\ = \frac{1}{k_2} \left(\frac{v_0}{2b} \left(z^2 - \frac{1}{2} r_c^2 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cdot I_0\left(\frac{\pi n r_c}{b}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n z}{b}\right) + \text{const} \right), \end{aligned}$$

которое удобно переписать в виде:

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi n z}{b}\right) = \frac{v_0 z^2}{2k_2 b}, \quad (30)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{k_1} \left(\varphi_{\Pi} + C_0 \ln\left(\frac{R}{r_c}\right) \right) + \frac{v_0 r_c^2}{4k_2 b} - \frac{\text{const}}{k_2}, \quad (31)$$

$$A_n = \frac{C_n}{k_1} w_n(r_c) - \frac{D_n}{k_2} I_0\left(\frac{\pi n r_c}{b}\right). \quad (32)$$

Если функцию $\frac{v_0 z^2}{2k_2 b}$ разложить в ряд Фурье по $\cos\left(\frac{\pi n z}{b}\right)$, то величины A_0 и A_n станут известными, и поэтому (31) и (32) будут уравнениями относительно C_n , D_n , C_0 и const . Недостающие уравнения даёт граничное условие (12). Вычисляя $\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}$ и

$\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$, получим:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = -\frac{C_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \left(\frac{\pi n}{b}\right) \cdot W_n(r) \cdot \cos\left(\frac{\pi n z}{b}\right), \quad (33)$$

где

$$W_n(r) = \begin{vmatrix} I_1\left(\frac{\pi n r}{b}\right); & -K_1\left(\frac{\pi n r}{b}\right) \\ I_0\left(\frac{\pi n R}{b}\right); & K_0\left(\frac{\pi n R}{b}\right) \end{vmatrix} \quad (34)$$

и

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = -\frac{v_0 r}{2b} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cdot \left(\frac{\pi n}{b}\right) \cdot I_1\left(\frac{\pi n r}{b}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n z}{b}\right). \quad (35)$$

С учетом формул (33) и (35) граничное условие (12) можно будет переписать в ви-

де: $-\frac{C_0}{r_c} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \left(\frac{\pi n}{b}\right) \cdot W_n(r_c) \cdot \cos\left(\frac{\pi n z}{b}\right) = -\frac{v_0 r_c}{2b} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cdot \left(\frac{\pi n}{b}\right) \cdot I_1\left(\frac{\pi n r_c}{b}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n z}{b}\right)$. Из

этого равенства для коэффициентов C_0 , C_n и D_n получаем следующие недостающие уравнения:

$$C_0 = \frac{v_0 r_c^2}{2b} \quad ; \quad C_n = \frac{I_1\left(\frac{\pi n r_c}{b}\right)}{W_n(r_c)} D_n. \quad (36)$$

Из тригонометрического ряда Фурье (30) для коэффициентов A_0 и A_n находим значения:

$$A_0 = \frac{v_0 b}{6k_2} \quad ; \quad A_n = \frac{2v_0 b}{k_2 \pi^2 n^2} (-1)^n. \quad (37)$$

Теперь из формул (31), (32), (36) и (37) видим, что

$$\frac{\text{const}}{k_2} = \frac{1}{k_1} \left(\varphi_{\Pi} + C_0 \ln \left(\frac{R}{r_c} \right) \right) + \frac{v_0 (3r_c^2 - 2b^2)}{12k_2 b}; \quad (38)$$

$$D_n = \frac{2v_0 b k_1 \cdot W_n(r_c) \cdot (-1)^n}{\pi^2 n^2 \left(w_n(r_c) \cdot I_1 \left(\frac{\pi n r_c}{b} \right) k_2 - W_n(r_c) \cdot I_0 \left(\frac{\pi n r_c}{b} \right) k_1 \right)}; \quad (39)$$

$$C_n = \frac{2v_0 b k_1 \cdot I_1 \left(\frac{\pi n r_c}{b} \right) \cdot (-1)^n}{\pi^2 n^2 \left(w_n(r_c) \cdot I_1 \left(\frac{\pi n r_c}{b} \right) k_2 - W_n(r_c) \cdot I_0 \left(\frac{\pi n r_c}{b} \right) \cdot k_1 \right)}. \quad (40)$$

После подстановок (38), (39), и (40) в формулы (22) и (29) для потенциалов $\varphi_1(r, z)$ и $\varphi_2(r, z)$ получаем следующие выражения:

$$\varphi_1(r, z) = \varphi_{\Pi} + \frac{v_0 r_c^2}{2b} \ln \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{2v_0 b}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot I_1 \left(\frac{\pi n r_c}{b} \right) \cdot w_n(r) \cdot \cos \left(\frac{\pi n z}{b} \right)}{n^2 \left[w_n(r_c) \cdot I_1 \left(\frac{\pi n r_c}{b} \right) \cdot \lambda - W_n(r_c) \cdot I_0 \left(\frac{\pi n r_c}{b} \right) \right]}, \quad (41)$$

где $\lambda = \frac{k_2}{k_1}$ и

$$\begin{aligned} \varphi_2(r, z) = & \lambda \left(\varphi_{\Pi} + \frac{v_0 r_c^2}{2b} \ln \left(\frac{R}{r_c} \right) \right) + \frac{v_0 (3r_c^2 - 2b^2)}{12b} + \frac{v_0}{2b} \left(z^2 - \frac{1}{2} r^2 \right) + \frac{2v_0 b}{\pi^2} \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot W_n(r_c) \cdot I_0 \left(\frac{\pi n r}{b} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi n z}{b} \right)}{n^2 \cdot \left[w_n(r_c) \cdot I_1 \left(\frac{\pi n r_c}{b} \right) \cdot \lambda - W_n(r_c) \cdot I_0 \left(\frac{\pi n r_c}{b} \right) \right]}. \quad (42) \end{aligned}$$

4.4.6 Вычисление дебита скважины

Для завершения расчетов остается вычислить среднее значение $\langle \varphi_2 \rangle$ по формуле (13). Для этого предварительно запишем $\varphi_2(r, b)$. Согласно (42) имеем

$$\varphi_2(r, b) = \lambda \left(\varphi_{\Pi} + \frac{v_0 r_c^2}{2b} \ln \left(\frac{R}{r_c} \right) \right) + \frac{v_0 (3r_c^2 + 4b^2)}{12b} - \frac{v_0 r^2}{4b} + \frac{2v_0 b}{\pi^2} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(r_c) \cdot I_0\left(\frac{\pi n r}{b}\right)}{n^2 \cdot \left[w_n(r_c) \cdot I_1\left(\frac{\pi n r_c}{b}\right) \cdot \lambda - W_n(r_c) \cdot I_0\left(\frac{\pi n r_c}{b}\right) \right]}. \quad (43)$$

Поскольку $\int_0^{r_c} r \cdot I_0\left(\frac{\pi n r}{b}\right) \cdot dr = \frac{b^2}{\pi^2 n^2} \cdot \int_0^{\left(\frac{\pi n r_c}{b}\right)} x \cdot I_0(x) \cdot dx = \frac{b^2}{\pi^2 n^2} x \cdot I_1(x) \Big|_0^{\left(\frac{\pi n r_c}{b}\right)} = \frac{b r_c}{\pi n} \cdot I_1\left(\frac{\pi n r_c}{b}\right)$, то

$$\int_0^{r_c} \varphi_2(r, b) \cdot r \cdot dr = \frac{\lambda r_c^2}{2} \left(\varphi_{\Pi} + \frac{v_0 r_c^2}{2b} \ln\left(\frac{R}{r_c}\right) \right) + \frac{v_0 r_c^2 (3r_c^2 + 4b^2)}{24b} - \frac{v_0 r_c^4}{16b} + \frac{2v_0 b^2 r_c}{\pi^3} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(r_c) \cdot I_1\left(\frac{\pi n r_c}{b}\right)}{n^3 \left[w_n(r_c) \cdot I_1\left(\frac{\pi n r_c}{b}\right) \cdot \lambda - W_n(r_c) \cdot I_0\left(\frac{\pi n r_c}{b}\right) \right]}. \quad (44)$$

Теперь на основании формулы (13) получаем, что

$$\langle \varphi_2 \rangle = \lambda \left(\varphi_{\Pi} + \frac{v_0 r_c^2}{2b} \ln\left(\frac{R}{r_c}\right) \right) + \frac{v_0 r_c^2}{8b} + \frac{v_0 b}{3} + \frac{4v_0 b^2}{\pi^3 r_c} S\left(\lambda, \frac{r_c}{b}, \frac{r_c}{R}\right), \quad (45)$$

где

$$S\left(\lambda, \frac{r_c}{b}, \frac{r_c}{R}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^3}; \quad (46)$$

$$A_n = \frac{W_n(r_c) \cdot I_1\left(\frac{\pi n r_c}{b}\right)}{w_n(r_c) \cdot I_1\left(\frac{\pi n r_c}{b}\right) \cdot \lambda - W_n(r_c) \cdot I_0\left(\frac{\pi n r_c}{b}\right)}. \quad (47)$$

С другой стороны, $\langle \varphi_2 \rangle$ вычисляется по формуле (14) через заданное значение давления P_C в сечении $A_1 B_1$ добывающей скважины. Это позволяет из (45) найти уравнение для оставшейся неизвестной величины v_0 :

$$\frac{k_2(P_{\Pi} - P_C)}{\mu} = \frac{v_0 r_c^2}{2b} \left[\lambda \ln\left(\frac{R}{r_c}\right) + \frac{1}{4} + \frac{2b^2}{3r_c^2} + \frac{8b^3}{\pi^3 r_c^3} S\left(\lambda, \frac{r_c}{b}, \frac{r_c}{R}\right) \right]. \quad (48)$$

Вычислив из (48) величину v_0 и подставив ее затем в (10), для объемного дебита скважины, эксплуатирующей пласт с мощностью b , получим:

$$Q = \frac{2\pi k_1 (P_{\Pi} - P_C) \cdot b}{\mu \cdot \left[\ln\left(\frac{R}{r_c}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2b^2}{3r_c^2} + \frac{8b^3}{\pi^3 r_c^3} S\left(\lambda, \frac{r_c}{b}, \frac{r_c}{R}\right) \right) \cdot \lambda^{-1} \right]}. \quad (49)$$

Отметим, что в частном случае, когда $k_2=k_1$ (т.е. когда $\lambda=1$), формула (49) даст формулу дебита скважины, плоским дном вскрывающей продуктивный пласт с конечной мощностью.

Из (49) вытекает, что влияние неравномерного распределения потенциала вдоль фильтра AA_1B_1B (рис. 1) можно учесть, если в классическую формулу Дюпюи ввести поправочный коэффициент β

$$Q = Q_0\beta, \quad (50)$$

где

$$\beta = \frac{\ln\left(\frac{R}{r_c}\right)}{\ln\left(\frac{R}{r_c}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2b^2}{3r_c^2} + \frac{8b^3}{\pi^3 r_c^3} S\left(\lambda, \frac{r_c}{b}, \frac{r_c}{R}\right)\right) \cdot \lambda^{-1}}, \quad (51)$$

а Q_0 — находится из формулы Дюпюи (5).

С помощью формул (46), (47) и (51) были вычислены значения поправочного коэффициента β для различных соотношений R/r_c , b/r_c и k_1/k_2 . Часть результатов расчетов представлена в таблице 4.2. Расчеты показали, что если отношение проницаемостей $k_1/k_2 < 10^{-6}$, то практически для всех значений R/r_c и b/r_c боковую стенку фильтра AA_1B_1B скважины при расчетах дебитов можно считать эквипотенциальной поверхностью. При этом, если мощность пласта $b/r_c \leq 500$, то относительная погрешность в расчетах дебитов не превысит 2,4%. Для отношения проницаемостей $k_1/k_2 > 10^{-5}$ заметную роль начинает играть мощность пласта. Для пластов малой мощности, когда $b/r_c < 50$ и $k_1/k_2 < 10^{-4}$ боковую поверхность фильтра скважины снова можно считать эквипотенциальной и погрешность расчетов при этом тоже не превысит 2,4%. Для пластов с мощностью $b/r_c > 100$ в расчетах дебитов уже нужно будет учитывать поправочный коэффициент β , приведенный в таблице. Для пластов большой мощности неучёт β может привести в расчетах дебитов к заметным ошибкам. Так, например, для $k_1/k_2 = 10^{-5}$, $b/r_c = 500$ и $R/r_c = 1000$ расчет дебита по формуле Дюпюи приведет к относительной ошибке в 22,7%. Приведенная таблица дает представление о том, в каких ситуациях расчеты дебитов скважин можно вы-

полнять в классической постановке задачи (считая стенку AA_1B_1B фильтра эквивалентной поверхностью), а когда нужен учет коэффициента β .

Таблица 4.2. Значения поправочного коэффициента β в формуле (50).
 Отношения проницаемостей k_1/k_2 : 1 – 1.0; 2 – 0.1; 3 – 0.01; 4 – 0.001; 5 – 0.0001;
 6 – 0.00001; 7 – 0.000001; 8 – 0.0000001

Отноше- ния R/r_c		Отношение мощности пласта к радиусу скважины b/r_c							
		10	20	50	100	200	300	500	1000
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1000	1	.3325	.1863	.0791	.0398	.0193	.0121	.0061	.0017
	2	.6452	.4138	.1915	.0996	.0503	.0334	.0195	.0085
	3	.9186	.7638	.4390	.2433	.1266	.0851	.0512	.0252
	4	.9905	.9637	.8219	.5807	.3326	.2284	.1393	.0699
	5	.9990	.9962	.9767	.9149	.7439	.5877	.3886	.2001
	6	.9999	.9996	.9976	.9905	.9633	.9219	.8151	.5566
	7	1.0000	1.0000	.9998	.9990	.9962	.9914	.9766	.9138
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9991	.9976	.9905
2000	1	.3541	.2013	.0863	.0437	.0212	.0133	.0067	.0019
	2	.6668	.4372	.2067	.1085	.0551	.0366	.0214	.0094
	3	.9255	.7806	.4627	.2614	.1375	.0929	.0560	.0276
	4	.9914	.9669	.8354	.6038	.3541	.2457	.1511	.0764
	5	.9991	.9965	.9788	.9221	.7617	.6107	.4116	.2158
	6	.9999	.9996	.9978	.9913	.9665	.9285	.8291	.5800
	7	1.0000	1.0000	.9998	.9991	.9965	.9922	.9787	.9210
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9992	.9978	.9913
3000	1	.3661	.2097	.0905	.0459	.0223	.0140	.0070	.0020
	2	.6782	.4500	.2154	.1137	.0579	.0385	.0225	.0098
	3	.9290	.7894	.4757	.2715	.1438	.0974	.0588	.0291
	4	.9918	.9686	.8425	.6162	.3661	.2555	.1579	.0801
	5	.9992	.9967	.9798	.9257	.7710	.6230	.4242	.2248
	6	.9999	.9997	.9979	.9918	.9682	.9319	.8363	.5926
	7	1.0000	1.0000	.9998	.9992	.9967	.9926	.9797	.9247
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9993	.9979	.9918
4000	1	.3743	.2157	.0935	.0474	.0231	.0145	.0073	.0021
	2	.6859	.4588	.2214	.1173	.0598	.0398	.0233	.0102
	3	.9313	.7952	.4845	.2786	.1482	.1005	.0608	.0301
	4	.9921	.9696	.8471	.6245	.3743	.2622	.1627	.0828
	5	.9992	.9968	.9805	.9281	.7772	.6312	.4329	.2310
	6	.9999	.9997	.9980	.9921	.9692	.9341	.8411	.6011
	7	1.0000	1.0000	.9998	.9992	.9968	.9928	.9804	.9271
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9993	.9980	.9920

Таблица 4.2.(Продолжение) Значения поправочного коэффициента β
в формуле (50).

Отношения проницаемостей k_1/k_2 : 1 – 1.0; 2 – 0.1; 3 – 0.01; 4 – 0.001; 5 – 0.0001;
6 – 0.00001; 7 – 0.000001; 8 – 0.0000001

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5000	1	.3805	.2202	.0957	.0487	.0237	.0149	.0075	.0022
	2	.6916	.4654	.2260	.1200	.0613	.0408	.0239	.0105
	3	.9329	.7995	.4911	.2839	.1516	.1029	.0624	.0309
	4	.9923	.9704	.8505	.6307	.3806	.2674	.1663	.0848
	5	.9992	.9969	.9810	.9298	.7817	.6374	.4394	.2357
	6	.9999	.9997	.9980	.9923	.9700	.9357	.8446	.6075
	7	1.0000	1.0000	.9998	.9992	.9969	.9930	.9809	.9289
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9993	.9980	.9923
10000	1	.3991	.2339	.1027	.0524	.0256	.0161	.0081	.0023
	2	.7080	.4849	.2400	.1286	.0660	.0440	.0258	.0113
	3	.9377	.8118	.5107	.3001	.1619	.1104	.0671	.0333
	4	.9929	.9726	.8602	.6487	.3992	.2830	.1775	.0911
	5	.9993	.9971	.9824	.9348	.7948	.6553	.4587	.2501
	6	.9999	.9997	.9982	.9928	.9722	.9403	.8546	.6259
	7	1.0000	1.0000	.9998	.9993	.9971	.9935	.9823	.9339
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9993	.9982	.9928
20000	1	.4167	.2472	.1096	.0561	.0274	.0173	.0087	.0025
	2	.7228	.5030	.2535	.1369	.0706	.0472	.0277	.0122
	3	.9418	.8226	.5288	.3156	.1720	.1177	.0718	.0357
	4	.9934	.9744	.8687	.6651	.4167	.2979	.1883	.0973
	5	.9993	.9973	.9836	.9391	.8064	.6715	.4768	.2640
	6	.9999	.9997	.9983	.9933	.9741	.9442	.8634	.6428
	7	1.0000	1.0000	.9998	.9993	.9973	.9940	.9836	.9382
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9994	.9983	.9933

4.5. Математическая модель работы фильтра каркасно-стержневой конструкции

Исследования течений к фильтрам скважин выполним методом СВП. Вначале рассмотрим каркасно-стержневой фильтр [30, 81].

Каркасно-стержневой фильтр состоит из чередующихся вертикальных щелей и непроницаемых стенок (рис.40). В силу симметрии поверхности AD и BC будут поверхностями тока. Круговая цилиндрическая поверхность CD , является эквипотенциальной поверхностью, на которой потенциал скорости фильтрации

$\varphi = -\frac{kP}{\mu}$ принимает заданное постоянное значение. В однородной изотропной

среде с проницаемостью k потенциал φ плоскопараллельной линейной фильт-

рации удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в полярных координатах r, θ выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (1)$$

Граничные условия для уравнения Лапласа (1), применительно к схеме фильтра на рис.40 имеют вид:

$$\varphi|_{r=R} = \varphi_{\Pi}, \quad \text{где } \varphi_{\Pi} = -\frac{kP_{\Pi}}{\mu} = \text{const}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \text{где } \theta_0 = \alpha + \beta, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{\substack{r=r_c \\ 0 \leq \theta \leq \alpha}} = 0, \quad (4)$$

$$\varphi \Big|_{\substack{r=r_c \\ \alpha \leq \theta \leq \theta_0}} = \varphi_c, \quad \text{где } \varphi_c = -\frac{kP_c}{\mu} = \text{const}. \quad (5)$$

Точное решение данной задачи можно получить методом конформного отображения. Однако, сохраняя единообразие подхода к исследованию работы фильтров всех рассматриваемых конструкций сейчас, на примере этой задачи, покажем как применяется метод СВП [62, 95, 98, 99]. Суть этого метода в том, что вместо точного граничного условия (5) будем удовлетворять приближенному граничному условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{\substack{r=r_c \\ \alpha \leq \theta \leq \theta_0}} = -V_0 = \text{const}, \quad (6)$$

где V_0 - некоторая пока неизвестная постоянная (знак минус в (6) поставлен ввиду того, что течение жидкости направлено к центру скважины). Эту постоянную будем подбирать так, чтобы среднее значение потенциала на границе BE удовлетворяло условию

$$\langle \varphi \rangle \Big|_{\substack{r=r_c \\ \alpha \leq \theta \leq \theta_0}} = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\theta_0} \varphi(r_c, \theta) d\theta = \varphi_c. \quad (7)$$

Итак, условие (5) будет выполняться приближенно для своего среднеарифметического значения. Решение уравнения Лапласа (1) удовлетворяющее условиям (2), (3), (4), (6), находится методом разделения переменных и имеет вид:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{V_0 r_c}{\theta_0} \cdot \left(\beta \cdot \ln \tau + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\tau^{-\lambda_n} - \tau^{\lambda_n}] \cdot \sin(\lambda_n \alpha)}{\lambda_n^2 \cdot [\tau_0^{-\lambda_n} + \tau_0^{\lambda_n}]} \cdot \cos(\lambda_n \theta) \right) + \varphi_{II}, \quad (8)$$

где $\lambda_n = \frac{n\pi}{\theta_0}$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $\tau = \frac{R}{r}$ и $\tau_0 = \frac{R}{r_c}$ безразмерные величины. Неизвестную V_0

найдем, вычисляя осредненное на дуге BE значение потенциала. Для этого подставим полученное значение потенциала (8) в формулу (7), из которой найдем что

$$V_0 = \frac{\beta \theta_0}{r_c} \cdot [\varphi_c - \varphi_{II}] \cdot \left(\beta^2 \cdot \ln \tau_0 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_0^{-\lambda_n} - \tau_0^{\lambda_n}}{\tau_0^{-\lambda_n} + \tau_0^{\lambda_n}} \cdot \frac{\sin^2(\lambda_n \alpha)}{\lambda_n^3} \right)^{-1} \quad (9)$$

Дебит скважины через найденное значение скорости фильтрации V_0 рассчитывается по формуле

$$Q = N \cdot V_0 \cdot S = 2\pi \frac{kH}{\mu} \cdot \frac{P_{II} - P_c}{\ln \frac{R}{r_c} + \frac{1}{2} \lambda}, \quad (10)$$

где N - количество щелей, $S = 2 \cdot r_c \cdot \beta \cdot H$ - площадь щели, H - высота щели (фильтра),

$$\lambda = -\frac{4}{\beta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r_c}{R}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{R}{r_c}\right)^{\lambda_n}}{\left(\frac{r_c}{R}\right)^{\lambda_n} + \left(\frac{R}{r_c}\right)^{\lambda_n}} \cdot \frac{\sin^2\left(\lambda_n \left[\frac{\pi}{N} - \beta\right]\right)}{\lambda_n^3} \quad \text{и} \quad \lambda_n = N \cdot n \quad (11)$$

Напомним, что для практических расчетов по формуле (10) получающееся значение дебита Q нужно, в силу особенностей метода СВП, увеличить приблизительно на 7%.

Точное решение задачи о каркасно-стержневом фильтре в [102] получено В.П. Пилатовским. Его решение тоже приводит к формуле (10), но с коэффициентом $\lambda = \lambda_{\text{Пл}} = -\frac{4}{N} \ln \sin \frac{N\beta}{2}$. Сопоставительный анализ приближённого и точного решений (рис.41) показал, что результаты совпадают с удовлетворительной точностью и, в соответствии с особенностями метода СВП, формула (10) с коэффициентом λ из (11) даёт заниженное значение дебита \approx на 7-8%. (Здесь и далее корректировки решения методом СВП в сторону увеличения вычисленного фильтрационного потока на 5-7% не делается). Выведенная формула (10) отражает тенденцию

роста дебита при увеличении скважности – отношения суммарной площади щелей (отверстий) фильтра к площади поверхности ствола скважины. Однако, что не маловажно, при увеличении скважности прочность фильтра уменьшается. Поэтому необходимо выбрать такую скважность, при которой фильтр имеет достаточно большую пропускную способность и обладает необходимой прочностью. По расчётам по формуле (10) с коэффициентом λ (11) и по формуле (10) с коэффициентом $\lambda_{пл}$ работы [102] получается, что дебит приближается к максимальным значениям начиная со скважности 50%. Поэтому на основании проведенных расчётов можно рекомендовать использование фильтров каркасно-стержневой конструкции со скважностью 50-60%, т.к. дальнейшее увеличение скважности уже значительно прироста дебита не даёт, зато снижает прочностные качества этой конструкции. Результаты опытно-промышленных испытаний [84, 81] приводят к аналогичным выводам – рекомендуется фильтры каркасно-стержневой конструкции применять со скважностью от 50% до 63%.

4.6. Математическая модель работы фильтра кольчатой конструкции Кольчатый фильтр [30, 81] состоит из чередующихся горизонтальных щелей и непроницаемых колец (рис.42). В силу симметрии области течения поверхности AD и BC можно рассматривать как поверхности тока. Круговая цилиндрическая поверхность CD , является эквипотенциальной поверхностью, на ней потенциал скорости фильтрации равен некоторой заданной постоянной. Задача сводится к решению уравнения Лапласа (1) относительно потенциала $\varphi(r, z)$ в цилиндрических координатах.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

Граничные условия в области $ABCD$ (рис.42) для уравнения (1) имеют вид:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=z_0} = 0, \quad (2)$$

$$\varphi|_{r=R} = \varphi_{п}, \quad \text{где } \varphi_{п} = -\frac{kP_{п}}{\mu} = \text{const}, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=r_c, \ell_m \leq z \leq z_0} = 0, \quad (4)$$

$$\varphi \Big|_{r=r_c, 0 \leq z \leq \ell_m} = \varphi_c, \quad \text{где } \varphi_c = -\frac{kP_c}{\mu} = \text{const}. \quad (5)$$

Для решения данной задачи снова применим метод СВП. Для этого точное граничное условие (5) заменим на другое, приближённое граничное условие (6)

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=r_c, 0 \leq z \leq \ell_m} = -V_0 = \text{const}, \quad (6)$$

где V_0 – некоторая пока неизвестная постоянная (знак минус в (6) поставлен потому, что течение жидкости направлено к центру скважины). Постоянную V_0 в соответствии с методом СВП подбираем так, чтобы среднее значение потенциала на границе AE удовлетворяло условию

$$\langle \varphi \rangle \Big|_{r=r_c, 0 \leq z \leq \ell_m} = \frac{1}{\ell_m} \int_0^{\ell_m} \varphi(r_c, z) dz = \varphi_c. \quad (7)$$

Решение уравнения Лапласа (1) удовлетворяющее граничным условиям (2), (3), (4), (6) находится методом разделения переменных и имеет вид:

$$\varphi(r, z) = \frac{V_0}{z_0} \cdot \left(r_c \cdot \ell_m \cdot \ln \frac{R}{r} - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(r)}{a'_n(r_c)} \cdot \frac{\sin(\lambda_n \ell_m) \cos(\lambda_n z)}{\lambda_n} \right) + \varphi_{II}, \quad (8)$$

где $\lambda_n = \frac{n\pi}{z_0}$, $a_n(r) = \begin{vmatrix} I_0(\lambda_n r); & K_0(\lambda_n r) \\ I_0(\lambda_n R); & K_0(\lambda_n R) \end{vmatrix}$, $a'_n(r) = \begin{vmatrix} \lambda_n \cdot I_1(\lambda_n r); & \lambda_n \cdot K_1(\lambda_n r) \\ I_0(\lambda_n R); & K_0(\lambda_n R) \end{vmatrix}$, I_0, I_1 - модифицированные функции Бесселя, K_0, K_1 - функции Макдональда [131]. Подставляя полученное значение потенциала (8) в формулу (7), найдем что

$$V_0 = \ell_m \cdot z_0 \cdot [\varphi_c - \varphi_{II}] \cdot \left(r_c \cdot \ell_m^2 \cdot \ln \frac{R}{r_c} - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(r_c)}{a'_n(r_c)} \cdot \frac{\sin^2(\lambda_n \ell_m)}{\lambda_n^2} \right)^{-1}. \quad (9)$$

Дебит скважины для кольчатого фильтра через найденное значение скорости фильтрации V_0 рассчитывается по формуле

$$Q = N \cdot V_0 \cdot 2\pi r_c \cdot 2\ell_m = N \cdot V_0 \cdot S = 2\pi \cdot \frac{kH}{\mu} \cdot \frac{P_{II} - P_c}{\ln \frac{R}{r_c} + \frac{1}{2} \lambda}, \quad (10)$$

где N - количество щелей, $S = 2\pi \cdot r_c \cdot 2\ell_m$ - площадь щели, H - высота фильтра,

$$\lambda = -\frac{4}{r_c \cdot \ell_m^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(r_c)}{a'_n(r_c)} \cdot \frac{\sin^2(\lambda_n \cdot \ell_m)}{\lambda_n^2} . \quad (11)$$

Вычислительные эксперименты, выполненные на основе выведенных формул (10) и (11), показывают, что дебит возрастает при увеличении скважности фильтра и приближается к асимптотическому значению при 20-30% скважности (рис.43). Поэтому практической необходимости в фильтрах кольчатой конструкции с более высокой скважностью нет. Опытно-промышленные испытания также рекомендуют применять фильтры кольчатой конструкции со скважностью от 20% до 30% [30, 81]. Таким образом, выводы, построенные на методе СВП, приводят к действительным результатам.

4.7. Математическая модель работы фильтра перфорационной конструкции

Фильтры перфорационной конструкции [30, 81] содержат отверстия сделанные на непроницаемой круговой цилиндрической поверхности и расположенные в шахматном или рядном порядке (рис.44). Применим метод СВП к решению задачи расчета дебита для рядного расположения перфорационных отверстий, имеющих две перпендикулярные оси симметрии, одна из которых параллельна оси скважины. К таким отверстиям относятся прямоугольник, круг, эллипс и другие (рис.44). В силу этой симметрии поверхности $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, AA_1B_1B и DD_1C_1C будут поверхностями тока. Круговая цилиндрическая поверхность AA_1D_1D , является эквипотенциальной поверхностью, на которой потенциал скорости фильтрации φ равен заданной постоянной. Как и в двух предыдущих параграфах, задача сводится к решению уравнения Лапласа в цилиндрических координатах

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 , \quad (1)$$

при следующих граничных условиях:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=h} = 0 , \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0 , \quad (3)$$

$$\varphi(R, \theta, z) = \varphi_{\Pi}, \quad \text{где } \varphi_{\Pi} = -\frac{kP_{\Pi}}{\mu} = \text{const}, \quad (4)$$

$$\begin{cases} \varphi(r_c, \theta, z) = \varphi_c, & \text{внутри области } \sigma, \\ \left. \frac{\partial \varphi(r, \theta, z)}{\partial r} \right|_{r=r_c} = 0, & \text{вне области } \sigma, \end{cases} \quad (5)$$

где $\varphi_c = -\frac{kP_c}{\mu} = \text{const}$. В соответствии с методом СВП заменим точное граничное условие (5) на новое граничное условие

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \varphi(r, \theta, z)}{\partial r} \right|_{r=r_c} = -V_0, & \text{внутри области } \sigma, \\ \left. \frac{\partial \varphi(r, \theta, z)}{\partial r} \right|_{r=r_c} = 0, & \text{вне области } \sigma, \end{cases}, \quad (6)$$

в котором V_0 - некоторая пока неопределенная постоянная (знак минус в (6) поставлен потому, что течение жидкости направлено к оси скважины). Постоянную V_0 найдем из равенства среднего значения потенциала в области σ заданному значению φ_c :

$$\frac{1}{S_{\sigma}} \iint_{(\sigma)} \varphi(r_c, \theta, z) d\theta dz = \varphi_c, \quad \text{где } S_{\sigma} = \iint_{(\sigma)} d\theta dz. \quad (7)$$

Решение уравнения (1) с перечисленными граничными условиями (2), (3), (4), (6) находится методом разделения переменных и имеет вид:

$$\varphi = V_0 r_c \cdot \frac{S_{\sigma}}{S_D} \cdot \ln \frac{R}{r} - \frac{4 \cdot V_0}{h \cdot \theta_0} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_{mn}(r)}{W'_{mn}(r_c)} \cdot S_{mn} \cdot \cos(\lambda_n z) \cdot \cos(\beta_m \theta) + \varphi_{\Pi}, \quad (8)$$

где $S_{\sigma} = \iint_{(\sigma)} d\theta dz$; $S_D = \iint_{(D)} d\theta dz$; $S_{mn} = \iint_{(\sigma)} \cos(\lambda_n z) \cos(\beta_m \theta) dz d\theta$; $W_{mn}(r) = \begin{vmatrix} I_{\beta_m}(\lambda_n r); & K_{\beta_m}(\lambda_n r) \\ I_{\beta_m}(\lambda_n R); & K_{\beta_m}(\lambda_n R) \end{vmatrix}$;

$$W'_{mn}(r) = \begin{vmatrix} \frac{\beta_m}{r} I_{\beta_m}(\lambda_n r) + \lambda_n I_{\beta_m+1}(\lambda_n r); & \frac{\beta_m}{r} K_{\beta_m}(\lambda_n r) - \lambda_n K_{\beta_m+1}(\lambda_n r) \\ I_{\beta_m}(\lambda_n R); & K_{\beta_m}(\lambda_n R) \end{vmatrix}; \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{h}; \quad \beta_m = \frac{m\pi}{\theta_0}, \quad I, K -$$

модифицированные цилиндрические функции Бесселя и функции Макдональда соответственно [131]. Подставляя полученное значение потенциала (8) в формулу (7), найдем что

$$V_0 = [\varphi_c - \varphi_{\Pi}] \cdot \left(r_c \cdot \frac{S_{\sigma}}{S_D} \cdot \ln \frac{R}{r_c} - \frac{4}{h \cdot \theta_0} \cdot S_{\sigma} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_{mn}(r_c)}{W'_{mn}(r_c)} S_{mn}^2 \right)^{-1}. \quad (9)$$

Заметим, что для области $D = \{0 \leq \theta \leq \theta_0; 0 \leq z \leq h\}$ и для прямоугольного перфорационного отверстия постоянные S_D , S_{mn} и S_σ имеют вид:

$$S_D = h \cdot \theta_0, \quad S_{mn} = \frac{\sin(\lambda_n \cdot h_{отв}) \cdot \sin(\beta_m \theta_{отв})}{\lambda_n \cdot \beta_m} \quad \text{и} \quad S_\sigma = \theta_{отв} \cdot h_{отв},$$

где $h_{отв}$ – половина высоты перфорационного отверстия, $\theta_{отв}$ – половина угла раствора перфорационного отверстия. Дебит скважины с фильтром перфорационной конструкции через вычисленное значение скорости фильтрации V_0 рассчитывается по формуле

$$Q = N \cdot V_0 \cdot 4S = 2\pi \frac{kH}{\mu} \cdot \frac{P_{п} - P_c}{\ln \frac{R}{r_c} + \frac{1}{2} \lambda}, \quad (10)$$

где N – общее количество перфорационных отверстий, $S = r_c \cdot \theta_{отв} \cdot h_{отв}$ – площадь перфорационного отверстия, H – высота фильтра,

$$\lambda = -\frac{8}{r_c \cdot S_\sigma^2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_{mn}(r_c)}{W'_{mn}(r_c)} \cdot S_{mn}^2. \quad (11)$$

Вычислительные эксперименты, выполненные на основании формул (10) и (11), показали (рис.45), что дебит приближается к асимптотическому значению при 20-25% скважности. Поэтому практической необходимости в создании фильтров перфорационной конструкции со скважностью большей чем 20-25% нет. Этот вывод соответствует рекомендациям (применять фильтры перфорационной конструкции со скважностью от 17% до 23%), которые дают результаты опытно-промышленных испытаний [30, 81].

Итак, метод СВП в расчётах сложных пространственных течений к фильтрам перфорационной конструкции снова зарекомендовал свою пригодность к практическому применению.

4.8 Выводы из вычислительных экспериментов по исследованию работы фильтров нефтедобывающих скважин

По формулам (5.10) и (5.11), (6.10) и (6.11), (7.10) и (7.11) предыдущих параграфов 4.5, 4.6 и 4.7 были проведены вычислительные эксперименты по выявлению

нию зависимости дебита от типа конструкции скважинного фильтра. Данные вычислительных экспериментов приведены на рис.46. Из него видно, что на практике целесообразнее использовать фильтры перфорационной конструкции со скважностью 20÷25%. Для данной конструкции (рис.46) характерна высокая пропускная способность при малой скважности, что позволяет обеспечить фильтру необходимые прочностные качества.

Подчеркнём, что полученные выводы соответствуют результатам производственных испытаний [30, 81] всех трёх типов фильтров.

4.9 Теорема о подобии фильтрационных полей в грунтах со специальными законами изменения проницаемости и её применения.

В этом параграфе автором предлагается метод решения краевой задачи плоскопараллельной напорной фильтрации в целой серии неоднородных грунтов со специальными законами изменения проницаемости исходя из решения точно такой же задачи для какого-то одного грунта из этой серии.

4.9.1 Теорема о подобии фильтрационных полей. Конкретно, речь пойдёт о решении краевых задач двух типов. Первая – для двухсвязной области D , на внешней границе Π которой потенциал φ скорости фильтрации должен принимать постоянное значение φ_{Π} , а на внутренней границе C – постоянное значение φ_C (рис.47). Вторая – для односвязной области D (рис.47), у которой на части границы Π задано постоянное значение потенциала φ_{Π} , на другой части границы C потенциал принимает постоянное значение φ_C , а на оставшейся части границы $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$. Если проницаемость $\tilde{k}(x, y)$ грунта в области D изменяется по закону

$$\tilde{k}(x, y) = k_0 k(x, y), \quad (1)$$

где k_0 – постоянная с размерностью проницаемости, $k(x, y)$ – безразмерная переменная, x, y – декартовы координаты в плоскости течения, то потенциал $\varphi(x, y) = -k_0 P/\mu$ и функция тока $\psi(x, y)$, описывающие фильтрацию, будут удовлетворять системе уравнений [117]

$$k(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad k(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2)$$

Предположим, что решение краевой задачи в D с проницаемостью (1) для системы уравнений (2) найдено.

Теорема. Если $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ - решение краевой задачи в D для грунта с проницаемостью (1), то решение $\varphi_H(x, y)$ и $\psi_H(x, y)$ этой же краевой задачи в D для грунтов с проницаемостями

$$\tilde{k}_H(x, y) = \tilde{k}(x, y) \cdot f[\varphi(x, y)] = k_0 \cdot k(x, y) \cdot f[\varphi(x, y)] \quad (3)$$

где $f(\varphi)$ – безразмерная, положительная, ограниченная, с конечным числом точек разрыва функция находится через ранее найденное решение φ и ψ по формулам:

$$\varphi_H(x, y) = A \cdot \int_{\varphi_n}^{\varphi(x, y)} \frac{d\tau}{f(\tau)} + \varphi_n; \quad \psi_H(x, y) = A \cdot \psi(x, y) + B \quad (4)$$

где B – произвольная постоянная, а

$$A = \frac{\varphi_c - \varphi_n}{\int_{\varphi_n}^{\varphi_c} \frac{d\tau}{f(\tau)}} \quad (5)$$

В справедливости теоремы для непрерывной функции $f(\varphi)$ убеждаемся непосредственной проверкой граничных условий для функции φ_H и тем, что φ_H и ψ_H удовлетворяют уравнениям напорной фильтрации

$$k(x, y) \cdot f[\varphi(x, y)] \cdot \frac{\partial \varphi_H}{\partial x} = \frac{\partial \psi_H}{\partial y}; \quad k(x, y) \cdot f[\varphi(x, y)] \cdot \frac{\partial \varphi_H}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_H}{\partial x}$$

в грунтах с новыми законами изменения проницаемости (3). Для разрывной функции $f(\varphi)$ еще дополнительно проверяем, что (4) на линиях разрыва удовлетворяют условиям непрерывности давления и нормальной составляющей скорости фильтрации.

Следствие. Полный фильтрационный поток Q к границе C области D в грунтах с проницаемостью (3) через такой же поток Q_0 в грунте с проницаемостью (1) вычисляется по формуле

$$Q = A \cdot Q_0 \quad (6)$$

Это утверждение вытекает из того, что по свойствам функции тока поток через границу C области D равен приращению $\psi_H(x, y)$ которое она получает при движении вдоль C . В силу (4) приращения функции тока $\psi_H(x, y)$ и $\psi(x, y)$ будут связаны друг с другом коэффициентом пропорциональности A , откуда и следует утверждение. Приведем конкретные примеры практического применения теоремы.

4.9.2. Фильтрация под плоским флютбетом в кусочно – однородном грунте. Исходя из известного [108, 110] решения задачи о фильтрации под плоским флютбетом с горизонтальным водоупором в однородном грунте с проницаемостью k_0 на основании сформулированной теоремы можно получить точные решения такой же задачи для серии кусочно – однородных сред, когда границами скачков проницаемости выступают эквипотенциалы течения в однородном грунте k_0 . Пусть, например, имеются две кривые скачка проницаемости – эквипотенциалы φ_1 и φ_2 , исходящие из точек $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ на основании флютбета BC ($-l < x_1 < x_2 < l$) (рис.48). (Все обозначения выбираем соответствующими [108]). Проницаемость грунта слева от первой эквипотенциалы $\varphi_1 = \varphi(x_1)$ равна k_0 , между эквипотенциалами - k_1 , и справа от второй эквипотенциалы $\varphi_2 = \varphi(x_2)$ равна k_2 . Тогда на основании формул (5) и (6) для фильтрационного расхода жидкости под флютбетом в таком кусочно – однородном грунте (k_0, k_1, k_2) получим значение

$$Q = \frac{(\varphi_{CD} - \varphi_{AB}) \cdot Q_0}{(\varphi_1 - \varphi_{AB}) + \alpha_{01}(\varphi_2 - \varphi_1) + \alpha_{02}(\varphi_{CD} - \varphi_2)} \quad (7)$$

где $\alpha_{01} = k_0/k_1$, $\alpha_{02} = k_0/k_2$, φ_{AB} - известное значение потенциала на верхнем бьефе AB , φ_{CD} - заданное значение потенциала на нижнем бьефе CD . Подставляя в (7) значения потенциала взятые из [108], окончательно для расхода Q под плоским флютбетом в кусочно – однородной среде получим:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{[1 - h(x_1)] + \alpha_{01}[h(x_1) - h(x_2)] + \alpha_{01}h(x_2)}, \quad (8)$$

где

$$h(x_i) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{K(m)} \cdot F(\arcsin t_i, m) \right]; \quad i = 1, 2; \quad m = \operatorname{th} \left(\frac{\pi \ell}{2T} \right), \quad t_i = \frac{1}{m} \cdot \operatorname{th} \left(\frac{\pi x_i}{2T} \right).$$

F – эллиптический интеграл 1-го рода, $K(m)$ – полный эллиптический интеграл 1-го рода, m – модуль эллиптического интеграла. Формула (8) позволяет выяснить влияние низкопроницаемой засыпки ($k_1 < k_0, k_2 = k_0$) сделанной под основанием флютбета, на полный фильтрационный расход. В частности, если под флютбетом был вырыт до водоупора котлован с границами $\varphi(x_1)$ и $\varphi(x_2)$, которые при $\left| \frac{x_1}{l} \right| < \frac{1}{2}$ и $\left| \frac{x_2}{l} \right| < \frac{1}{2}$ близки к вертикальным прямым, и затрамбован низкопроницаемым грунтом, то расход Q/Q_0 для случая $k_1 = 0,5k_0, k_2 = k_0$ будет таким, как показано в таблице 4.3.

Таблица 4.3.

Влияние скачка проницаемости под флютбетом на фильтрационный поток

$x_2/l = -x_1/l$	l/T			
	0,25	0,50	1,00	1,50
0,6	0,7075	0,7025	0,6891	0,6771
0,4	0,7906	0,7858	0,7728	0,7611
0,2	0,8852	0,8819	0,8730	0,8649

Отметим, что для вертикальных прямолинейных границ скачка проницаемости эту же задачу можно решить с помощью модифицированного автором [146] приближённого метода фрагментов Н.Н. Павловского, когда на границах скачка проницаемости задаётся эпюра нормальной составляющей скорости фильтрации. В числовом выражении по отношению к данным таблицы 4.3 получаются незначительные изменения (при $l/T = 0,5$ в пределах от 2,7% до 8,9%, а при $l/T \geq 1$ в пределах от 0,15% до 2,7%), а расчетная часть задачи по сравнению с формулой (8) заметно усложняется. Это показывает, что формула (8), которая точна для криволинейных границ $\varphi(x_1)$ и $\varphi(x_2)$ скачка проницаемости, дает в тоже время простой и надежный способ для приближенного расчета фильтрационных расходов под плоским флютбетом с вертикальными прямолинейными границами скачка проницаемости (при условии, что $|x_1/l|$ и $|x_2/l|$ не более 0,5, а l/T не менее 0,5).

4.9.3. Фильтрация к скважинам с кусочно – однородной призабойной зоной

(I-ый способ расчета). Ещё одна область применения сформулированной теоремы - расчёты дебитов скважин со скачком проницаемости в ПЗС. При строительстве артезианских скважин с целью улучшения их эксплуатационных свойств вокруг фильтра часто делается гравийная обсыпка в виде кругового цилиндра некоторого радиуса [109]. При сооружении нефтедобывающих скважин перед началом их эксплуатации призабойную зону часто подвергают кислотной обработке. В результате проницаемость призабойной зоны скважины оказывается отличной от проницаемости всего пласта. Названные примеры указывают на практическую важность исследования влияния скачка проницаемости в круговой призабойной зоне скважины на её дебит.

Предположим, что нам известен комплексный потенциал $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ течения к скважине в двухсвязной области D с проницаемостью k_0 . Будем моделировать круговую границу C скачка проницаемости ПЗС замкнутой эквипотенциалью $\varphi_1 = \varphi(x_1, y_1)$, где $M_1(x_1, y_1)$ - некоторая выбранная на C точка. Тогда на основании формул (5) и (6) дебит Q_1 скважины, в призабойной зоне которой проницаемость равна k_1 , будет равен

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{\varphi_C - \varphi_n}{(\varphi_1 - \varphi_n) + \alpha_{01}(\varphi_C - \varphi_1)}, \quad (9)$$

где $\alpha_{01} = k_0 / k_1$. Если на круговой границе C выбрать такие две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ что окружность C окажется заключенной между двумя замкнутыми эквипотенциальными $\varphi_1 = \varphi(x_1, y_1)$ и $\varphi_2 = \varphi(x_2, y_2)$, то точное значение дебита Q/Q_0 скважины со скачком проницаемости в круговой призабойной зоне будет заключено между Q_1/Q_0 и Q_2/Q_0 (тоже вычисляемого по формуле (9) с заменой φ_1 на φ_2). Поэтому за искомое значение дебита скважины с круговой призабойной зоной примем среднее арифметическое

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{Q_1 + Q_2}{2Q_0}. \quad (10)$$

При этом погрешность приближенного значения дебита, рассчитанного по формулам (9) и (10), не превзойдет величины

$$\delta\% = (Q_2 - Q_1) \cdot 100 / (Q_2 + Q_1) \quad (11)$$

Приведем два конкретных примера применения описанного метода.

Пример №1. Скважина с круговой ПЗС и прямолинейной границей области питания (рис.49). Пусть центр круговой скважины с радиусом r_0 находится в точке $z_0 = il$, $l > 0$. Границей Π (контур питания) двухсвязной области фильтрации D служит ось абсцисс. Точное решение задачи о фильтрации к такой скважине дается комплексным потенциалом [48]

$$w(z) = -\frac{Q_0}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{z - i\sqrt{\ell^2 - r_0^2}}{z + i\sqrt{\ell^2 - r_0^2}} \right) + A, \quad (12)$$

а её дебит Q_0 в однородном грунте k_0 равен

$$Q_0 = \frac{2\pi k_0 (p_{\Pi} - p_c)}{\mu \cdot \ln(\ell_0 + \sqrt{\ell_0^2 - 1})}, \quad (13)$$

где $(p_{\Pi} - p_c)$ - разность приведённых давлений на контуре питания и на стволе скважины, $\ell_0 = \ell / r_0$. Обозначим радиус круговой призабойной зоны с проницаемостью k_1 через r_1 . В качестве точек M_1 и M_2 выберем точки $(0, \ell - r_1)$ и $(0, \ell + r_1)$. Выделяя в (12) действительную часть, вычисляя затем $\varphi(M_1)$ и $\varphi(M_2)$ и подставляя φ_1 и φ_2 в (9), получим:

$$\frac{Q_{1,2}}{Q_0} = \frac{\ln(\ell_0 + \sqrt{\ell_0^2 - 1})}{\alpha_{01} \ln(\ell_0 + \sqrt{\ell_0^2 - 1}) + (\alpha_{01} - 1) \ln(\beta_{1,2})}, \quad (14)$$

где $\beta_{1,2} = \left| \frac{\ell_0 \pm r_{10} - \sqrt{\ell_0^2 - 1}}{\ell_0 \pm r_{10} + \sqrt{\ell_0^2 - 1}} \right|$, $r_{10} = r_1 / r_0$. Теперь с помощью формул (10) и (14)

можно рассчитать влияние скачка проницаемости в круговой призабойной зоне на дебит скважины.

Пример №2. Скважина с круговой ПЗС и с эксцентричной к ней круговой границей области питания (рис.50). Пусть контуром питания (границей Π двухсвязной области фильтрации D) служит окружность радиуса R с центром в начале координат, центр круговой скважины радиуса r_0 находится в точке $z_0 = \ell$; $0 < \ell < R$; $\ell + r_0 < R$. Точное решение задачи о фильтрации к такой скважине дается комплексным потенциалом [48]

$$w(z) = -\frac{Q_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{z-x_1}{z-x_2}\right) + A, \quad (15)$$

а её дебит Q_0 в однородном грунте k_0 равен

$$Q_0 = \frac{2\pi k_0 (p_{\Pi} - p_c)}{\mu \cdot \ln\left(\frac{R_0^2 + 1 - \ell_0^2 + \sqrt{D_0}}{2R_0}\right)}; \text{ где } \frac{x_1}{r_0} = x_{10} = \frac{R_0^2 + \ell_0^2 - 1 - \sqrt{D_0}}{2\ell_0}; \quad R_0 = R/r_0;$$

$$\frac{x_2}{r_0} = x_{20} = \frac{R_0^2 + \ell_0^2 - 1 + \sqrt{D_0}}{2\ell_0}; \quad D_0 = (R_0^2 + \ell_0^2 - 1)^2 - 4\ell_0^2 R_0^2; \quad \ell_0 = \ell/r_0$$

Как и выше, обозначим радиус круговой призабойной зоны с проницаемостью k_1 через r_1 . В качестве точек M_1 и M_2 выберем точки $(l-r_1, 0)$ и $(l+r_1, 0)$. Далее выделим в (15) действительную часть, вычислим $\varphi(M_1)$ и $\varphi(M_2)$ и подставим в (9). В результате получим, что

$$\frac{Q_{1,2}}{Q_0} = \frac{\ln\left(\frac{R_0^2 + 1 - \ell_0^2 + \sqrt{D_0}}{2R_0}\right)}{\alpha_{01} \ln\left(\frac{R_0^2 + 1 - \ell_0^2 + \sqrt{D_0}}{2R_0}\right) + (\alpha_{01} - 1) \cdot \ln(\beta_{1,2})} \quad (16)$$

где $\beta_{1,2} = \left| \frac{R_0^2 + \ell_0^2 - 1 + \sqrt{D_0}}{2\ell_0 R_0} \cdot \frac{\ell_0 \pm r_{10} - x_{10}}{\ell_0 \pm r_{10} - x_{20}} \right|$; $r_{10} = r_1 / r_0$. Формулы (10) и (16) позво-

ляют рассчитать влияние скачка проницаемости в круговой призабойной зоне на дебит данной скважины.

Погрешности расчётов дебитов скважин с кусочно – однородной призабойной зоной, которые выполняются по формулам (9), (10), а в примерах №1 и №2 - по формулам (10), (14) и (10), (16), определяются по формуле (11). Однако формула (11) дает, как было выявлено в числовых экспериментах, часто завышенное значение погрешности. Поэтому для получения более точной оценки погрешности результата, получаемого на основании (9) и (10), полезно проводить сопоставления с расчётами дебитов по какому – то другому способу. В связи с этим наряду с вышеизложенным предлагается ещё один способ для расчета дебита скважин со скачком проницаемости в круговой ПЗС.

4.9.4. Фильтрация к скважинам с кусочно – однородной призабойной зоной.

(2-ой способ расчета). Математическая формулировка задачи о дебите скважины с центральной круговой границей C скачка проницаемости сводится к отысканию комплексных потенциалов течения $w_1(z) = \varphi_1(x, y) + i\psi_1(x, y)$ и $w_2(z) = \varphi_2(x, y) + i\psi_2(x, y)$ переменной $z = x + iy$ действительные части которых удовлетворяли бы условиям

$$\varphi_1|_{\Pi} = \varphi_{\Pi}; \quad \frac{\varphi_1}{k_0}|_C = \frac{\varphi_2}{k_1}|_C; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}|_C = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}|_C; \quad \varphi_2|_{\gamma} = \varphi_{2c}. \quad (17)$$

(Через γ обозначен круговой контур скважины радиуса r_0). Точное решение краевой задачи (17) для аналитических функций $w_1(z)$ и $w_2(z)$ находится просто только для круговой области D с центральным расположением скважины. Для других областей D отыскание точного решения краевой задачи (17) вызывает значительные трудности. В этом параграфе автор предлагает новый метод приближенного решения краевой задачи (17). Идея предлагаемого метода основана на том, что в непосредственной близости к скважине течение жидкости можно принять за плоскорадиальное. Поэтому в качестве комплексного потенциала $w_2(z)$ выберем функцию

$$w_2(z) = -\frac{Q_2}{2\pi} \cdot \ln(z - z_0) + A, \quad (18)$$

где z_0 - комплексная координата скважины, Q_2 - её дебит, A - некоторая пока неизвестная действительная постоянная. Действительная часть φ_2 потенциала (18) на круговой границе C скачка проницаемости будет постоянной величиной. Поэтому на основании второго из граничных условий (17) φ_1 тоже будет постоянной на C . Комплексный потенциал $w_1(z)$, действительная часть которого должна принимать постоянные значения на границах Π и C двухсвязной области (получаемой из D удалением круга с границей C), может быть найден с помощью конформного отображения этой двухсвязной области на некоторое круговое кольцо (рис.51). С гидродинамической точки зрения такая задача равносильна отысканию точного комплексного потенциала течения к круговой скважине с границей C . В общем случае решение этой задачи имеет вид [48, 108]

$$w_1(z) = -\frac{Q_1}{2\pi} \cdot \ln[t(z)] + B \quad (19)$$

где $t=t(z)$ – функция, реализующая конформное отображение названной двухсвязной области на круговое кольцо в плоскости t , а Q_1 и B – некоторые пока неизвестные постоянные. Если функция $t=t(z)$ будет найдена, то далее останется определить значения 4-х произвольных постоянных: A , Q_1 , Q_2 и B . Эти постоянные найдем с помощью граничных условий (17). Третье из граничных условий (17) выражает равенство нормальных составляющих $v_{1n} = v_{2n}$ скорости фильтрации в каждой точке на окружности S . Это единственное из перечисленных в (17) граничное условие, которое в предлагаемом методе выполняется приближенно. А именно, требование равенства $v_{1n} = v_{2n}$ в каждой точке S заменим на равенство потоков жидкости через контур S . Поскольку поток жидкости через контур S для течения с потенциалом $w_1(z)$ равен Q_1 , а течения с потенциалом $w_2(z)$ равен Q_2 , то для равенства потоков потребуем, чтобы

$$Q_1 = Q_2 = Q \quad (20)$$

Для определения теперь уже трех постоянных A , Q и B воспользуемся первым, вторым и четвертым условиями в (17). После выделения в (18) и (19) действительных частей, условия (17) с учетом (20) дадут три линейных уравнения для неизвестных Q , A и B . Решая эти уравнения, для дебита Q получим:

$$Q = \frac{2\pi k_0 k_1 (p_n - p_c)}{\mu \left(k_1 \cdot \ln \left| \frac{t(z_n)}{t(z_c)} \right| + k_0 \cdot \ln \frac{r_1}{r_0} \right)} \quad (21)$$

где z_n и z_c – комплексные координаты точек контура питания Π и окружности S . Таким образом, если функция $t=t(z)$, осуществляющая конформное отображение области D с выброшенным кругом на круговое кольцо в плоскости t будет найдена, то задача окажется решенной.

Подчеркнем, что если в формуле (21) радиус $r_1 = r_0$ т. е. скачок проницаемости в призабойной зоне отсутствует, то (21) даст точное значение дебита Q_0 круговой скважины. Если же в (21) выбрать $k_1 = k_0$, а $r_1 \neq r_0$ то получим приближенное значение для дебита круговой скважины. Погрешность в расчете Q

по формуле (21) при $k_1 = k_0$ и $r_1 \neq r_0$ появится из-за введения в сетку течения искусственной эквипотенциали радиуса r_1 . Поэтому отклонения Q/Q_0 от 1 при $k_1 = k_0$ и $r_1 \neq r_0$ косвенным образом позволяют оценить погрешности в расчетах Q по второму предложенному методу. Отметим, что в рассмотренных далее примерах эти отклонения составляли доли процента, если отношение r_1 к характерному размеру области фильтрации было менее 0,1.

Теперь применим новый подход к решению тех же примеров.

Пример I. Скважина с круговой ПЗС и с прямолинейной границей области питания (рис.49). Конформное отображение верхней полуплоскости с выброшенным кругом на кольцо известно [78, 123]. Поэтому формула (21) после подстановки в нее известной функции $t(z)$ и алгебраических преобразований примет вид:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\ln(\ell_0 + \sqrt{\ell_0^2 - 1})}{\ln(\ell_0 + \sqrt{\ell_0^2 - r_{10}^2}) + (\alpha_{01} - 1) \cdot \ln r_{10}}. \quad (22)$$

Влияние скачка проницаемости на дебит скважины, рассчитанное по формуле (22), приведено в таблице 4.4.

Таблица 4.4.

Влияние скачка проницаемости в круговой призабойной зоне на дебит скважины (рассчитаны отношения Q/Q_0 по формуле (22))

r_{10}	k_1 / k_0	Пример №1			
		l_0			
		50	100	200	1000
5	0,5	0,74	0,77	0,79	0,83
	2,0	1,21	1,18	1,16	1,12
	20,0	1,50	1,41	1,34	1,25
10	0,5	0,67	0,70	0,72	0,77
	2,0	1,34	1,28	1,24	1,18
	20,0	1,91	1,70	1,58	1,40

Пример 2. Скважина с круговой неоднородностью и с эксцентричной к ней круговой границей области питания (рис.50). Функция $t(z)$, реализующая конформное отображение большого круга с выброшенным внутренним кружком на кольцо приводится в [78, 123]. Подставляя $t(z)$ в (21) для дебита скважины в условиях 2-го примера получим выражение

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\ln\left(\frac{R_0^2 + 1 - \ell_0^2 + \sqrt{D_0}}{2R_0}\right)}{\ln\left(\frac{R_0^2 + r_{10}^2 - \ell_0^2 + \sqrt{D_1}}{2R_0}\right) + (\alpha_{01} - 1) \cdot \ln r_{10}} \quad (23)$$

где $D_1 = (R_0^2 + \ell_0^2 - r_{10}^2)^2 - 4\ell_0^2 R_0^2$, а остальные обозначения те же, что и выше. Влияние скачка проницаемости на дебит скважины, рассчитанное по формуле (23), приводится в таблице 4.5.

Таблица 4.5.

Результаты расчётов отношений Q/Q_0 по формуле (23).

$l_0 = 0,5 \cdot R_0$		Пример №2			
		R_0			
r_{10}	k_1/k_0	50	100	200	1000
5	0,5	0,69	0,73	0,76	0,80
	2,0	1,29	1,23	1,19	1,14
	20,0	1,73	1,55	1,44	1,30
10	0,5	0,61	0,65	0,69	0,74
	2,0	1,48	1,37	1,30	1,21
	20,0	2,56	2,03	1,78	1,49

Отметим, что расчёт Q/Q_0 , выполненный для примера №1 по формулам (10) и (14) для исходных данных таблицы 4.4 привел с точностью до 0,01 к таким же результатам, что и формула (22). Для примера № 2 расчет по формулам (10) и (16) для данных таблицы 4.5 тоже с точностью до 0,01 приводит к результатам, совпадающим с формулой (23). Всё это позволяет сделать вывод о практической равноценности методов расчёта дебитов скважин с кусочно – однородной призабойной зоной, предложенных в пунктах 4.9.3 и 4.9.4.

Результаты расчётов в таблицах 4.4 и 4.5 показывают, что увеличивая проницаемость призабойной зоны скважины можно заметно увеличить её дебит. Ухудшение проницаемости призабойной зоны по сравнению с проницаемостью всего пласта приводит к резкому сокращению дебита скважины (см. строки для $k_1 / k_0 = 0,5$). Именно поэтому в эксплуатационной практике водо – и нефтедобывающих скважин должны быть предусмотрены меры защиты призабойной зоны от ухудшения со временем её фильтрационных свойств.

4.10. Математическое моделирование фильтрации к скважине с вертикальными трещинами гидроразрыва

Для повышения производительности работы нефтедобывающих скважин в их призабойных зонах осуществляется специальная технологическая операция – гидроразрыв пласта. Эта операция может проводиться в двух режимах – вертикальный гидроразрыв пласта, когда создаются исходящие от ствола скважины трещины по всей толщине пласта, и горизонтальный гидроразрыв пласта, при котором создаются трещины в виде круговых колец с центром на стволе скважины, расположенных горизонтально подошве и кровле пласта.

Для проектирования числа и размеров трещин, создаваемых с помощью гидроразрыва пласта, нужна соответствующая математическая модель.

Исследованию эффективности вертикального гидроразрыва пласта уделялось внимание в работах многих авторов: Ентова В.М. и Мурзенко В.В. [54], Донцова К.М. с соавторами [53, 55], Кадета В.В. и Селякова В.И. [63], Каневской Р.Д. и Кац Р.М. [64, 65] Зазовского А.Ф. и Тодуа Г.Т. [57], Доманского А.В. [52] и др. В их работах при расчёте течений к вертикальным трещинам гидроразрыва учитывается конечная проницаемость, протяжённость и толщина (раскрытие) трещин. Учёт всех перечисленных параметров достигается применением сложного математического аппарата. Для исследования течений к вертикальным трещинам гидроразрыва с учётом всех этих же параметров и, кроме того, при дополнительном учёте разных проницаемостей трещин и разных раскрытий, может быть применена разработанная автором в 6-ой главе диссертации теория расчётов течений в многослойных средах. Для первоначальных прогностических расчётов, учитывающих лишь количество трещин, проницаемость которых принимается бесконечно большой по сравнению с проницаемостью пласта, и их протяжённость, автор предложил модифицированный вариант метода СВП.

Постановка задачи. Продуктивный пласт считается однородным и изотропным и, поэтому, потенциал скорости фильтрации φ удовлетворяет уравнению Лапласа. Основной фрагмент области фильтрации, для которого проводится расчёт, представляет половину сектора между двумя соседними щелями (рис.52), где $\varphi_{щ}$ –

заданное значение потенциала на поверхности трещины, φ_{Π} – заданное значение потенциала на контуре питания, $K_{\text{щ}}$ – количество трещин, R_{Π} – радиус контура питания, l – длина трещины, r_c – радиус скважины, r, θ – полярные координаты. В соответствии с рис.52 и с учётом симметрии основного фрагмента DABC области фильтрации, для уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$ запишем следующие граничные условия:

$$\text{на АВ: } \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0, \text{ на ВС: } \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0, \text{ на CD: } \varphi = \varphi_{\Pi}, \text{ на DE: } \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0, \text{ на EA: } \varphi = \varphi_{\text{щ}}, \quad (1)$$

где (АВ - непроницаемый участок скважины, АЕ - трещина, CD - граница области питания). Течение жидкости подчиняется закону Дарси.

Для решения задачи разделим область течения жидкости на две части. В области 2 рассмотрим течение жидкости к фиктивной скважине радиуса $r_1 = r_c + l$. Решение задачи в этой области имеет вид:

$$\varphi_2(r, \theta) = \varphi_n + A \cdot \ln\left(\frac{r}{R_n}\right) \quad (2)$$

где A - пока неизвестный параметр. В области 1 решение задачи находится методом Фурье и имеет вид:

$$\varphi_1(r, \theta) = \varphi_{\text{щ}} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot \left[\left(\frac{r}{r_c}\right)^{\lambda_n} + \left(\frac{r_c}{r}\right)^{\lambda_n} \right] \cdot \sin(\lambda_n \cdot \theta), \quad (3)$$

где $\lambda_n = \frac{\pi}{2\alpha}(2n+1)$, $\alpha = \frac{\pi}{K_{\text{щ}}}$. Так как радиальная составляющая скорости фильтрации жидкости на границе $r = r_1$ неразрывна, то должно выполняться условие

$$\left. \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} \right|_{r=r_1} = \left. \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} \right|_{r=r_1}. \quad (4)$$

Поскольку

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \lambda_n \left[\left(\frac{r}{r_c}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{r_c}{r}\right)^{\lambda_n} \right] \sin(\lambda_n \cdot \theta) \quad (5)$$

и

$$\left. \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} \right|_{r=r_1} = \frac{A}{r_1}, \quad (6)$$

то из граничного условия (4) получим:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \lambda_n \left[\left(\frac{r_1}{r_c} \right)^{\lambda_n} - \left(\frac{r_c}{r_1} \right)^{\lambda_n} \right] \sin(\lambda_n \theta). \quad (7)$$

Система функций $\{\sin(\lambda_n \theta)\}$ на отрезке $0 \leq \theta \leq \alpha$ ортогональна. Поэтому, умножая обе части уравнения (7) на $\sin(\lambda_n \theta)$ и интегрируя по θ от 0 до α , получим:

$$C_n = \frac{2A}{\alpha \lambda_n \left[\left(\frac{r_1}{r_c} \right)^{\lambda_n} - \left(\frac{r_c}{r_1} \right)^{\lambda_n} \right]}. \quad (8)$$

После подстановки C_n из (8) в (3) найдем, что:

$$\varphi_1(r, \theta) = \varphi_{ш} + \frac{2A}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{r_c} \right)^{\lambda_n} + \left(\frac{r_c}{r} \right)^{\lambda_n}}{\lambda_n^2 \left[\left(\frac{r_1}{r_c} \right)^{\lambda_n} - \left(\frac{r_c}{r_1} \right)^{\lambda_n} \right]} \sin(\lambda_n \theta). \quad (9)$$

В данной формуле осталась неизвестной константа A . Для её нахождения используем граничное условие неразрывности давления (а, значит, и функции φ) на дуге окружности $r = r_1$:

$$\varphi_1 \Big|_{r=r_1} = \varphi_2 \Big|_{r=r_1}. \quad (10)$$

Точно в предлагаемом приближенном методе граничному условию (10) удовлетворить не удастся. Поэтому условие (10) выполним в осредненной форме, заменив его на

$$\langle \varphi_1 \rangle \Big|_{r=r_1} = \langle \varphi_2 \rangle \Big|_{r=r_2}, \quad (11)$$

где $\langle \varphi_1 \rangle$ и $\langle \varphi_2 \rangle$ - средние арифметические значения:

$$\langle \varphi_1 \rangle = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \varphi_1(r_1, \theta) d\theta, \quad \langle \varphi_2 \rangle = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \varphi_2(r_1, \theta) d\theta. \quad (12)$$

Вычислив интегралы (12), из (11) для A получим уравнение

$$\varphi_{ш} \cdot \alpha + \frac{2A}{\alpha} \cdot S = \alpha \cdot \left[\varphi_n + A \ln \left(\frac{r_1}{R} \right) \right], \text{ в котором через } S \text{ обозначена сумма ряда}$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^{\lambda_n} + \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^{\lambda_n}}{\lambda_n^3 \left[\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^{\lambda_n} \right]}.$$

Из последнего уравнения для A находим следующее значение:

$$A = -\frac{\alpha \cdot (\varphi_{ш} - \varphi_n)}{\alpha \cdot \ln\left(\frac{R}{r_1}\right) + \frac{2}{\alpha} \cdot S}. \quad (13)$$

Теперь, когда константа A найдена, можно вычислить дебит Q скважины, содержащей $K_{щ}$ щелей. Этот дебит равен притоку к фиктивной скважине радиуса r_1 , т.е.

$$Q = 2\pi A = \frac{2\pi\alpha(\varphi_{ш} - \varphi_n)}{\alpha \ln\left(\frac{R}{r_1}\right) + \frac{2}{\alpha} S}.$$

Для практического анализа полученной формулы удобнее

рассматривать отношение $\frac{Q}{Q_0}$, где Q_0 - дебит центральной круговой скважины радиуса r_0 , работающей в таком же точно пласте и при тех же условиях и вычисляемый по формуле Дюпюи. Для отношения $\frac{Q}{Q_0}$ после элементарных преобразований окончательно получаем следующий результат:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\ln\left(\frac{R}{r_c}\right)}{\ln\left(\frac{R}{r_1}\right) + \frac{\beta}{K_{щ}}}, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^{\lambda_n} + \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^{\lambda_n}}{(2n+1)^3 \left[\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^{\lambda_n} \right]}. \quad (14)$$

Для уверенного практического применения приближенной формулы (14) нужно знать её точность. Для оценки этой точности проводились сопоставления расчетов по формуле (14) для двух ($K_{щ} = 2$) щелей с длиной $l \gg r_c$ и по точной формуле притока жидкости к прямолинейной центральной трещине длиной $2l$ в круговом пласте. Эта точная формула для частного случая $K_{щ} = 2$ получается на основе перехода по методу ЭГДА от аналогичной формулы (4-40) в [62] для расчета электрической емкости пластины в оболочке круглого сечения. Выполнив переход по

методу ЭГДА, для дебита скважины с $K_{щ} = 2$ получим следующий точный результат:

$$\frac{Q_{2щ}}{Q_0} = \frac{\ln\left(\frac{R}{r_0}\right) K'(k)}{\pi K(k)}, \quad (15)$$

где $K(k)$ - полный эллиптический интеграл первого рода; $K'(k) = K(k')$; $k' = \sqrt{1 - k^2}$,
 k - модуль эллиптического интеграла, вычисляемый по формуле $k = \left(\frac{R - r_0 - 1}{R + r_0 + 1}\right)^2$.

Погрешность формулы (14) для $K_{щ} = 2$ представлена на рис.53. Анализ показал, что:

1. Формула (14) дает всегда заниженное по сравнению с точным значением дебита Q ;

2. Для щелей с практически реальной длиной прострела $l \leq 300r_0$ относительная погрешность в среднем составляет 5% и не превосходит 8%. Такая точность для практики приемлема.

Формула (14) была применена для анализа эффективности вертикального гидравлического разрыва пласта в призабойной зоне скважины. В частности, результаты расчетов $\frac{Q}{Q_0}$ при $\frac{R}{r_0} = 2500$ приведены для различных $\frac{l}{r_0}$ в таблице 4.6 и представлены графически на рис.54.

Таблица 4.6

Дебит скважины с вертикальными трещинами при $\frac{R}{r_0} = 2500$.

l/r_0	Количество трещин										
	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
26,00	1,231	1,453	1,579	1,626	1,650	1,665	1,675	1,683	1,688	1,692	1,696
101,00	1,858	1,931	2,158	2,246	2,293	2,322	2,342	2,356	2,367	2,375	2,382
251,00	1,950	2,486	2,876	3,034	3,120	3,174	3,2111	3,238	3,258	3,275	3,288
301,00	2,043	2,638	3,080	3,263	3,363	3,425	3,469	3,500	3,524	3,543	3,558
401,00	2,210	2,919	3,471	3,705	3,834	3,916	3,972	4,014	4,045	4,070	4,090

По результатам расчетов можно сделать следующие выводы.

1. Дебит скважины с щелями существенно зависит от радиусов вертикальных трещин. С ростом радиуса трещин дебит значительно растёт.

2. С ростом числа щелей дебит растёт, но быстро из-за интерференции щелей достигает своего асимптотического значения. Оптимальное число трещин при производстве гидроразрыва пласта от 2 до 4.

3. Выгоднее создавать небольшое количество (например, 2) крупных по размерам щелей, чем большое количество мелких трещин. Например, 20 щелей с $\frac{l}{r_0} = 26$ дают дебит $\frac{Q}{Q_0} = 1,696$, в то же время 4 трещины с $\frac{l}{r_0} = 301$ дадут дебит почти в 2 раза больший $\frac{Q}{Q_0} = 3,1$ (см. рис.54).

Все выводы, к которому здесь привёл модифицированный метод СВП, согласуются с выводами других авторов [112] как по количеству, так и по и размерам вертикальных трещин гидроразрыва. В контрольных расчётах вновь подтвердилось, что вычисленные методом СВП фильтрационные потоки имеют заниженное на 5-8% значение. Это позволяет рекомендовать модифицированный метод СВП в качестве простого оценочного метода в практических инженерных расчётах.

4.11. Математическое моделирование фильтрации к скважине с горизонтальными трещинами гидроразрыва

Операция горизонтального гидроразрыва пласта (ГГРП), осуществляемая с целью повышения производительности нефтедобывающих скважин, описана в [112]. Здесь же приведена формула (X.46) С.А. Христиановича и Ю.П. Желтова, полученная по данным электролитического моделирования, с помощью которой оценивается эффективность ГГРП для некоторых параметров b , l , r_0 , r_1 и R . Через R обозначен радиус кругового контура питания с центром, совпадающим с центром скважины, а остальные обозначения соответствуют принятым в [112] и приведены на рис.55. Недостатком формулы (X.46) является ограниченная область её применения (которая в [112] не указана), низкая точность и пригодность к случаю только одной трещины, расположенной строго в середине пласта.

Приближённое аналитическое решение о притоке к скважине с одной срединной горизонтальной трещиной на основе метода ЭГДА получено Васильевым Ю.Н. и Башкировым А.И. в [27].

В данной работе автором представлена на основе модифицированного метода СВП математическую модель фильтрации нефти как к одиночной горизонтальной трещине (ГТ), так и к нескольким параллельным и одинаковым по размерам ГТ, расположенным в виде гирлянды вдоль ствола скважины. Ствол скважины считается непроницаемым, а добыча нефти осуществляется только через одну или несколько ГТ.

Осесимметричное фильтрационное течение к ГТ на рис.55 будем порознь рассматривать в каждом из фрагментов, отделённых друг от друга плоскостью $z = b - \ell$. В первом приближении эту плоскость можно принять за поверхность тока, что точно выполняется при срединном расположении трещины и приближённо – для остальных положений.

В свою очередь, каждый из фрагментов разобьём на подфрагменты: соответственно на 1-ю и 2-ю зоны и примыкающие к ним внешние области, ограниченные цилиндрической поверхностью $r = R$. Второе допущение, которое примем для приближённого расчёта исследуемого осесимметричного течения, заключается в том, что скорость фильтрации на границах $r = r_0 + r_1$ первой и второй зон в соответствии с методом СВП будем считать постоянными величинами v_1 и v_2 , подлежащими определению из граничных условий задачи.

Третье допущение, принятое в рассматриваемой задаче – допущение о том, что гидростатическая составляющая $\rho g z$ в приведённом давлении $p^* = p + \rho g z$ мало изменяется по толщине пласта по сравнению с действующими значениями гидродинамического давления p . В связи со сказанным будем считать, что в законе Дарси

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi; \quad \varphi = -\frac{kp^*}{\mu}; \quad p^* = p + \rho g z \quad (1)$$

$z = const = \frac{b}{2}$. Рассмотрим теперь при сделанных допущениях решение задачи линейной напорной фильтрации в однородном изотропном пласте в 1 – ой зоне. Для линейного закона Дарси потенциал φ скорости фильтрации должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

и граничным условиям

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right|_{r=r_0+r_1} = v_1, \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \quad \varphi|_{z=b-L} = \varphi_{\text{ш}}. \quad (3)$$

Решение краевой задачи (2), (3) ищем в виде суммы $\varphi = \varphi_{\text{ш}} + U(r, z)$. Поскольку $\varphi_{\text{ш}} = const$, то функция $U(r, z)$ тоже должна будет удовлетворять уравнению (2). Граничные же условия для $U(r, z)$ совпадут с граничными условиями (3), за исключением последнего, которое следует заменить на

$$U|_{z=b-L} = 0 \quad . \quad (4)$$

Решение граничной задачи для $U(r, z)$ находится методом Фурье, после чего для потенциала $\varphi_1(r, z)$ в 1 – ой зоне получаем выражение:

$$\varphi_1(r, z) = \varphi_{\text{ш}} + \frac{2v_1}{b-L} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot W_n(r)}{\lambda_n^2 \cdot w_n(r_0 + r_1)} \cdot \cos(\lambda_n z) \quad (5)$$

где $\lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2(b-L)}$, а $W_n(r)$ и $w_n(r)$ находятся по формулам

$$W_n(r) = \begin{vmatrix} I_0(\lambda_n r) & -K_0(\lambda_n r) \\ I_1(\lambda_n r_0) & K_1(\lambda_n r_0) \end{vmatrix}; \quad w_n(r) = \frac{1}{\lambda_n} \cdot W'_n(r) = \begin{vmatrix} I_1(\lambda_n r) & K_1(\lambda_n r) \\ I_1(\lambda_n r_0) & K_1(\lambda_n r_0) \end{vmatrix} \quad . \quad (6)$$

Здесь через $I_0(x)$, $I_1(x)$ обозначены модифицированные функции Бесселя, а через $K_0(x)$ и $K_1(x)$ – цилиндрические функции Макдональда 0-го и 1-го порядков [131].

Из полученного решения (5) можно вычислить среднее значение $\langle\varphi_1\rangle$ на граничной цилиндрической поверхности $r = r_0 + r_1$ первой зоны:

$$\langle\varphi_1\rangle = \frac{1}{b-L} \cdot \int_0^{b-L} \varphi_1(r_0 + r_1, z) \cdot dz \quad . \quad (7)$$

После вычисления интеграла (7) и алгебраических преобразований придём к следующему значению для среднего:

$$\langle \varphi_1 \rangle = \varphi_{\text{ш}} + \frac{16(b-\ell) \cdot v_1}{\pi^3} \cdot S_1, \quad (8)$$

где S_1 – сумма числового ряда

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{W_n(r_0 + r_1)}{(2n+1)^3 \cdot w_n(r_0 + r_1)}. \quad (9)$$

Формула (8) совместно с выражением для v_1 на рис.55 позволяет выразить приток Q_1 флюида к ГТ в 1-ой зоне через заданное значение потенциала $\varphi_{\text{ш}}$ и среднее

$$\langle \varphi_1 \rangle: Q_1 = \frac{\pi^4 \cdot (r_0 + r_1) \cdot (\langle \varphi_1 \rangle - \varphi_{\text{ш}})}{8 \cdot S_1}. \text{ С другой стороны, для притока } Q_1 \text{ в области,}$$

примыкающей в первом фрагменте к 1-ой зоне, по формуле Дюпюи имеем значе-

$$\text{ние: } Q_1 = \frac{2\pi(\langle \varphi_1 \rangle - \varphi_{\text{п}})(b-\ell)}{\ln\left(\frac{R}{r_0 + r_1}\right)}, \text{ где } \varphi_{\text{п}} \text{ – заданное значение потенциала на контуре пи-}$$

тания $r = R$. Исключая из двух последних равенств общее неизвестное значение

$\langle \varphi_1 \rangle$, окончательно для Q_1 получим выражение

$$Q_1 = \frac{2\pi(\varphi_{\text{ш}} - \varphi_{\text{п}})(b-\ell)}{\ln\left(\frac{R}{r_0 + r_1}\right) + \frac{16 \cdot S_1 \cdot (b-\ell)}{\pi^3(r_0 + r_1)}} \quad (10)$$

Выполняя совершенно аналогичные расчёты для исследования течения во 2-ой зоне, для притока Q_2 к ГТ из второго фрагмента получим значение

$$Q_2 = \frac{2\pi(\varphi_{\text{ш}} - \varphi_{\text{п}}) \cdot \ell}{\ln\left(\frac{R}{r_0 + r_1}\right) + \frac{16 \cdot S_2 \cdot \ell}{\pi^3(r_0 + r_1)}} \quad (11)$$

где S_2 – сумма числового ряда, определяемого как и выше по формуле (9), с той лишь разницей, что собственные значения λ_n теперь будут вычисляться по форму-

ле $\lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2 \cdot \ell}$. Складывая Q_1 и Q_2 мы и получим полный приток Q к одиночной

ГТ, изображённой на рис.55. Формулу для суммы $Q = Q_1 + Q_2$ приведём в виде, удобном для вычислений на ЭВМ.

Дебит скважины с одиночной горизонтальной трещиной

Для подсчёта на ЭВМ дебита скважины с непроницаемым стволом, приток нефти к которой осуществляется через одиночную ГТ, введём следующие безразмерные переменные:

$$R_0 = R/r_0; \quad b_0 = b/r_0; \quad x = 1 + r_1/r_0; \quad y_1 = (b - \ell)/r_0; \quad y_2 = \ell/r_0; \quad \tau_n = \frac{\pi(2n+1) \cdot x}{2y}; \quad q_n = \frac{\pi(2n+1)}{2y}$$

$$W_n(x, y) = \begin{vmatrix} I_0(\tau_n); & -K_0(\tau_n) \\ I_1(q_n); & K_1(q_n) \end{vmatrix}; \quad w_n(x, y) = \begin{vmatrix} I_1(\tau_n); & K_1(\tau_n) \\ I_1(q_n); & K_1(q_n) \end{vmatrix}.$$

I_0, I_1 – по – прежнему обозначают модифицированные функции Бесселя, а K_0 и K_1 – функции Макдональда. Через $S(x, y)$ обозначим сумму ряда

$$S(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{W_n(x, y)}{(2n+1)^3 \cdot w_n(x, y)}, \quad (12)$$

а через S_1 и S_2 – её значения

$$S_1 = S(x, y_1); \quad S_2 = S(x, y_2). \quad (13)$$

Тогда дебит $Q = Q_1 + Q_2$ скважины с одной ГТ в безразмерных величинах будет вычисляться по формуле

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\left(1 - \frac{y_2}{b_0}\right) \cdot \ln(R_0)}{\ln\left(\frac{R_0}{x}\right) + \frac{16 \cdot S_1 \cdot y_1}{\pi^3 \cdot x}} + \frac{\left(\frac{y_2}{b_0}\right) \cdot \ln(R_0)}{\ln\left(\frac{R_0}{x}\right) + \frac{16 \cdot S_2 \cdot y_2}{\pi^3 \cdot x}}. \quad (14)$$

В (14) через Q_0 обозначен дебит совершенной скважины, принятый за базисную величину и вычисляемый по формуле Дюпюи

$$Q_0 = \frac{2\pi \cdot (\varphi_{\text{ш}} - \varphi_{\text{п}}) \cdot b}{\ln(R_0)}. \quad (15)$$

Вычислительные эксперименты, выполненные с помощью формулы (14), показали, что: 1). Максимальный дебит достигается при расположении трещины в середине пласта. 2). Если размер трещины больше мощности пласта ($r_1 > b$), то расположение трещины внутри пласта вдоль ствола скважины практически не играет роли. Иными словами, в последнем случае гидроразрыв можно осуществлять в любом месте ствола скважины – эффект от ГТРП практически будет всегда одинаков.

Дебит скважины с несколькими горизонтальными трещинами.

Интерференция горизонтальных трещин.

Рассмотрим ситуацию, когда в пласте создали N горизонтальных трещин, равномерно распределённых вдоль ствола скважины – рис.56. Чтобы подсчитать суммарный дебит такой гирлянды ГТ понадобится частный случай формулы (14) – случай серединного положения ГТ. Для серединного положения $\ell = b/2$ и, следовательно, $y_1 = y_2 = b/2$. С учётом этого, из (14) для дебита $Q_{ГТ}$ одиночной серединной горизонтальной трещины получим значение

$$Q_{ГТ} = \frac{2\pi(\varphi_{ш} - \varphi_{п}) \cdot b}{\ln\left(\frac{R_0}{x}\right) + \frac{8 \cdot \tilde{S} \cdot b_0}{\pi^3 x}}, \quad \text{где} \quad \tilde{S} = S\left(x, \frac{b_0}{2}\right). \quad (16)$$

Подчеркнём, что формула (16) относится к случаю, указанному на рис.55. Для подсчёта же дебита одной трещины применительно к ситуации на рис.56 в (16) нужно заменить b на b/N и b_0 на b_0/N . Тогда после сложения дебитов отдельных трещин, для их суммарного дебита Q_{Σ} получим выражение

$$\frac{Q_{\Sigma}}{Q_0} = \frac{\ln(R_0)}{\ln\left(\frac{R_0}{x}\right) + \frac{8 \cdot \tilde{S} \cdot b_0}{\pi^3 \cdot N \cdot x}}, \quad \text{где} \quad \tilde{S} = S\left(x, \frac{b_0}{2 \cdot N}\right). \quad (17)$$

В качестве базисной величины Q_0 по –прежнему выступает значение (15). Вычислительные эксперименты, выполненные с помощью формулы (17), показали, что для повышения производительности скважины выгоднее создавать одну крупную ГТ в середине пласта, чем множество мелких трещин в гирлянде на рис.56. Подтверждением этого вывода служит следующий показательный результат расчётов: одна серединная трещина с $r_1/r_0 = 300$ даёт дебит в 1,8 раза больший, чем суммарный дебит 20 мелких трещин $r_1/r_0 = 30$. (Расчёт приведён для случая $R/r_0 = 2000$ и $b/r_0 = 400$).

К таким же выводам приводят исследования эффективности ГТРП, полученные экспериментально методом электролитического моделирования [112]. Это согласование расчётных данных с экспериментальными подтверждает достоверность результатов, получаемых по представленной математической модели горизонтального гидроразрыва пласта. Кроме того, ещё раз позволяет рекомендовать модифи-

цированный метод СВП в качестве простого оценочного метода в практических инженерных расчётах.

Основные результаты главы 4: 1) автор доказал, что классическая постановка задачи о течении к скважине, когда поверхность её ствола принимается за эквипотенциальную, может приводить к заметным ошибкам в расчёте дебита, если не учесть по приведённому в диссертации критерию возможность перехода в ПЗС плоскорадиального течения в осесимметричное; 2) доказана необходимость учёта при расчёте дебитов скважин возможного перехода в ПЗС линейного режима фильтрации к нелинейному; 3) доказано, что расчёт сложных трёхмерных фильтрационных течений в ПЗС с приемлемой точностью можно выполнить методом СВП; 4) проведены расчёты и даны практические рекомендации по оптимальному соотношению проницаемостей ПЗС и пласта, по техническим параметрам применяемых фильтров и по количеству и размерам искусственно создаваемых трещин гидроразрыва.

ГЛАВА 5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ К ОДИНОЧНЫМ И ГРУППОВЫМ СКВАЖИНАМ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ ПРИ ЛИНЕЙНОМ И НЕЛИНЕЙНОМ РЕЖИМАХ ФИЛЬТРАЦИИ

В 5-ой главе исследуются математические модели интерференции нефтедобывающих скважин, уточняющие постановки В.Н. Щелкачёва для таких же задач. В ПЗС учитывается возможность, во-первых, скачков проницаемости и, во-вторых, перехода фильтрации от линейного режима к нелинейному.

5.1. Расчёт дебита и поля давления для одиночной скважины

5.1.1. Методом функций Грина

Плоскопараллельная линейная напорная фильтрация несжимаемой жидкости к скважине в неоднородном пласте с проницаемостью

$$K(x, y) = k_0 \cdot k(x, y), \quad (1)$$

где k_0 - константа с размерностью проницаемости, а $k(x, y)$ - безразмерная функция декартовых координат x, y плоскости течения описывается [108] эллиптическим уравнением

$$L[\varphi(x, y)] \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x, y) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k(x, y) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = 0, \quad (2)$$

в котором через $\varphi(x, y)$ обозначен потенциал скорости фильтрации: $\varphi(x, y) = -\frac{k_0 \cdot (p + \rho gh)}{\mu}$. Уравнение (2) решается совместно с граничными условиями

$$\varphi|_{\Pi} = \varphi_{\Pi} = \text{const} \quad \text{и} \quad \varphi|_C = \varphi_C = \text{const}, \quad (3)$$

где Π – граница контура питания в области фильтрации D , а C – круговой контур скважины. Если потенциал скорости фильтрации $\varphi(x, y)$ будет найден, то по нему определим поле давления, а по закону Дарси – проекции скорости фильтрации на оси x и y :

$$v_x = k(x, y) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad ; \quad v_y = k(x, y) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (4)$$

Удельный дебит Q скважины с контуром C находится по формуле

$$Q = -\oint_C v_n \cdot ds = -\oint_C k(x, y) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot ds, \quad (5)$$

где v_n - нормальная к контуру C составляющая скорости фильтрации, а ds - дифференциал длины дуги контура C . Для некоторых конкретных видов области D и частных случаев законов изменения проницаемости (1) известны точные аналитические решения задачи (2), (3). Например, для круговой области с конкретными частными случаями проницаемости (1) такие решения приведены в [35-38]. Для однородных грунтов и произвольной формы границы Π задача (2), (3) в [48] сведена к решению сингулярного интегрального уравнения, с помощью которого находится параметр двухсвязности области D , а затем дебит скважины Q . Л.В. Старшинова для решения задач разработки нефтяных месторождений стала применять методы коллокации [132] и конечных разностей [133]. Г.Г. Вахитов¹ и М.Г. Алишаев² (с соавторами) предложили при применении метода сеток скважину моделировать как особый узел сетки. Такой способ моделирования скважины в методе сеток даёт удовлетворительные результаты главным образом для однородных изотропных пластов. Для неоднородных грунтов разностные методы со скважиной в виде особого узла требуют применения сеток с шагом, на один-два порядка меньше, чем для однородных, что делает их применение в этих случаях затруднительным. В этой работе для решения краевой задачи (2), (3) тоже предполагается использование численных методов, но скважину предлагается моделировать при помощи 1-го фундаментального решения уравнения (2), описывающего, как известно [23], течение от точечного источника. В связи со сказанным перечислим некоторые конкретные примеры фундаментальных решений $g(x, y, x_0, y_0)$ [23, 32, 38, 101, 224 и др.]:

$$k = \text{const}; \quad g(x, y, x_0, y_0) = -\ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + C \quad (6)$$

$$\Delta(\sqrt{k(x, y)}) = 0; \quad g(x, y, x_0, y_0) = -\frac{\sqrt{k(x_0, y_0)}}{\sqrt{k(x, y)}} \cdot \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + C; \quad (7)$$

¹ Вахитов Г.Г. Разностные методы решения задач разработки нефтяных месторождений. М., Недра, 1970.

² М.Г. Алишаев, М.Д. Розенберг, Е.В. Теслюк. Неизотермическая фильтрация при разработке нефтяных месторождений. М., Недра. 1985.

$$k(x, y) = \exp(2ay); \quad g(x, y, x_0, y_0) = -\exp(a(y_0 - r \cdot \sin \theta)) \cdot K_0(ar) + C; \quad (8)$$

где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Функция (6) отвечает однородному грунту; (7) – серии законов (1), когда $k(x, y)$ представляет собой квадрат гармонической функции; (8) – закону экспоненциального изменения неоднородности, $K_0(ar)$ – функция Макдональда; x_0, y_0 – координаты точечного стока (скважины); C – некоторая аддитивная постоянная.

Замечание 1. Перечисленные в (6) – (8) потенциалы точечных стоков имеют нормированный удельный дебит, равный 2π единиц, так как для них интегралы $-\oint_C k(x, y) \cdot \frac{\partial g}{\partial n} \cdot ds = 2\pi$. Поэтому, чтобы получить потенциал точечного стока с другим значением дебита Q , соответствующую функцию в (6) – (8) надо будет умножить на $Q/2\pi$.

Перейдём теперь к задаче о фильтрации жидкости к одиночной скважине в неоднородном грунте (1) с произвольным контуром питания Π .

Для расчёта потенциала $\varphi(x, y)$ исследуемого течения предварительно построим функцию Грина $\varphi_0(x, y)$, равную [135]

$$\varphi_0(x, y) = g(x, y, x_0, y_0) + f(x, y), \quad (9)$$

где $g(x, y, x_0, y_0)$ – известное фундаментальное решение уравнения (2), а $f(x, y)$ – решение вспомогательной краевой задачи с условиями Дирихле

$$L[f(x, y)] = 0 \quad ; \quad f(x, y)|_{\Pi} = -g(x, y, x_0, y_0)|_{\Pi} \quad (10)$$

без особых точек в области фильтрации D . Решение задачи (10) для частных случаев областей D и законов изменения проницаемости (1) можно получить с помощью точных аналитических методов, а в общем случае – с помощью какого – либо численного метода (например, метода конечных разностей или метода конечных элементов). Функция Грина (9) будет удовлетворять вследствие (10) краевому условию

$$\varphi_0(x, y)|_{\Pi} = 0. \quad (11)$$

После того как функция Грина $\varphi_0(x, y)$ будет построена, потенциал течения к скважине с удельным дебитом Q найдётся, с учётом замечания 1, по формуле

$$\varphi(x, y) = \frac{Q}{2\pi} \cdot \varphi_0(x, y) + A, \quad (12)$$

где Q и A – неопределённые постоянные. Эти постоянные находятся из граничных условий (4): $\varphi|_{\Pi} = A = \varphi_{\Pi}$; $\varphi|_C = \varphi_C = \frac{Q}{2\pi} \cdot \varphi_0(x_C, y_C) + A$. При записи условия на скважине воспользовались общепринятым в теории фильтрации допущением о возможности замены кругового контура скважины C на эквипотенциаль, проходящую через какую – либо точку (x_C, y_C) на C . Теперь из последних двух равенств находим искомое значение удельного дебита

$$Q = \frac{2\pi \cdot (\varphi_C - \varphi_{\Pi})}{\varphi_0(x_C, y_C)}. \quad (13)$$

Поскольку вспомогательное решение $f(x, y)$ внутри D не имеет особенностей, то без принципиальных затруднений приемлемая точность в расчёте дебита Q и поля давления p получается при применении известных конечно-разностных методов на сетках с относительно крупным шагом.

5.1.2. Построение серий точных решений полуобратных граничных задач о дебите круговой скважины в однородных изотропных средах в постановке для двухсвязных областей

Для однородных изотропных грунтов точные решения задачи о дебите круговой скважины, в постановке для двухсвязных областей, получены для ограниченного числа случаев в [41, 48, 87, 102, 103 и др.]. Между тем любое точное решение имеет самостоятельную ценность хотя бы потому, что его можно применять для тестирования приближённых решений. Именно поэтому автор приводит предлагаемый им простой метод построения серии точных решений полуобратных граничных задач о расчёте дебита круговой скважины.

Уравнение (2) для однородного изотропного грунта будет уравнением Лапласа. Его решения, удовлетворяющие на круговом контуре C скважины с радиусом r_0 условию (3), будем строить с помощью преобразования обратных радиус-векторов [123] по формуле

$$\varphi(r, \Theta) = -\frac{Q}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + u(r, \Theta) - u\left(\frac{r_0^2}{r}, \Theta\right) \right] + \varphi_c, \quad (14)$$

в которой $u(r, \Theta)$ – пока произвольная гармоническая функция, не имеющая при $r > r_0$ особых точек, а Q – неопределённая постоянная. Если теперь в формуле (14) задавать конкретные гармонические функции, точечные особенности которых расположены за пределами окружности $|z| = r_0$, то получим какое-то точное решение задачи о дебите скважины в постановке для двухсвязной области. Остается лишь найти контур питания Π . Для его отыскания строим эквипотенциали течения по формуле $\varphi(r, \Theta) = \text{const}$, одну из которых можно принять за границу контура питания. Конкретный вид контура питания найдем в соответствии с (14) из уравнения

$$\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + u(r, \Theta) - u\left(\frac{r_0^2}{r}, \Theta\right) = A, \quad (15)$$

в котором $A > 0$ – некоторая безразмерная наперед заданная постоянная. Значение потенциала скорости фильтрации φ_{Π} на контуре питания (15) будет, в соответствии с (14) и (15), равно $\varphi_{\Pi} = -\frac{Q}{2\pi} A + \varphi_c$, откуда для удельного дебита скважины получим точное значение

$$Q = \frac{2\pi(\varphi_c - \varphi_{\Pi})}{A}. \quad (16)$$

В практических приложениях гармоническую функцию $u(r, \Theta)$ в потенциале (14) удобно представлять в виде ряда Фурье

$$u(r, \Theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos(n\Theta) + \beta_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \sin(n\Theta),$$

где $\alpha_0, \alpha_n, \beta_n$ – неопределённые безразмерные коэффициенты. Тогда потенциал скорости фильтрации (14) исследуемого течения можно будет представить в виде:

$$\varphi(r, \Theta) = -\frac{Q}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{r}{r_0}\right)^n - \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \right) (\alpha_n \cos(n\Theta) + \beta_n \sin(n\Theta)) \right] + \varphi_c. \quad (17)$$

Уравнение контура питания (15) можно теперь представить в более удобной для расчётов форме

$$\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{r}{r_0}\right)^n - \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \right) (\alpha_n \cos(n\Theta) + \beta_n \sin(n\Theta)) = A. \quad (18)$$

Задавая в формуле (18) конкретные значения безразмерных коэффициентов α_0 , α_n , β_n , будем получать отвечающие им различные формы контура питания. Приведем конкретные примеры применения изложенного метода.

Пример 1. Выберем в (18) безразмерные коэффициенты α_n и β_n следующим образом: $\alpha_n = \beta_n = 0$ при $n \geq 2$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = 0$. Тогда уравнение контура питания можно будет записать в виде $\ln \tau + \alpha \left(\tau - \frac{1}{\tau} \right) \cos \Theta = A$, где $\tau = \frac{r}{r_0}$, $\tau > 1$. Выразив отсюда $\cos \Theta$, получим удобную для построения контура питания форму записи его уравнения:

$$\cos \Theta = \frac{A\tau - \tau \ln \tau}{\alpha(\tau^2 - 1)}. \quad (19)$$

Поскольку $\cos \Theta$ - четная функция, то контур питания, определенный уравнением (19) будет симметричен относительно оси Ох. Для определения общего вида этого контура можно задать две характеристические точки (так как имеется только два параметра А и α). В качестве таких характеристических точек контура (19) можно взять его точки пересечения с осью Оу и с положительной частью оси Ох. Пусть при $\theta = 0$ величина $\tau = \tau_0$, а при $\Theta = \pm \frac{\pi}{2}$ величина $\tau = \tau_1$. То-

гда относительно А и α получим уравнения $\frac{A\tau_1 - \tau_1 \ln \tau_1}{\alpha(\tau_1^2 - 1)} = 0$ и $\frac{A\tau_0 - \tau_0 \ln \tau_0}{\alpha(\tau_0^2 - 1)} = 1$, из

которых находим что

$$A = \ln \tau_1; \quad \alpha = \frac{\tau_0 \ln \left(\frac{\tau_0}{\tau_1} \right)}{\tau_0^2 - 1}. \quad (20)$$

Уравнение контура питания через характеристические точки τ_0 и τ_1 запишется в виде

$$\cos \Theta = \frac{\tau_0^2 - 1}{\tau^2 - 1} \cdot \frac{\ln \left(\frac{\tau_1}{\tau} \right)}{\ln \left(\frac{\tau_1}{\tau_0} \right)} \cdot \frac{\tau}{\tau_0}. \quad (21)$$

Для более полного представления о форме исследуемого контура питания найдем еще абсциссу точки пересечения τ_2 с отрицательной частью оси Ох. Из (21) для отыскания τ_2 получаем уравнение:

$$\frac{\tau_0^2 - 1}{\tau_2^2 - 1} \cdot \frac{\ln \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \right)}{\ln \left(\frac{\tau_1}{\tau_0} \right)} \cdot \frac{\tau_2}{\tau_0} = -1. \quad (22)$$

Уравнение (22) решалось комбинированным методом хорд и касательных. Найденные значения координат дополнительной характеристической точки τ_2 для пяти частных случаев показаны на рис.57. С его помощью можно наглядно представить общий вид овального контура питания с расположенной в нём в начале координат круговой скважиной. Точное значение дебита скважины в пластах с рассматриваемыми контурами питания находится, в соответствие с (16) и (20), по формуле:

$$Q = \frac{2\pi(\varphi_c - \varphi_n)}{\ln \tau_1}. \quad (21)$$

Формула (21) применялась в вычислительном эксперименте по выбору оптимального варианта моделирования овального контура питания. А именно, как точнее рассчитать дебит скважины: моделируя овал круговым контуром с ра-

диусом τ_2 или круговым контуром с радиусом τ_1 и с центром на оси Ox в точке $(\tau_1 - \tau_2, 0)$ (рис.57). В первом случае дебит скважины рассчитывается по формуле Дюпюи:

$$Q_{\text{прибл.}} = \frac{2\pi(\varphi_c - \varphi_n)}{\ln \tau_2} \quad (22)$$

Во втором случае - по формуле дебита круговой скважины в эксцентричном круговом пласте [41, 48], которая в принятых здесь обозначениях запишется в виде:

$$Q_{\text{прибл.}} = \frac{2\pi(\varphi_c - \varphi_n)}{\ln \left[\tau_2 \left(2 - \frac{\tau_2}{\tau_1} \right) \right]} \quad (23)$$

Вычислительные эксперименты по исследованию погрешностей приближённых формул (22) и (23) позволили сделать следующий вывод. В любом вытянутом выпуклом овальном пласте, имеющем одну ось симметрии, в котором: 1) скважина расположена на оси симметрии и, 2) ближайшее расстояние τ_2 от скважины до контура питания вдоль оси симметрии меньше расстояния τ_1 от скважины до контура питания в направлении, перпендикулярном к оси симметрии ($\tau_2 < \tau_1$), дебит скважины следует вычислять по формуле (23). Погрешность приближенной формулы (23), как показал вычислительный эксперимент, не превышает 2,7% (для параметров $\tau_0 \leq 40$ и $\tau_1 \leq 28$). Если же τ_0 и τ_1 будут принимать значение большее 100, то относительная погрешность будет составлять 0,85% и менее.

Для подтверждения справедливости сделанного вывода применим формулу (23) к расчёту дебитов скважин в овальных пластах, рассмотренных в работе В. Л. Данилова [48].

Пример № 2. Уравнение контура питания : $r = 10000 \cdot e^{-0,2 \cos \theta}$ (метров), радиус скважины $r_c = 1500$ метров (так называемая “укрупнённая” скважина, понятие которой введено В.Л. Даниловым для оценки суммарного дебита группы

скважин), мощность пласта $h = 5$ метров, давление на контуре питания $p_n = 160$ атм., давление на скважине $p_c = 155$ атм., проницаемость $k = 1$ дарси, вязкость $\mu = 1$ сантипуаз. Для этих данных в [48] получено значение дебита $Q = 722,7 \text{ м}^3/\text{сутки}$.

Для условий этого примера находим, что полярные радиусы точек пересечения контура питания с осями координат для углов θ равных 0° , 90° и 180° соответственно равны $r_1 = 8187,307 \text{ м}$, $r_2 = 10000 \text{ м}$ и $r_3 = 12214,028 \text{ м}$. Поэтому параметры τ_0 , τ_1 и τ_2 будут равны: $\tau_0 = r_3/r_{\text{скв}} = 8,142853\dots$, $\tau_1 = r_2/r_{\text{скв}} = 6,6666\dots$ и $\tau_2 = r_1/r_{\text{скв}} = 5,458205\dots$. Теперь по формуле (23) легко подсчитать, что удельный дебит скважины $q = 145,707 \text{ м}^3/\text{сутки}$, а массовый дебит $Q = h \times q = 728,54 \text{ м}^3/\text{сутки}$. Стало быть, относительная погрешность расчётов по формуле (23) составила $0,81\%$.

Пример №3. Исходные данные: $r = 1000 \cdot e^{-0,5 \cos \theta}$ (метров), $r_c = 0,1$ (м), $h = 5$ (м), $p_n = 150$ атм., $p_c = 130$ атм., $k = 0,5$ дарси, $\mu = 1$ сантипуаз. Здесь в [48] получено значение дебита $Q = 298 \text{ м}^3/\text{сутки}$. Для перечисленных условий полярные радиусы точек пересечения контура питания с осями координат для углов θ равных 0° , 90° и 180° соответственно равны $r_1 = 606,531 \text{ м}$, $r_2 = 1000 \text{ м}$ и $r_3 = 1648,721 \text{ м}$. Поэтому параметры τ_0 , τ_1 и τ_2 имеют значения: $\tau_0 = r_3/r_{\text{скв}} = 16487,21\dots$, $\tau_1 = r_2/r_{\text{скв}} = 10000,00\dots$ и $\tau_2 = r_1/r_{\text{скв}} = 6065,31\dots$. Теперь по формуле (23) найдём, что удельный дебит скважины $q = 60,101 \text{ м}^3/\text{сутки}$, а массовый дебит $Q = h \times q = 300,50 \text{ м}^3/\text{сутки}$. Стало быть, относительная погрешность расчётов по формуле (23) составила $0,84\%$.

Как видим, рассмотренные примеры подтверждают справедливость выводов относительно условий применения приближённой формулы (23) к расчёту дебитов в пластах овальной формы с одной осью симметрии.

Разумеется, область применения предложенного метода не ограничивается приведёнными примерами.

5.2. Применение вариационных методов для расчёта двусторонних оценок дебитов одиночных скважин в анизотропных средах при линейном режиме фильтрации

Сложность задач расчёта дебита и поля давления для скважин, эксплуатирующих анизотропные пласты, по сравнению с изотропными сильно возрастает. Поэтому для анизотропных сред важную роль играют приближённые методы расчёта дебитов скважин. Автор в этом параграфе выводит формулы для расчёта верхних и нижних оценок дебитов скважин на основе вариационных методов, названных в работе методами пробных эквипотенциалей и пробных линий тока.

Линейная плоско-параллельная фильтрация жидкости в анизотропно-неоднородных средах описывается функциями $\varphi(\xi, \eta)$ и $\psi(\xi, \eta)$, удовлетворяющим системе уравнений (2.3.2'). Перепишем эту систему совместно с формулами для проекций скорости фильтрации:

$$v_1 = \frac{a}{\sqrt{E}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{b}{\sqrt{G}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} ; \quad v_2 = \frac{b}{\sqrt{E}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{c}{\sqrt{G}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (1)$$

Здесь ξ, η - расчетная ортогональная криволинейная система координат, E и G - коэффициенты 1-ой квадратичной формы, v_1 и v_2 - проекции скорости фильтрации на ξ и η - координатные линии, $\psi(\xi, \eta)$ - функция тока,

$$\varphi(\xi, \eta) = -\frac{k_0 \cdot P}{\mu} \quad (2)$$

P - приведённое давление, k_0 - некоторая постоянная с размерностью проницаемости, a, b, c - компоненты безразмерного тензора проницаемости, вычисляемые через задаваемый закон распределения главных направлений анизотропии (ГНА) и главные проницаемости $\lambda_1(\xi, \eta)$ и $\lambda_2(\xi, \eta)$. Расчёт a, b, c осуществляется по формулам (см. приложение 2):

$$a = \frac{1}{\Delta} \left[G \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)^2 \cdot \lambda_{10} + E \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^2 \cdot \lambda_{20} \right] ; \quad b = \frac{\sqrt{EG}}{\Delta} \cdot \frac{\partial p}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} \cdot (\lambda_{10} - \lambda_{20}) \quad (3a)$$

$$c = \frac{1}{\Delta} \left[E \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^2 \cdot \lambda_{10} + G \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)^2 \cdot \lambda_{20} \right] ; \quad \Delta = G \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)^2 + E \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^2. \quad (36)$$

В формулах (3а) и (3б) $p = p(\xi, \eta)$ - функция, нормали к линиям уровня которой определяют 1-ое ГНА с главной проницаемостью $\lambda_1(\xi, \eta)$, а касательные к

$p(\xi, \eta) = \text{const}$ определяют 2-ое ГНА с главной проницаемостью $\lambda_2(\xi, \eta)$;

$\lambda_{10} = \lambda_1/k_0$ и $\lambda_{20} = \lambda_2/k_0$ - безразмерные главные проницаемости. Отметим, что в соответствии с (3),

$$a \cdot c - b^2 = \lambda_{10} \cdot \lambda_{20}. \quad (4)$$

Для сокращения дальнейших записей обозначим

$$\sqrt{\lambda_{10} \lambda_{20}} = k(\xi, \eta). \quad (5)$$

Путем перекрестного дифференцирования, для функций $\varphi(\xi, \eta)$ и $\psi(\xi, \eta)$ из системы (1) получаем уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(a \cdot \sqrt{\frac{G}{E}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + b \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(b \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + c \cdot \sqrt{\frac{E}{G}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (6)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{a}{k^2(\xi, \eta)} \cdot \sqrt{\frac{G}{E}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{b}{k^2(\xi, \eta)} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{b}{k^2(\xi, \eta)} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{c}{k^2(\xi, \eta)} \cdot \sqrt{\frac{E}{G}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (7)$$

В частном случае для однородных анизотропных сред ($\lambda_1 = \text{const}$ и $\lambda_2 = \text{const}$), выбирая $k_0 = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} = \text{const}$, получаем, что $k(\xi, \eta) \equiv 1$. Поэтому уравнения (6) и (7) совпадут, а система уравнений (1) будет системой уравнений Бельтрами. Это, согласно §2.4, позволяет для решения краевых задач фильтрации в однородно-анизотропных средах применять методы теории аналитических функций комплексного переменного.

5.2.1. Метод пробных эквипотенциалей. Рассмотрим теперь следующую краевую задачу для уравнения (6) в двухсвязной области D , ограниченной кусочно-гладкими замкнутыми кривыми C (внутренняя граница) и Π (внешняя граница):

$$\varphi|_C = \varphi_c = \text{const} \quad ; \quad \text{и} \quad \varphi|_{\Pi} = \varphi_{\Pi} = \text{const} \quad . \quad (8)$$

Граничные условия (8) появляются в задачах расчета дебитов скважин, расчета удельной конденсаторной ёмкости в электростатике, расчета тепловых потерь в теплопроводности. Уравнение (6) можно рассматривать как уравнение Остроградского [25] для функционала

$$W[\varphi] \equiv \iint_D \left\{ a \cdot \sqrt{\frac{G}{E}} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + 2b \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + c \cdot \sqrt{\frac{E}{G}} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right\} \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (9)$$

Как известно [25], краевая задача (6), (8) эквивалентна задаче минимизации в области D функционала (9) при тех же граничных условиях (8). Выберем систему ортогональных координат ξ, η так, чтобы координатные линии $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_1 > \xi_0$ совпадали с границами C и Π соответственно. Остальные линии $\xi = \text{const}$ будут представлять собой замкнутые кривые, охватывающие в области D границу C . При полном обходе кривой $\xi = \text{const}$ вторая координата η будет получать некоторое приращение η_0 . Поэтому в области D координаты ξ, η будут изменяться в пределах $\xi_0 \leq \xi \leq \xi_1$ и $0 \leq \eta \leq \eta_0$, причем $\varphi(\xi, 0) = \varphi(\xi, \eta_0)$. Задачу минимизации функционала (9) будем решать приближенно, принимая систему координатных линий $\xi = \text{const}$ за эквипотенциали – пробные эквипотенциали течения. Если выбранная система координат ξ, η окажется такой, что линии $\xi = \text{const}$ совпадут с действительными эквипотенциалами, то получим точное решение задачи. В общем случае, когда линии $\xi = \text{const}$ дают искаженные эквипотенциали течения, при расчете полного фильтрационного притока жидкости к границе C получим завышенное по сравнению с точным значение. Завышение притока вызывается тем, что эквипотенциали с гидродинамической точки зрения – бесконечно узкие криволинейные полоски, заполненные свободной жидкостью. Поэтому внесение в область фильтрации D сетки искусственных эквипотенциалей приводит к снижению фильтрационного сопротивления области D и, следовательно, к завышению в ней фильтрационного потока. Функцию $\varphi(\xi, \eta)$

при сделанном выборе эквипотенциалей будем искать в виде $\varphi = \varphi(\xi)$. Для отыскания зависимости φ от ξ подставляем её в (9) и получаем:

$$W[\varphi] = \int_{\xi_0}^{\xi_1} H(\xi) \cdot [\varphi'(\xi)]^2 \cdot d\xi, \quad (10)$$

где обозначено

$$H(\xi) = \int_0^{\eta_0} a \cdot \sqrt{\frac{G}{E}} \cdot d\eta. \quad (11)$$

Теперь минимизация функционала (9) свелась к минимизации функционала (10) при условии $\varphi(\xi_0) = \varphi_C$ и $\varphi(\xi_1) = \varphi_\Pi$. Решая уравнение Эйлера [25] для функционала (11), получим:

$$\varphi = -\bar{Q} \cdot \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{H(\xi)} + \varphi_C, \quad (12)$$

где постоянный множитель равен

$$\bar{Q} = \frac{\varphi_C - \varphi_\Pi}{\int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{d\xi}{H(\xi)}}. \quad (13)$$

Теперь, когда приближенное значение φ найдено, можно рассчитать полный фильтрационный приток жидкости от П к С в области D. Для этого вычисляем интеграл по любой кривой $\xi = \text{const}$ от нормальной составляющей скорости фильтрации к этой кривой. Вычисляя такой интеграл получим, что $\int_{\xi} \mathbf{v}_n \cdot ds = \bar{Q}$,

т.е. формула (13) определяет искомую величину фильтрационного потока. Ещё раз подчеркнём, что истинное значение притока жидкости $Q < \bar{Q}$.

5.2.2. Метод пробных линий тока. Рассмотрим теперь задачу расчета притока жидкости к контуру С в двухсвязной области D на основе уравнения (7). Уравнение (7) будем рассматривать как уравнение Остроградского [25] для функционала

$$T[\psi] = \iint_D \left\{ \frac{a}{k^2(\xi, \eta)} \cdot \sqrt{\frac{G}{E}} \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{2b}{k^2(\xi, \eta)} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{c}{k^2(\xi, \eta)} \cdot \sqrt{\frac{E}{G}} \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)^2 \right\} \cdot d\xi \cdot d\eta. \quad (14)$$

Снова выберем некоторую ортогональную систему координат ξ, η (в общем случае, не совпадающую с той, которая применялась для расчёта верхней оценки \bar{Q}) так, чтобы линии $\xi = \text{const}$ были семейством простых замкнутых кривых, а семейство линий $\eta = \text{const}$ являлось бы пучком кривых с центром пучка внутри контура S , т.е. ξ, η - топологический эквивалент полярной системы координат на плоскости. Уравнения границ S и Π в выбранной системе координат запишутся в виде $\xi = \xi_1(\eta)$ и $\xi = \xi_2(\eta)$ соответственно. Линии $\eta = \text{const}$ примем за пробные линии тока течения. Если выбранная система $\eta = \text{const}$ совпадёт с действительными линиями тока, то получим точное решение задачи. В случае несовпадения - получим приближенное решение с заниженным по сравнению с точным значением притока - значением $\underline{Q} < Q$. Занижение притока вызывается тем, что линии тока с гидродинамической точки зрения - непроницаемые цилиндрические поверхности, вдоль которых течёт жидкость. Внесение в область D сетки искусственных линий тока может привести к появлению дополнительных преград для течения жидкости, и, значит, к завышению фильтрационного сопротивления всей области. А это, в свою очередь, и вызывает занижение фильтрационного притока от Π к S . Поскольку полный обход любой η -координатной линии расположенной в области D приводит к приращению функции тока на величину $-Q$, равную искомому фильтрационному притоку, то граничные условия для (14) задаём в виде

$$\psi|_{\eta=0} = 0 \quad ; \quad \psi|_{\eta=\eta_0} = -\underline{Q}, \quad (15)$$

где $\eta=0$ и $\eta=\eta_0$ - значения координаты η на противоположных берегах некоторой зафиксированной пробной линии тока. Отыскание функции тока сводится к определению минимума функционала (14) при граничных условиях (15). При выбранной аппроксимации линий тока функция тока будет функцией одной переменной $\psi = \psi(\eta)$. Подставляя это выражение ψ в (14), для функционала $T[\psi]$ получим:

$$T[\psi] = \int_0^{\eta_0} L(\eta) \cdot [\psi'(\eta)]^2 \cdot d\eta, \quad (16)$$

в котором через $L(\eta)$ обозначено

$$L(\eta) = \int_{\xi_1(\eta)}^{\xi_2(\eta)} \frac{c}{k^2(\xi, \eta)} \cdot \sqrt{\frac{E}{G}} \cdot d\xi. \quad (17)$$

Теперь минимизация функционала (14) свелась к минимизации (16) при условии $\psi(0) = 0$ и $\psi(\eta_0) = -Q$. Решая уравнение Эйлера [25] для функционала (16), получим:

$$\psi(\eta) = C_1 \cdot \int_0^\eta \frac{d\eta}{L(\eta)} \quad (18)$$

где

$$C_1 = \frac{-Q}{\int_0^{\eta_0} \frac{d\eta}{L(\eta)}}. \quad (19)$$

В силу того, что Q неизвестно, постоянная C_1 тоже остается неизвестной. Для отыскания C_1 будем исходить из того, что нам известна величина разности $\varphi_{\Pi} - \varphi_C$, т.к. давления P_{Π} и P_C заданы. Из уравнений движения (1) следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{c}{k^2(\xi, \eta)} \cdot v_1 - \frac{b}{k^2(\xi, \eta)} \cdot v_2 \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{b}{k^2(\xi, \eta)} \cdot v_1 + \frac{a}{k^2(\xi, \eta)} \cdot v_2. \quad (20)$$

Но тогда $\varphi_{\Pi} - \varphi_C = \int_{(C)}^{(\Pi)} d\varphi = \int_{(C)}^{(\Pi)} (\text{grad} \varphi, \vec{dr})$, или, с учётом $\vec{dr} = \frac{\partial r}{\partial \xi} \cdot d\xi + \frac{\partial r}{\partial \eta} \cdot d\eta = \sqrt{E} \cdot d\xi \cdot \vec{e}_1 + \sqrt{G} \cdot d\eta \cdot \vec{e}_2$, получим:

$$\varphi_{\Pi} - \varphi_C = \int_{(C)}^{(\Pi)} \left(\frac{c}{k^2(\xi, \eta)} v_1 - \frac{b}{k^2(\xi, \eta)} v_2 \right) \cdot \sqrt{E} \cdot d\xi + \left(-\frac{b}{k^2(\xi, \eta)} v_1 + \frac{a}{k^2(\xi, \eta)} v_2 \right) \cdot \sqrt{G} \cdot d\eta. \quad (21)$$

В частности, если интеграл (21) вычислять вдоль линий тока $\eta = \text{const}$, а проекции скорости v_1 и v_2 выразить с помощью (1) через $\psi(\eta)$, то он примет вид

$$\varphi_{\Pi} - \varphi_C = \int_{\xi_1(\eta)}^{\xi_2(\eta)} \frac{c \cdot \sqrt{E} \cdot v_1 \cdot d\xi}{k^2(\xi, \eta)} = \int_{\xi_1(\eta)}^{\xi_2(\eta)} \frac{c \cdot \sqrt{E}}{k^2(\xi, \eta)} \cdot \frac{C_1 \cdot d\xi}{\sqrt{G} \cdot L(\eta)} = \frac{C_1}{L(\eta)} \cdot \int_{\xi_1(\eta)}^{\xi_2(\eta)} \frac{c}{k^2(\xi, \eta)} \cdot \sqrt{\frac{E}{G}} \cdot d\xi = C_1. \quad (22)$$

Сравнивая теперь (19) и (22), для нижней оценки дебита Q получим значение

$$\underline{Q} = (\varphi_c - \varphi_n) \cdot \int_0^{\eta_0} \frac{d\eta}{L(\eta)}. \quad (23)$$

Таким образом, для Q получена двусторонняя оценка

$$\underline{Q} \leq Q \leq \bar{Q}. \quad (24)$$

При выборе аппроксимирующих сеток (ξ, η) , правильно отражающих главные особенности фильтрационного течения, оценки \underline{Q} и \bar{Q} удастся сблизить настолько, что относительная погрешность расчетов по приведенной методике будет составлять 3-5% и менее.

5.3. Расчёт двусторонних оценок дебитов скважин при нелинейных режимах фильтрации

5.3.1. Уравнения движения и граничные условия. Будем исследовать плоскопараллельную фильтрацию несжимаемой жидкости, подчиняющуюся нелинейному закону Дарси [108, 249]

$$\text{grad } P = - \frac{f(v)}{v} \cdot \vec{v} \quad (1)$$

где \vec{v} – скорость фильтрации, P – приведённое давление, $f(v)$ – некоторая функция, характеризующая конкретный вид закона (1) и определяемая экспериментально. В данном параграфе рассматриваются степенные законы

$$f(v) = B \cdot v^\alpha \quad (2)$$

где B и α – положительные постоянные. В частности, при $\alpha = 1$ будем иметь линейный закон Дарси, а при $\alpha = 2$ важный для практики закон А.А. Краснопольского. Поле скоростей фильтрации \vec{v} , кроме (1), должно удовлетворять уравнению неразрывности $\text{div } \vec{v} = 0$, которое позволяет ввести в рассмотрение функцию тока течения ψ . Проекции скорости фильтрации в декартовых координатах x, y через ψ будут, как известно [85, 86, 87], вычисляться по формулам

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3)$$

С другой стороны, из нелинейного уравнения Дарси (1) со степенными законами (2) для v_x и v_y получаем:

$$v_x = \frac{1}{v^{\alpha-1}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} ; v_y = \frac{1}{v^{\alpha-1}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (4)$$

где через φ обозначено выражение

$$\varphi = -\frac{P}{B} = -\frac{p + \rho gh}{B} . \quad (5)$$

В дальнейшем функцию φ будем называть потенциалом скорости фильтрации. Сравнивая (3) и (4) для функций φ и ψ , описывающих нелинейную плоскопараллельную фильтрацию со степенными законами (2), получаем систему

$$\frac{1}{v^{\alpha-1}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \frac{1}{v^{\alpha-1}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} . \quad (6)$$

Из системы уравнений (6) после перекрёстного дифференцирования для функций φ и ψ получаем уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(U^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(U^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0 \quad (7)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(V^{\frac{\alpha-1}{2}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(V^{\frac{\alpha-1}{2}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0, \quad (8)$$

в которых через U и V обозначены выражения

$$U = v^{2\alpha} = \nabla^2 \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 ; V = v^2 = \nabla^2 \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 . \quad (9)$$

Рассмотрим одну из основных задач теории фильтрации – задачу вычисления удельного дебита скважины. Математическая формулировка этой задачи сводится к отысканию решения нелинейного уравнения (7) в двухсвязной области D , ограниченной кусочно - гладкими замкнутыми кривыми Π (внешняя граница) и C (внутренняя граница – как правило, окружность с радиусом r_0 , равным радиусу скважины). На границах D задаются условия

$$\varphi|_{\Pi} = \varphi_{\Pi} = \text{const} \quad \text{и} \quad \varphi|_C = \varphi_C = \text{const} \quad (10)$$

Задача расчета удельного дебита скважины на основе уравнения (8) сводится к отысканию такого его решения, которое удовлетворяло бы в области D граничным условиям:

$$\psi|_{\gamma_+} = 0 \quad ; \quad \psi|_{\gamma_-} = Q = \text{const.} \quad (11)$$

Здесь через γ обозначена некоторая в общем случае заранее неизвестная линия тока течения, соединяющая границы Π и C . В ряде случаев одну (или несколько) таких линий тока в области D удаётся указать исходя из геометрических соображений. Поскольку, по свойствам функции тока ψ , при полном обходе в D любой замкнутой кривой, охватывающей C , ψ получает приращение, равное Q , то на одном “берегу” начальной линии тока γ функции ψ даётся значение, равное нулю, а на противоположном “берегу” этой же линии γ значение ψ должно быть равно Q , что и записано в (11). Кроме граничных условий (11), решение уравнения (8) должно удовлетворять ещё одному дополнительному условию: т.к. на границах Π и C заданы давления, то известна величина разности $\varphi_{\Pi} - \varphi_C$. Поэтому решение (8) должно ещё удовлетворять требованию:

$$\varphi_{\Pi} - \varphi_C = \int_{\gamma} d\varphi = \int_{\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot dy = \int_{\gamma} v^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot dx - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot dy \right) \quad (12)$$

где последний интеграл в (12) вычисляется по любой линии тока $\psi = \text{const}$, соединяющей Π и C . (При выводе условия (12) использовали систему уравнений (6)).

5.3.2 Вариационная формулировка краевых задач. Отыскание точных аналитических решений краевых задач для нелинейных уравнений (7), (8) с граничными условиями (10) и (11), (12) зачастую приводит к серьёзным математическим трудностям. Поэтому практически важными становятся методы приближённого решения этих краевых задач. В данной работе приближённые решения строятся путём перехода от сформулированных краевых задач к эквивалентным им вариационным задачам. Для этого уравнения (7) и (8) будем рассматривать как уравнения Остроградского [25] для функционалов

$$W[\varphi] = \iint_D F(U) \cdot dx dy \quad (13)$$

и

$$T[\psi] = \iint_D G(V) \cdot dx dy, \quad (14)$$

где

$$F(U) = U^{\frac{1+\alpha}{2\alpha}} \quad \text{и} \quad G(V) = V^{\frac{\alpha+1}{2}}. \quad (15)$$

Решение краевой задачи (7), (10) обеспечивает минимум функционалу (13) в области D при тех же граничных условиях (10). Точно так же краевая задача (8), (11) тоже определяет функцию $\psi(x, y)$, дающую минимум функционалу $T[\psi]$ в области D при граничных условиях (11). Однако, в отличие от задачи для нахождения φ , появляющийся в решении неизвестный параметр Q надо будет определять из дополнительного условия (12) через известное значение разности $\varphi_{\Pi} - \varphi_C$.

Для решения задач минимизации функционалов $W[\varphi]$ и $T[\psi]$ наряду с декартовыми будем применять полярные и обобщённые полярные координаты. С этой целью укажем вид функционалов (13), (14) в названных криволинейных координатах.

В полярных координатах функционалы (13), (14) имеют вид:

$$W[\varphi] = \iint_D F(U) \cdot r dr d\theta \quad ; \quad T[\psi] = \iint_D G(V) \cdot r dr d\theta \quad (16)$$

где

$$U = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 \quad \text{и} \quad V = \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2. \quad (17)$$

Обобщённые полярные координаты t и θ удобно применять, когда задано однопараметрическое семейство замкнутых кривых

$$r = r(t, \theta), \quad (18)$$

кривые которого, отвечающие различным значениям параметра t , не пересекаются друг с другом, т.е. $r(t_1, \theta) \neq r(t_2, \theta)$ при $t_1 \neq t_2$. Такое семейство линий всегда можно построить, если бывают заданы уравнения границ C и Π в полярных координатах r и θ : $r = r_C(\theta)$ и $r = r_{\Pi}(\theta)$ соответственно. В этом случае семейство линий (18) можно задать уравнением вида

$$r = r(t, \theta) = \alpha(t) \cdot r_{\Pi}(\theta) + [1 - \alpha(t)] \cdot r_C(\theta), \quad (19)$$

где $\alpha(t)$ – некоторая монотонная непрерывная положительная функция, заданная для $t \in [0, 1]$ и удовлетворяющая условиям

$$\alpha(0) = 0, \alpha(1) = 1. \quad (20)$$

Тогда $r(0, \theta) = r_C(\theta)$ и $r(1, \theta) = r_{\Pi}(\theta)$. Если в (16) перейти к новым переменным t и θ , то для функционала $W[\varphi]$ получим выражение

$$W[\varphi] = \iint_D F(U) \cdot r(t, \theta) \cdot \frac{\partial r}{\partial t} \cdot dt d\theta, \quad (21)$$

где

$$U = \frac{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2}{r^2 \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{2 \cdot \frac{\partial r}{\partial \theta}}{r^2 \cdot \frac{\partial r}{\partial t}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)^2 \quad (22)$$

Кроме координат t и θ , удобными для решения конкретных задач оказываются ещё и другие – обобщённые полярные координаты r и λ . Эти координаты задаются с помощью выбора некоторого периодического по λ однопараметрического семейства пучка кривых

$$\theta = \theta(r, \lambda), \quad (23)$$

с центром в некоторой точке внутри контура C . Если разность $\lambda_1 - \lambda_2$ равна периоду, то уравнения $\theta(r, \lambda_1)$ и $\theta(r, \lambda_2)$ будут определять одну и ту же кривую. В дальнейшем для удобства будем выбирать стандартную нормировку по периоду для λ : $\theta(r, 0) = \theta(r, 2\pi)$. Уравнения границ C и Π области D , если семейство (23) задано, всегда можно записать в новых координатах r и λ . Для этого подставляем (23) в уравнения $r = r_C(\theta)$ и $r = r_{\Pi}(\theta)$ и решаем их относительно r . В результате получим уравнения границ C и Π

$$r = r_C(\lambda) \quad \text{и} \quad r = r_{\Pi}(\lambda) \quad (24)$$

в новых координатах. Если в (16) перейти к новым переменным r и λ , то для функционала $T[\psi]$ получим выражение

$$T[\psi] = \iint_D G(V) \cdot r \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \cdot dr d\lambda, \quad (25)$$

где

$$V = \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\frac{\partial \theta}{\partial r}}{\frac{\partial \theta}{\partial \lambda}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{1 + r^2 \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)^2}{r^2 \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial \lambda}\right)^2} \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\right)^2 \quad (26)$$

5.3.3 Верхняя оценка дебита скважины. Пусть уравнения границ С и П области фильтрации D заданы уравнениями вида (18). Выберем сами некоторую систему кривых, близких по форме к эквипотенциалам $\varphi = \text{const}$ течения жидкости от П к С. Для этого в уравнении (19) требуется задать конкретный вид функции $\alpha(t)$ с соблюдением условий (20). Тогда на выбранной системе кривых, принятых за эквипотенциали, функция $\varphi = \varphi(t)$. На выбранной системе эквипотенциалей функционал (21), с учетом формул (15) и (22), примет вид

$$W[\varphi] = \iint_D \frac{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{\frac{1+\alpha}{2\alpha}}}{\left(r \cdot \frac{\partial r}{\partial t} \right)^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot [\varphi'(t)]^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \cdot dt d\theta. \quad (27)$$

Выполняя в (27) интегрирование по θ и обозначая через $H(t)$ интеграл

$$H(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{\frac{1+\alpha}{2\alpha}}}{\left(r \cdot \frac{\partial r}{\partial t} \right)^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot d\theta \quad (28)$$

для $W[\varphi]$ на пробном семействе эквипотенциалей (19) получаем выражение

$$W[\varphi] = \int_0^1 H(t) \cdot [\varphi'(t)]^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \cdot dt. \quad (29)$$

Решая уравнение Эйлера, для функционала (29) находим следующую экстремаль

$$\varphi(t) = C_1 \cdot \int_0^t [H(t)]^{-\alpha} \cdot dt + \varphi_C, \quad (30)$$

которую принимаем в качестве искомого закона распределения потенциала φ . Произвольную постоянную C_1 в (30) находим из граничных условий $\varphi(0) = \varphi_c$ и $\varphi(1) = \varphi_n$:

$$C_1 = \frac{\varphi_n - \varphi_c}{\int_0^1 \frac{dt}{[H(t)]^\alpha}}. \quad (31)$$

Теперь, когда функция φ найдена, можно вычислить дебит. Для этого вначале вычисляем по формулам (9) и (22) скорость фильтрации на эквипотенциалах:

$$v = U^{1/2\alpha} = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2\alpha}}{\left(r \cdot \frac{\partial r}{\partial t} \right)^{1/\alpha}} \cdot [\varphi'(t)]^{1/\alpha}. \quad (32)$$

После этого находим дебит \bar{Q} , вычисляя интеграл вдоль всей эквипотенциали $\varphi = \text{const}$:

$$\bar{Q} = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2} \cdot v \cdot d\theta.$$

Опуская выкладки, запишем окончательный результат:

$$\bar{Q}^\alpha = -C_1 = \frac{\varphi_c - \varphi_n}{\int_0^1 \frac{dt}{[H(t)]^\alpha}}. \quad (33)$$

Подчеркнём, что найденная с помощью формулы (33) величина дебита \bar{Q} будет завышенной по сравнению с точным решением. Это объясняется тем, что при расчёте потенциала φ мы заранее выбрали некоторую систему кривых (19), аппроксимирующих сетку эквипотенциалей. А, как известно [108], введение искусственных эквипотенциалей в фильтрационное течение приводит к увеличению полного фильтрационного потока.

5.3.4 Нижняя оценка дебита скважины. Снова будем рассматривать фильтрационное течение от П к С в области D. Однако теперь зададимся некоторой аппроксимацией линий тока. С этой целью выберем какое-нибудь однопараметрическое семейство кривых (23), линии $\lambda = \text{const}$ которого и примем за линии

тока. Как известно [108], введение искусственных линий тока в фильтрационное течение приводит к уменьшению полного фильтрационного потока. Поэтому расчёт дебита скважины путём аппроксимации линий тока приведёт к заниженному по сравнению с точным значению дебита \underline{Q} . Функция тока ψ на выбранном семействе (23) будет функцией одного переменного $\psi = \psi(\lambda)$, и поэтому функционал $T[\psi]$ согласно (25) и (26) примет вид:

$$T[\psi] = \iint_D \frac{\left[1 + r^2 \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)^2\right]^{\frac{1+\alpha}{2}}}{\left(r \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \lambda}\right)^\alpha} \cdot [\psi'(\lambda)]^{1+\alpha} \cdot dr \cdot d\lambda. \quad (34)$$

Выполняя в (34) интегрирование по r и обозначая

$$L(\lambda) = \int_{r_c(\lambda)}^{r_n(\lambda)} \frac{\left[1 + r^2 \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)^2\right]^{\frac{1+\alpha}{2}}}{\left(r \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \lambda}\right)^\alpha} \cdot dr, \quad (35)$$

для $T[\psi]$ на пробном семействе линий тока получим выражение

$$T[\psi] = \int_0^{2\pi} L(\lambda) \cdot [\psi'(\lambda)]^{1+\alpha} \cdot d\lambda. \quad (36)$$

Решая уравнение Эйлера для функционала (36) совместно с условиями (11), которые примут вид $\psi(0) = 0$, $\psi(2\pi) = \underline{Q}$, для функции тока $\psi(\lambda)$ получим значение:

$$\psi(\lambda) = C_1 \cdot \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{[L(\lambda)]^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad (37)$$

где

$$C_1 = \frac{\underline{Q}}{\int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{[L(\lambda)]^{\frac{1}{\alpha}}}}. \quad (38)$$

Подставляя найденное выражение функции тока $\psi(\lambda)$ в формулу (12) и выполняя расчёты, получим, что постоянная C_1 в формуле (5) равна

$$C_1 = (\varphi_c - \varphi_n)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (39)$$

Теперь по формулам (35), (38) и (39) можно будет вычислить нижнюю оценку дебита \underline{Q} .

5.3.5 Дебит скважины в пласте овальной формы. Применим полученные выше оценки \bar{Q} и \underline{Q} для расчёта дебита эксплуатационной скважины, работающей в пласте овальной формы. С этой целью в качестве однопараметрического семейства линий (7) рассмотрим семейство вида

$$r(t, \theta) = r_0 \cdot [(R_0 - 1) \cdot t + 1] \cdot e^{-a \cdot t \cdot \cos \theta}, \quad (40)$$

где r_0, R_1 и R_2 – три положительных параметра $0 < r_0 < R_1 < R_2$, через которые вычисляются коэффициенты R_0 и a в (40) по формулам

$$R_{10} = \frac{R_1}{r_0}; R_{20} = \frac{R_2}{r_0}; R_0 = \sqrt{R_{10} \cdot R_{20}}; a = \ln \left(\sqrt{\frac{R_{20}}{R_{10}}} \right) \quad (41)$$

При $t = 0$ уравнение (40) будет задавать круговой контур скважины радиуса r_0 , а при $t = 1$ – овальную форму контура питания. Естественно, параметры r_0, R_1 и R_2 должны быть подобраны так, чтобы кривые $r(t_1, \theta)$ и $r(t_2, \theta)$ при $t_1 \neq t_2$ не пересекались бы друг с другом. Последнее условие накладывает определённые ограничения на диапазон изменения геометрических параметров r_0, R_1 и R_2 , задающих размеры и форму области фильтрации. Опуская выкладки, приведём лишь окончательные результаты расчётов оценок \bar{Q} и \underline{Q} по формулам (33) и (38) для случая *линейного режима фильтрации* (в (2) коэффициент $\alpha = 1$, $B = \frac{\mu}{k}$; μ – динамическая вязкость жидкости, k – коэффициент проницаемости среды) и для случая *фильтрации по закону А.А. Краснопольского* (в (2) коэффициент $\alpha = 2$).

Для дебита круговой скважины, работающей в данном пласте при *линейном режиме фильтрации*, получены следующие оценки:

$$\frac{\bar{Q}}{Q_0} = \frac{\ln(R_{10})}{\int_0^1 \frac{dt}{h(t)}}; \quad (42)$$

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\ln(R_{10})}{\sqrt{\ln^2 R_0 - a^2}}; \quad (43)$$

где

$$Q_0 = \frac{2\pi \cdot k \cdot (P_{\text{п}} - P_{\text{с}})}{\mu \cdot \ln(R_{10})}; \quad (44)$$

$$h(t) = \frac{g(t)}{\sqrt{(R_0 - 1)^2 - a^2 \cdot g^2(t)}} + \frac{a^2 t^2 \cdot g(t)}{(R_0 - 1) + \sqrt{(R_0 - 1)^2 - a^2 \cdot g^2(t)}}; \quad (45)$$

$$g(t) = (R_0 - 1) \cdot t + 1. \quad (46)$$

Ранее В.Л. Даниловым в [48] для режима *линейной фильтрации* рассчитывались дебиты скважин в пластах с произвольным контуром питания. При этом расчёт дебита круговой одиночной скважины в [48] сводился к отысканию параметра двухсвязности области фильтрации, что в свою очередь требовало решения нелинейного сингулярного интегрального уравнения. Решение последнего удавалось найти в очень редких случаях. В качестве примера применения своей теории В.Л. Данилов приводит расчёт дебита круговой скважины в пласте с контуром питания, совпадающим (с точностью до обозначений) с (40) при $t = 1$. В частности, в [48] выполнены расчёты для двух, уже приводившихся в §5.1 примеров (примеры 2 и 3). Приведём теперь результаты расчётов дебитов этих же скважин для линейного режима фильтрации по предлагаемой методике.

Для условий примера №2 из §5.1 находим, что $R_{10} = 5,458$; $R_{20} = 8,143$; $\frac{\bar{Q}}{Q_0} = 0,9046$; $\frac{Q}{Q_0} = 0,8996$. В качестве расчётного значения Q/Q_0 примем среднее арифметическое $\frac{\bar{Q} + Q}{2Q_0}$ и найдём, что $Q/Q_0 = 0,9021$. Для исходных данных этого базисная величина Q_0 (которую для единицы длины скважины рассчитываем по (44)) равна $800,05 \text{ м}^3/\text{сутки}$. Стало быть, по В.Л. Данилову $Q/Q_0 = 0,9033$, что отличается от нашего результата на $0,13\%$.

Для условий примера №3 из §5.1 находим, что $R_{10} = 6065$; $R_{20} = 16487$; $\frac{\bar{Q}}{Q_0} = 0,9566$; $\frac{Q}{Q_0} = 0,9471$. Принимая за расчётное значение дебита Q/Q_0 среднее арифметическое, получим $Q/Q_0 = 0,9519$. Для этого базисная величина $Q_0 = 311,95 \text{ м}^3/\text{сутки}$, и поэтому, по В.Л. Данилову $Q/Q_0 = 0,9553$, что отличается от нашего результата на $0,36\%$.

Для дебита этой же скважины, но работающей в условиях *нелинейного режима фильтрации по закону А.А. Краснопольского*, получены оценки:

$$\frac{\bar{Q}}{Q_0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{R_{10}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 \frac{dt}{h^2(t)}}}; \quad (47)$$

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{R_{10}}} \cdot \int_0^{2\pi} g(\theta) \cdot d\theta; \quad (48)$$

Здесь, в отличие от предыдущего случая, выбрана другая базисная величина Q_0 , а именно:

$$Q_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R_1 \cdot r_0 \cdot (p_{\Pi} - p_c)}{B \cdot (R_1 - r_0)}}. \quad (49)$$

Функции $h(t)$ и $g(\theta)$ в (47) и (48) находятся по формулам

$$g(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{R_0} \cdot e^{a \cdot \cos \theta}}}, \quad (50)$$

$$h(t) = \int_0^{2\pi} f(t, \theta) \cdot d\theta, \quad (51)$$

$$f(t, \theta) = \frac{[(R_0 - 1) \cdot t + 1] \cdot (1 + a^2 t^2 \cdot \sin^2 \theta)^{3/4} \cdot e^{-a \cdot t \cdot \cos \theta / 2}}{\sqrt{(R_0 - 1) \cdot (1 - a \cdot t \cdot \cos \theta) - a \cdot \cos \theta}}. \quad (52)$$

Таким образом, предлагаемый в этом параграфе метод расчёта дебитов одиночных скважин имеет приемлемую для практики точность расчётов, и, кроме того, по сравнению с [48] он более удобен в вычислительном отношении, так как требует лишь методов численного интегрирования. Наконец, предложенный метод в отличие от [48] применяется не только в случае линейного режима фильтрации, но и для нелинейной фильтрации со степенными законами (2).

5.4 Расчёт дебитов и поля давления для группы скважин (многоскважинная система без учёта ПЗС)

Одним из важных для нефтепромысловой практики вопросов, является определение оптимального числа скважин по отношению к их суммарному де-

биту. В этом и следующих параграфах рассматриваются 1) общие методы решения такой задачи и 2) приводятся конкретные числовые примеры расчётов суммарного дебита n скважин, имеющие главным образом иллюстративное значение и предназначенные для их использования в чтении спецкурсов по приложениям методов ТФКП в механике сплошных сред студентам нефтегазовых специальностей.

5.4.1 Постановка задачи и общий метод решения. Рассмотрим теперь задачу об интерференции n скважин, эксплуатирующих неоднородный пласт с проницаемостью (1.1). Область фильтрации D ограничена контуром питания Π , на котором потенциал φ принимает заданное значение

$$\varphi|_{\Pi} = \varphi_{\Pi} = \text{const}, \quad (1)$$

а на круговых контурах $C_k : (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 = r_k^2$ скважин с радиусами r_k (где $k = 1, 2, \dots, n$) заданы значения

$$\varphi|_{C_k} = \varphi_k = \text{const}. \quad (2)$$

Требуется рассчитать в области D поле давления и удельные дебиты Q_k каждой скважины. Представим поэтапное решение данной задачи.

1 этап. Каким - либо численным методом решаем n взаимно независимых краевых задач:

$$\begin{cases} L[f_k(x, y)] = 0 \\ f_k(x, y)|_{\Pi} = -g(x, y, x_k, y_k)|_{\Pi} \\ (k = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (3)$$

где $g(x, y, x_k, y_k)$ – известное 1-ое фундаментальное решение уравнения (1.2).

2 этап. Строим вспомогательные функции – функции Грина $\varphi_k(x, y)$:

$$\begin{cases} \varphi_k(x, y) = g(x, y, x_k, y_k) + f_k(x, y) \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4)$$

Каждая из функций Грина $\varphi_k(x, y)$ удовлетворяет (по построению) уравнению (1.2) и граничному условию

$$\varphi_k|_{\Pi} = 0. \quad (5)$$

Гидродинамический смысл решений (4) заключается в том, что они описывают течения к точечным стокам в точках (x_k, y_k) с нормированными дебитами $q_k = 2\pi$.

3 этап. Линейный характер уравнения (1.2) позволяет искать потенциал $\varphi(x, y)$ течения от n скважин через построенные функции (4) в виде линейной комбинации

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \varphi_k(x, y) + A, \quad (6)$$

где A – неопределённая аддитивная постоянная, а λ_k – неопределённые множители, связанные с искомыми дебитами Q_k формулами

$$\lambda_k = \frac{Q_k}{2\pi}; \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

Для определения $(n+1)$ неизвестных постоянных A и λ_k используем граничные условия (1) и (2).

4 этап. Из граничного условия (1) найдём величину A . В силу (5) и (6)

$$A = \varphi_{\Pi} \quad (8)$$

Далее из граничных условий (2) получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно λ_k :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \varphi_i(x_k, y_k) + \lambda_k \cdot \varphi_k(x_k + \Delta x_k, y_k + \Delta y_k) = \varphi_k - \varphi_{\Pi} \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (9)$$

В (9) знак “штрих” у суммы означает, что индекс суммирования $i \neq k$, а Δx_k и Δy_k – такие приращения координат x_k, y_k , которые определяют некоторую точку на контуре C_k , т.е. $(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2 = r_k^2$. Решая СЛАУ (9), найдём неизвестные λ_k , затем по формуле (6) потенциал $\varphi(x, y)$, а значит, и поле давления $P(x, y)$ в области фильтрации, и, наконец, по формулам (7) вычислим дебиты Q_k каждой скважины.

Замечание 1. При записи СЛАУ (9) приняли следующее допущение: вклад в величину результирующего давления на контуре k -ой скважины от i -ой скважины принят соответствующим значением потенциала последней в точке расположения k -ой скважины, т.е. $\lambda_i \cdot \varphi_i(x_k, y_k)$. Это допущение оправдывается тем, что расстояния между скважинами намного больше их радиусов.

5.4.2 Интерференция скважин, эксплуатирующих однородный круговой пласт.

Чтобы исследовать интерференцию (взаимодействие) скважин, эксплуатирующих однородный изотропный пласт с круговой границей контура питания радиуса R , нужно знать потенциал скорости фильтрации, описывающий течение к отдельной скважине. Такой потенциал $\varphi_k(x, y)$ течения к k -ой скважине с радиусом r_k^0 , расположенной в круговом пласте в точке $z_k = x_k + iy_k = r_k(\cos \Theta_k + i \sin \Theta_k)$, имеет вид [41, 48, 201]

$$\varphi_k(x, y) = -\frac{Q_k}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2}{(x-x_k^*)^2 + (y-y_k^*)^2}} + A, \quad (10)$$

где $x_k^* = \frac{R^2}{r_k} \cos \Theta_k$, $y_k^* = \frac{R^2}{r_k} \sin \Theta_k$. Потенциал скорости фильтрации для батареи из n скважин складывается из потенциалов течений к отдельным скважинам и имеет вид:

$$\varphi(x, y) = -\sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2}{(x-x_k^*)^2 + (y-y_k^*)^2}} + A. \quad (11)$$

С помощью (11) составим систему (9) из $n+1$ уравнений для дебитов каждой скважины и постоянной A . Такая система будет выглядеть следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{2\pi} \ln \left(\frac{r_k}{R} \right) + A = \varphi_n \\ -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^n \frac{Q_k}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(x_m - x_k)^2 + (y_m - y_k)^2}{(x_m - x_k^*)^2 + (y_m - y_k^*)^2}} - \frac{Q_m}{2\pi} \ln \frac{R r_m^0}{R^2 - r_m^2} + A = \varphi_m \\ m = \overline{1, n} \end{array} \right. \quad (12)$$

Если решение системы (12) будет найдено, то получим значения дебитов отдельных скважин, а также суммарный дебит всей батареи. Для решения системы уравнений (12) предварительно приведём её к безразмерному виду. С этой целью введем в рассмотрение базисную величину для измерения дебитов - дебит Q_0 центральной круговой скважины с радиусом r_0 , который вычисляется по

формуле Дюпюи $Q_0 = \frac{2\pi k(P_n - P_0)}{\mu \ln \left(\frac{R}{r_0} \right)}$. Потенциал скорости фильтрации $\varphi(x, y)$ свя-

зан с приведенным давлением $P(x, y)$ формулой $\varphi(x, y) = -\frac{kP(x, y)}{\mu}$, поэтому

$$\frac{\varphi_{\Pi}}{Q_0} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{P_{\Pi}}{P_{\Pi} - P_0} \cdot \ln\left(\frac{R}{r_0}\right), \quad \frac{\varphi_m}{Q_0} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{P_m}{P_{\Pi} - P_0} \cdot \ln\left(\frac{R}{r_0}\right), \quad \frac{\varphi_m - \varphi_{\Pi}}{Q_0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{P_{\Pi} - P_m}{P_{\Pi} - P_0} \cdot \ln\left(\frac{R}{r_0}\right).$$

Постоянную A исключим из системы уравнений (12). Для этого вычтем первое уравнение из всех последующих. Если в получившейся системе затем каждое уравнение разделить на Q_0 , то окончательно получим систему уравнений:

$$AX = B \quad \text{с матрицами} \quad A = (a_{mk}), \quad X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_m = \frac{Q_m}{Q_0}, \quad (13)$$

где $b_m = -\frac{P_{\Pi} - P_m}{P_{\Pi} - P_0} \cdot \ln\left(\frac{R}{r_0}\right)$, $a_{mk} = \ln\left[\frac{R}{r_k} \sqrt{\frac{(x_m - x_k)^2 + (y_m - y_k)^2}{(x_m - x_k)^2 + (y_m - y_k)^2}}\right]$, $a_{mm} = \ln\left(\frac{R r_m^0}{R^2 - r_m^2}\right)$,

$m = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, n}$. В полярных координатах коэффициент a_{mk} имеет вид:

$$a_{mk} = \ln\left\{\sqrt{\frac{R^2(r_m^2 + r_k^2 - 2r_m r_k \cos(\Theta_m - \Theta_k))}{R^4 + r_m^2 r_k^2 - 2r_m r_k R^2 \cos(\Theta_m - \Theta_k)}}\right\}. \quad \text{Последняя формула показывает, что } a_{mk} = a_{km},$$

т.е. матрица A симметрична. Поэтому для решения СЛАУ $AX = B$ можно применить метод квадратных корней³.

5.4.3 Вычислительные эксперименты по интерференции скважин, произвольно расположенных в изотропном однородном пласте круговой формы. С помощью системы уравнений (13) были проведены вычислительные эксперименты. В качестве общих исходных данных брались:

- радиус R контура питания 10 км,
- перепад давлений $P_{\Pi} - P_c$ на контурах скважин и контуре питания был равен 10 техн. атм.,
- проницаемость пласта – один Дарси ($k = 1D$),
- динамическая вязкость – один сантипуаз, т.е. $\mu = 1$ спз,
- радиус всех скважин $r_0 = r_k = 10$ см.

³ Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М., Наука, 1989.

Первый эксперимент

Взяты три круговые батареи по 4 скважины в каждой с радиусами 3, 5 и 7 км. Будем «вращать» вторую батарею относительно двух других и следить за изменениями суммарного дебита. Результаты вычислений представлены графически на рис.58, где по оси X отложен угол поворота 2-й батареи относительно двух других, по оси Y суммарный дебит $\frac{Q_{\Sigma}}{Q_0}$.

Эксперимент показал, что *максимальное значение суммарного дебита достигается для «шахматного» расположения скважин в батареях (угол поворота 45°), а минимальное – для размещения в параллельных батареях с тройками скважин на общих радиусах (угол поворота 0°).*

Второй эксперимент

Взята батарея из 12 скважин неравномерно расположенных на окружности радиусом 1 км. Полярные углы Θ_k скважин этой батареи были заданы с помощью геометрической прогрессии $\Theta_k = m^{k-1} \cdot \Theta_1$ со знаменателем, удовлетворяющем требованию $\Theta_{12} < 2 \cdot \pi$. Изменение m в пределах от $m = 1,3$ до $m = 1,6$ при $\Theta_1 = 1^{\circ}$ влекло соответствующее изменение неравномерной плотности распределения скважин на окружности. Суммарный дебит такой батареи для соответствующих плотностей распределения скважин представлен на рис.59.

Эксперимент показал, что *максимальный суммарный дебит $\frac{Q_{\Sigma}}{Q_0}$ приходится на закон равномерного распределения скважин в круговой батарее.*

Третий эксперимент

Взята батарея из 36 скважин, расположенных на окружности радиуса 1 км. Скважины в батарее расположены равномерно. Однако центр этой батареи будем перемещать вдоль диаметра пласта с шагом 500 м от центра пласта к его границе. По оси X на рис.60 отложено расстояние от пласта до центра батареи, по оси Y суммарный дебит $\frac{Q_{\Sigma}}{Q_0}$.

Эксперимент показал, что суммарный дебит $\frac{Q_{\Sigma}}{Q_0}$ такой батареи ведет себя так же, как дебит одиночной круговой укрупненной скважины, т.е. монотонно возрастает при приближении к границе контура питания.

Четвертый эксперимент

Представляет интерес закон изменения суммарного дебита на последовательности круговых батарей с равномерным расположением скважин на каждой из них. Пусть последовательность состоит из m батарей и i - текущий номер батареи в этой последовательности ($i=1,2, \dots, m$). Определим радиус r_0 i -ой батареи и удаление a центра этой батареи от центра пласта формулами: $r_0 = \frac{i}{m} \cdot (R - b)$, $a = \frac{m-i}{m} \cdot (R - b)$, в которых b - зафиксированная постоянная, определяющая минимальное расстояние от границы области питания до кругового контура рассматриваемой батареи. С увеличением номера i от 1 до m радиус r_0 увеличивается, а ее центр смещается к центру пласта. Таким образом, батарея с ростом номера i постепенно «раздувается» до окружности параллельной контуру питания. Результаты вычислений суммарного дебита на последовательности из $m = 10$ батарей, в каждой из которых было 36 равномерно расположенных скважин, представлены на рис.61, где по оси X отложен текущий номер i батареи, а по оси Y ее суммарный дебит $\frac{Q_{\Sigma}}{Q_0}$. Эксперимент показал, что суммарный дебит $\frac{Q_{\Sigma}}{Q_0}$ такой батареи увеличивается по мере ее «раздувания» и становится наибольшим, когда она располагается на окружности, параллельной контуру питания.

По результатам проведенных экспериментов можно сделать некоторые выводы по наилучшему способу расположения скважин в нефтеносных пластах. Для формулировок этих выводов предварительно дадим вспомогательное определение.

Пусть конечная односвязная область G ограничена выпуклым гладким контуром L . Контур L' будем называть внутренне параллельным L , если он представ-

ляет собой геометрическое место концов перпендикуляров одинаковой длины, восстановленных к L во всех его точках и направленных во внутрь области G .

Первое. Для эксплуатации нефтеносной области G с границей L группой скважин их надо располагать на контуре L' внутренне параллельном L . При этом на контуре L' скважины надо располагать равномерно по всей длине L' . В этом случае суммарный дебит такой батареи скважин будет максимальным (вывод основан на втором и четвертом экспериментах).

Второе. Если нефтеносная область G с границей L эксплуатируется не одной, а несколькими батареями скважин, то батареи надо располагать на контурах L', L'', \dots , внутренне параллельных с L . На каждом контуре L', L'', \dots скважины размещаются равномерно вдоль длины и при переходе от L' к L'' и т.д. нужно соблюдать «шахматный» порядок размещения скважин. Тогда суммарный дебит оказывается максимальным. (Вывод по первому эксперименту).

Третье. Для расчета суммарного дебита одной круговой батареи скважин можно не решать СЛАУ (13), а моделировать эту батарею как одну укрупненную скважину, эксплуатирующую область G . (Вывод по третьему эксперименту).

5.5. Расчёт дебитов и поля давления для группы скважин обладающих индивидуальными фильтрационными свойствами в призабойных зонах (многоскважинная система с учётом индивидуальных свойств ПЗС)

В нефтепромысловой практике для повышения производительности добывающих скважин часто перед началом их эксплуатации призабойную зону скважины (ПЗС) подвергают специальной обработке. Чаще всего это или кислотная обработка ПЗС, или гидроразрыв пласта в ПЗС. В результате ПЗС получает фильтрационные свойства, отличающиеся от свойств всего остального пласта. Поэтому развитие теории расчёта дебитов многоскважинной системы, учитывающей возможные отличия эффективных коэффициентов проницаемости ПЗС от проницаемости пласта, имеет важное практическое значение.

5.5.1 Постановка задачи учёта особых фильтрационных свойств ПЗС и общий метод её решения. Для исследования влияния различий в фильтрационных

свойствах ПЗС и пласта на дебиты скважин в диссертации предлагается следующая модель:

1). Призабойную зону каждой скважины γ_m с радиусом r_{0m} ($m = 1, 2, \dots, n$) и с центром в точке (x_m, y_m) моделируем как круговую с границей

$$C_m : (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r_m^2 \quad (1)$$

и с радиусом r_m (рис.62).

2). Проницаемость в ПЗС γ_m (ввиду незначительных размеров ПЗС по сравнению с размерами всего пласта) принимаем постоянной, равной k_m . Фильтрационное течение в ПЗС примем за одномерное радиальное. Вследствие последнего приведённое давление вдоль границы C_m каждой ПЗС будет постоянным, равным P_m^* . Тогда удельный дебит Q_m такой скважины (с неизвестным давлением P_m^* на границе C_m и заданным приведённым давлением P_m на контуре скважины γ_m) будет рассчитываться по формуле Дюпюи

$$Q_m = \frac{2\pi k_m \cdot (P_m^* - P_m)}{\mu \cdot \ln\left(\frac{r_m}{r_{0m}}\right)} \quad (2)$$

3). Радиусы r_m всех ПЗС считаются достаточно малыми по сравнению с расстояниями между скважинами и с расстояниями от скважин до граничных точек контура питания, что позволяет для определения удельных притоков Q_m жидкости к круговым границам C_m применить теорию расчёта многоскважинной системы, изложенную в предыдущем §5.4.

Перейдём теперь к расчёту дебитов скважин с различными проницаемостями в ПЗС, считая, что допущения 1), 2) и 3) выполнены. В этом случае расчёт дебитов Q_m снова сведётся к решению СЛАУ (4.9). Однако теперь в правых частях СЛАУ (4.9) будут стоять разности $\varphi_m - \varphi_{\Pi} = \frac{k_0 \cdot (P_{\Pi} - P_m^*)}{\mu}$, содержащие новые неизвестные P_m^* – приведённые давления на границах C_m (величина P_{Π} – приведённое давление на контуре питания известна). Таким образом, число неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ пополнилось новыми $P_1^*, P_2^*, \dots, P_n^*$ и удвоилось. Поэтому к СЛАУ (4.9) дописываем

ещё n уравнений для $\lambda_m = \frac{Q_m}{2\pi}$, которые дают выражения для $\varphi_m - \varphi_{\Pi}$. Окончательно, для решения задачи приходим к СЛАУ

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \varphi_i(x_m, y_m) + \lambda_m \cdot \varphi_m(x_m + \Delta x_m, y_m + \Delta y_m) = \frac{k_0 \cdot (P_{\Pi} - P_m^*)}{\mu} \\ \lambda_m = \frac{k_m \cdot (P_m^* - P_m)}{\mu \cdot \ln\left(\frac{r_m}{r_{0m}}\right)} ; \quad m = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3)$$

Знак “штрих” в сумме снова означает, что $i \neq m$, а $(x_m + \Delta x_m, y_m + \Delta y_m)$ – координаты некоторой точки границы S_m .

5.5.2. Пример. Влияние скачков проницаемости ПЗС на интерференцию скважин произвольно расположенных в изотропном однородном пласте круговой формы. Обобщение формулы Щелкачева В.Н. В качестве конкретного примера применения СЛАУ (3) исследуем работу группы скважин в круговом однородном изотропном пласте, когда в призабойной зоне каждой скважины проницаемость среды отличается от проницаемости остальной части пласта.

Для удобства вначале перечислим все принятые в этом пункте обозначения:

- | | | |
|-----|--|------------|
| 1. | Радиус призабойной зоны k -ой скважины | r_{0k} |
| 2. | Радиус k -ой скважины | r_k |
| 3. | Радиус контура питания кругового пласта | R |
| 4. | Расстояние от центра пласта до скважины | r_k |
| 5. | Проницаемость ПЗС в окрестности k -ой скважины | k_k |
| 6. | Проницаемость всей остальной части пласта | k_0 |
| 7. | Давление на контуре питания | P_{Π} |
| 8. | Давление на контуре k -ой скважины | P_k |
| 9. | Давление на контуре ПЗС k -ой скважины | P'_k |
| 10. | Угол между вектором r_k и осью Ox | Θ_k |
| 11. | Общее количество скважин в пласте | n |

12. Удельный дебит k -ой скважины Q_k
13. Базисная величина для относительного сравнения дебитов (за Q_0 принят дебит фиктивной центральной скважины с радиусом r_0 , вычисляемый по формуле Дюпюи); Q_0
14. Динамическая вязкость жидкости μ

Теперь запишем конкретный вид системы уравнений для расчета дебитов скважин, эксплуатирующей рассматриваемый круговой пласт. Пусть комплексная координата k -ой скважины $z_k = x_k + iy_k = r_k e^{i\theta_k}$. Потенциал $\varphi_k(x, y)$ такой одиночной скважины записывается в виде (4.10). Так как количество жидкости, подтекающей к ПЗС k -ой скважины, равно её дебиту Q_k , а течение внутри ПЗС принято за одномерное радиальное, то для определения неизвестных значений дебитов через заданные давления на контуре питания и на контурах скважин после подстановки потенциала (4.10) в СЛАУ (3), приходим к следующей системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{2\pi} \ln\left(\frac{r_k}{R}\right) + C = \varphi_{\Pi} \\ -\sum_{k \neq m}^n \frac{Q_k}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(x_m - x_k)^2 + (y_m - y_k)^2}{(x_m - x_k^*)^2 + (y_m - y_k^*)^2}} - \frac{Q_m}{2\pi} \ln\left(\frac{R r_{om}}{R^2 - r_m^2}\right) + C = \varphi'_m \\ Q_m = \frac{2\pi k_m (P'_m - P_m)}{\mu \ln\left(\frac{r_{om}}{r_m}\right)}; \quad m = \overline{1, n} \end{array} \right. \quad (4)$$

Последнее уравнение в системе (4) записано на основе формулы Дюпюи для дебита центральной скважины в круговой области, за какие и приняты все ПЗС. Поскольку потенциал $\varphi(x, y)$ с приведённым давлением P связан зависимостью $\varphi(x, y) = -\frac{k_0}{\mu} P$, то φ_{Π} и φ'_m в системе (4) будут выражаться через давления P_{Π} и P'_m по формулам $\varphi_{\Pi} = -\frac{k_0}{\mu} P_{\Pi}$ и $\varphi'_m = -\frac{k_0}{\mu} P'_m$. Исключая в системе уравнений (4) произ-

вольную постоянную C и давления P'_m на границах ПЗС, относительно интересующих нас значений Q_k , представленных с помощью безразмерных отношений $\lambda_k = \frac{Q_k}{Q_0}$, снова получим СЛАУ $AX=B$. Матрицы A , X , B имеют тот же вид, что и в системе (4.13). Разница лишь в диагональных элементах a_{mm} , которые теперь вычисляются по формулам:

$$a_{mm} = \ln\left(\frac{R \cdot r_{0m}}{R^2 - r_m^2}\right) + \frac{k_0}{k_m} \ln\left(\frac{r_m}{r_{0m}}\right), \quad m = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Через Q_0 в СЛАУ $AX=B$ обозначен дебит фиктивной центральной скважины с радиусом r_0 и давлением на ее стволе P_0 , который вычисляется по формуле:

$$Q_0 = \frac{2\pi k_0 (P_n - P_0)}{\mu \ln\left(\frac{R}{r_0}\right)}.$$

В частном случае, когда n скважин расположены равномерно в круговой батарее с радиусом r_1 и с центром, совпадающим с центром пласта, а радиусы всех скважин, их ПЗС, и давления P_c на скважинах одинаковы, было получено следующее аналитическое решение рассматриваемой задачи:

$$Q = \frac{2\pi k_0 k_1 (P_n - P_c)}{\mu \left(k_0 \ln\left(\frac{R_0}{r_c}\right) + k_1 \ln(B) \right)} \quad (6)$$

где

$$B = \frac{R^{2n} - (r_1)^{2n}}{n \cdot R_0 \cdot R^n \cdot (r_1)^{n-1}}. \quad (7)$$

Здесь Q — удельный дебит одной скважины в батарее, r_c — радиус скважины, R_0 — радиус ПЗС скважин, k_1 — проницаемость ПЗС скважин. Суммарный дебит Q_Σ такой батареи определим после подсчета Q из (6) по формуле

$$Q_\Sigma = n \cdot Q. \quad (8)$$

Формула (6) обобщает формулу В.Н. Щелкачева для круговой батареи и переходит в последнюю при $k_0=k_1$ или при $r_0=r_c$.

Выведенные формулы (6)-(8) применялись в вычислительном эксперименте для исследования зависимости суммарного дебита центральной круговой батареи

от отношения проницаемостей $\frac{k_1}{k_0}$ ПЗС и остального пласта. В эксперименте радиус контура питания $R = 10$ км, радиус ПЗС $R_0 = 10$ м., радиус скважин $r_c = 0,1$ м. На рисунках 63-65 приведены графики зависимости суммарного относительного дебита батареи скважин от n и $\frac{k_1}{k_0}$.

Вычислительный эксперимент показал, что повышение проницаемости ПЗС более чем в 20 раз неоправданно. В промысловой практике достаточно увеличивать проницаемость ПЗС в 5 раз, т.к. дальнейшее увеличение проницаемости уже не столь эффективно.

Кроме того, результаты вычислительных экспериментов, представленные графически на рисунках 63-65, показали, что ухудшение проницаемости ПЗС сильнее сказывается на суммарном дебите батареи скважин, чем её увеличение. Поэтому при эксплуатации скважин необходимо предусматривать меры, предотвращающие понижение проницаемости ПЗС с течением времени.

5.6. Интерференция скважин с нелинейным режимом фильтрации в призабойных зонах

Особые фильтрационные свойства пласта в ПЗС могут появляться и без специальных воздействий на околоскважинные области. Это связано с тем, что с увеличением дебитов скважин скорости течения в ПЗС могут вырасти настолько, что в околоскважинной области фильтрация будет подчиняться уже нелинейному закону Дарси [112]:

$$\text{grad } P = -f(v) \cdot \frac{\vec{v}}{v}, \quad (1)$$

где P - приведённое давление, а $f(v)$ - функция, определяемая экспериментально и характеризующая конкретный закон фильтрации. На практике чаще всего, кроме линейного закона, распространены квадратичный закон фильтрации и степенные законы, в частности закон А.А. Краснопольского [112]. Чем больше дебит, тем больше размеры ПЗС, внутри которой фильтрация будет подчиняться нелинейному закону Дарси. Понятно поэтому, что теория взаимодействия п

скважин, в призабойных зонах которых может нарушаться линейный режим фильтрации, является актуальной для нефтепромысловой практики.

Для исследования влияния призабойных зон с нелинейной фильтрацией (ПЗНФ) на дебиты скважин предлагается следующая модель:

1). ПЗНФ для каждой скважины γ_m с радиусом r_{0m} ($m = 1, 2, \dots, n$) и с центром в точке (x_m, y_m) снова моделируем как круговую с границей (5.1) и с радиусом r_m . Подчеркнём, что радиусы ПЗНФ теперь считаются заранее не известными и подлежащими определению.

2). Будем предполагать, что радиусы r_m ПЗНФ малы по сравнению с расстояниями между скважинами и другими характерными размерами области течения. Поэтому течение жидкости в ПЗНФ будем рассматривать как одномерное радиальное. Вследствие последнего удельный дебит $Q_m = 2\pi \cdot \lambda_m$ скважины γ_m будем рассчитывать по формуле Дюпюи для нелинейного режима фильтрации, имеющей вид [112]:

$$\int_{r_{0m}}^{r_m} f_m \left(\frac{\lambda_m}{r} \right) \cdot dr = P_m^* - P_m, \quad (2)$$

где f_m – функция $f_m(v)$, характеризующая конкретный вид закона Дарси в ПЗС γ_m , а остальные обозначения прежние.

3). Фильтрация за пределами каждой ПЗНФ описывается уравнением (1.2), а удельные притоки Q_m к границам C_m можно вычислить по методу §5.5.

Если условия 1), 2) и 3) окажутся выполненными, то для расчёта удельных дебитов скважин, обладающих ПЗНФ, можно воспользоваться системой уравнений (5.3), в которой, однако, второе уравнение надо будет заменить на (2). Кроме того, сейчас появились как неизвестные радиусы r_m границ ПЗНФ. Эти радиусы предлагается определять по значению критического числа Рейнольдса [112] на границе C_m :

$$Re_{\text{кр}} = \frac{v \cdot \sqrt{k}}{v} \cdot \bar{f}(\varepsilon, C_1, \sigma), \quad (3)$$

где v – скорость фильтрации, k - проницаемость среды, $\nu = \mu/\rho$ - коэффициент кинематической вязкости жидкости, $\bar{f}(\varepsilon, C_1, \sigma)$ - некоторая безразмерная функция, вид которой определяется опытным путём, ε и C_1 – параметры шероховатости и извилистости поровых каналов среды, σ - коэффициент пористости среды. Поскольку на границе C_m скорость $v = \frac{Q_m}{2\pi r_m} = \frac{\lambda_m}{r_m}$, то уравнение для r_m ,

как следует из (3), будет иметь вид

$$\frac{\lambda_m \cdot \sqrt{k_m}}{\nu \cdot r_m} \cdot \bar{f}(\varepsilon_m, C_{1m}, \sigma_m) = Re_{кр} . \quad (4)$$

Таким образом, окончательно для расчёта дебитов скважин γ_m , обладающих ПЗНФ, получаем следующую систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \varphi_i(x_m, y_m) + \lambda_m \cdot \varphi_m(x_m + \Delta x_m, y_m + \Delta y_m) = \frac{k_0 \cdot (P_{II} - P_m^*)}{\mu} \\ \int_{r_{0m}}^{r_m} f_m\left(\frac{\lambda_m}{r}\right) \cdot dr = P_m^* - P_m \\ \frac{\lambda_m \cdot \sqrt{k_m}}{\nu \cdot r_m} \cdot \bar{f}(\varepsilon_m, C_{1m}, \sigma_m) = Re_{кр} \\ m = 1, 2, \dots, n; \quad i \neq m \end{array} \right. \quad (5)$$

Система (5) из $3n$ уравнений замкнутая, так как число неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, P_1^*, P_2^*, \dots, P_n^*, r_1, r_2, \dots, r_n$, соответствует числу уравнений. Решив систему (5), определим и удельные дебиты и поле давлений, т.е. получим полное решение задачи.

Основные результаты 5-ой главы: 1) разработаны общие математические модели, описывающие работу в изотропном неоднородном пласте а) *одиночной скважины*, б) *группы скважин*, в) *группы скважин со скачками проницаемостей в ПЗС*, г) *группы скважин с нелинейным режимом фильтрации в ПЗС*; 2) предложен метод построения серии точных решений (в постановке для двухсвязных областей) задач фильтрации к круговой скважине с конечным радиусом; 3) предложены вариационные методы расчёта верхних и нижних оценок дебита одиночной скважины; 4) по предложенным математическим моделям выполнены вычислительные эксперименты и сделаны выводы.

ГЛАВА 6. ТЕОРИЯ РАСЧЕТОВ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ В МНОГОСЛОЙНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

В 6-й главе разрабатывается теория расчётов плоскопараллельных фильтрационных течений в многослойной области G в виде криволинейного четырехугольника, ограниченного дугами координатных линий ортогональной изотермической системы координат P, Q . Расчётная область заполнена многослойной неоднородной анизотропной средой (МС-средой), границы отдельных слоёв которой совпадают с линиями $P = \text{const}$ (или $Q = \text{const}$). В изотермических P, Q и в декартовых (для прямоугольной области) координатах x, y расчёт поля в МС-среде осуществляется по алгоритмам, которые отличаются лишь не принципиальными деталями. Поэтому без ограничения общности рассматривается область $G = \{0 \leq x \leq l; 0 \leq y \leq h\}$ в виде прямоугольника $MBED$ (рис.66), заполненного средой с прямолинейной анизотропией.

6.1. Постановка задачи и принятые обозначения

Пусть требуется рассчитать некоторое векторное поле $\vec{u}(x, y) = v_x(x, y) \cdot \vec{i} + v_y(x, y) \cdot \vec{j}$ в прямоугольной области $G = \{0 \leq x \leq l; 0 \leq y \leq h\}$ границы $y = 0$ и $y = h$ которой назовём прямыми MD и BE соответственно. Область G считается заполненной материальной средой с прямолинейным типом анизотропии и физические характеристики которой претерпевают конечные разрывы во внутренних точках $0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = l$ области G . Такая ситуация типична, например, для кусочно-однородных сред в теории фильтрации. Главные направления анизотропии (ГНА) в каждой точке пусть совпадают с осями x и y декартовой системы координат, а собственные значения $\Gamma_1(x)$ и $\Gamma_2(x)$ тензора проницаемости, описывающие физические свойства среды, на каждом из отрезков $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ равны

$$\Gamma_1|_{x \in \Delta_i} = \tilde{\gamma}_{1i} = \gamma_i \cdot f_i(x); \quad \Gamma_2|_{x \in \Delta_i} = \tilde{\gamma}_{2i} = \varepsilon_i \cdot \gamma_i \cdot f_i(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $f_i(x)$ - непрерывная положительная на указанном отрезке функция принимающая на его концах значения $f_i(x_{i-1})=1$, $f_i(x_i)=\tau_i$, ε_i , γ_i , τ_i — положительные постоянные (рис.66). Коэффициент $\varepsilon = \tilde{\gamma}_{2i} / \tilde{\gamma}_{1i}$ будем называть коэффициентом анизотропии i -го слоя $[x_{i-1}, x_i]$, а τ_i — коэффициентом неоднородности i -го слоя. Безразмерные уравнения, описывающие поле $\bar{u}(x,y)$ в рассматриваемой кусочно неоднородной среде с прямолинейной анизотропией, имеют вид

$$v_x = -\Gamma_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = -\Gamma_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (1)$$

где $\varphi(x, y)$ — некоторая скалярная функция, называемая потенциалом поля. Кроме уравнения (1), поле $\bar{u}(x,y)$ должно удовлетворять уравнению неразрывности, имеющему вид

$$\operatorname{div} \bar{u} = -\hat{\Omega}(y) \quad (2)$$

в котором $\hat{\Omega}(y)$ - плотность источников, определяемая для каждого i -го слоя через заданные кусочно-непрерывные по y функции $\omega_i(y)$ формулой

$$\hat{\Omega}(y)|_{x \in [x_{i-1}, x_i]} = \gamma_i \cdot \omega_i(y), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

После подстановки (1) в (2) для искомого потенциала поля $\varphi = \varphi(x,y)$ получаем следующее уравнение эллиптического типа с кусочно-непрерывными коэффициентами

$$L[\varphi(x,y)|\hat{\varepsilon}, F(x)] \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left[F(x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \hat{\varepsilon} \cdot F(x) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \Omega(y) \quad (4)$$

В уравнении (4) через $\hat{\varepsilon}$, $F(x)$ и $\Omega(y)$ обозначены следующие кусочно-непрерывные функции, задаваемые на i -ом слое формулами

$$\hat{\varepsilon}|_{x \in \Delta_i} = \varepsilon_i, \quad F(x)|_{x_i \in \Delta_i} = f_i(x); \quad \Omega(y)|_{x \in \Delta_i} = \omega_i(y).$$

Если значение потенциала $\varphi(x, y)$ послойно перенумеровать, то одно уравнение (4) с кусочно-непрерывными коэффициентами будет эквивалентно следующей системе уравнений эллиптического типа

$$L[\varphi_i(x,y)|\varepsilon_i, f_i(x)] = \omega_i(y); \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Однако в данной работе на систему уравнений (5) мы смотрим не только как на развёрнутую запись одного уравнения (4). Кроме такой точки зрения на систему (5), в работе будут рассматриваться и две другие. Первая – если имеется готовый алгоритм решения системы уравнений (5) (пусть даже для некоторого ограниченного класса функций $f_i(x)$), то насколько точно решение уравнения (4) с непрерывной в G , но сложной для интегрирования функцией $F(x)$ и постоянной $\bar{\epsilon}$, можно свести к решению системы (5), совокупность простых функций $f_i(x)$ которой будет в некотором смысле эквивалентна $F(x)$. Вторая – насколько точно расчёт поля в кусочно-непрерывных средах с характеристиками ϵ_i и $f_i(x)$, требующий решения системы уравнений (5), можно заменить на расчёт поля в сплошной непрерывной среде с эквивалентными в некотором смысле характеристиками $\bar{\epsilon}$ и $F(x)$, требующий решения только одного уравнения (4). Заметим, что в электротехнике при исследовании полей в многослойных средах второй из подходов часто, начиная с 1925 г., применялся Оллендорфом и предложенная им методика анизотропного эквивалентирования широко внедрилась в практику расчётов несмотря на то, что анализ погрешности метода и до настоящего времени изучен не достаточно.

6.2. Граничные условия 1-го типа (Дирихле по одной паре противоположных сторон прямоугольника и смешанные — по другой паре)

Перечислим теперь граничные условия, совместно с которыми решается система уравнений (1.5). Во –первых, на сторонах BE и MD задаются условия Дирихле:

$$\varphi_i(x,0)|_{x_i \in \Delta_i} = \Phi_1(x); \quad \varphi_i(x,h)|_{x_i \in \Delta_i} = \Phi_2(x); \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

где $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ – заданные непрерывные на $[0, \ell]$ функции. На сторонах MB и DE могут быть заданы различные условия – либо закон распределения потенциала (условия Дирихле), либо закон распределения нормальной составляющей v_n . Чтобы одновременно рассмотреть каждый из этих случаев, запишем граничные условия на сторонах MB и DE в виде:

$$\left(a_1^* \cdot \varphi_1 + b_1^* \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = F_1(y); \quad \left(a_2^* \cdot \varphi_n + b_2^* \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} = F_2(y). \quad (2)$$

Если в (2) положить $b_1^* = b_2^* = 0$, $a_1^* = a_2^* = 1$, то получим случай заданного с помощью функций $F_1(y)$ и $F_2(y)$ на границах $x = 0$ и $x = l$ закона распределения потенциала. Если же взять $a_1^* = a_2^* = 0$ и $b_1^* = -\gamma_1$, $b_2^* = \tau_n \gamma_n$, то получим случай заданного на границах MB и DE закона распределения нормальной составляющей v_n .

На границах контактов слоёв друг с другом должны выполняться условия непрерывности потенциала и нормальных составляющих v_n , т.е.

$$\text{при } x = x_{i-1}: \quad \varphi_{i-1} = \varphi_i \quad \text{и} \quad \gamma_{i-1} \cdot \tau_{i-1} \cdot \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial x} = \gamma_i \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \quad i = \overline{2, n}. \quad (3)$$

6.3. Передаточные функции. Переход к модельной задаче

Для дальнейшего понадобятся специальные частные решения однородного уравнения (1.5)

$$L[\psi_i(x, y) | \varepsilon_i, f_i(x)] = 0 \quad (1)$$

в областях $g_i = \{x_{i-1} < x < x_i; 0 < y < h\}$, которые на границах $y = 0$ и $y = h$ удовлетворяют некоторым непрерывным условиям типа Дирихле, а в вершинах g_i принимают заданные значения ($i = \overline{1, n}$)

$$\psi_i(x_{i-1}, 0) = \varphi_{iM}; \quad \psi_i(x_{i-1}, h) = \varphi_{iB}; \quad \psi_i(x_i, 0) = \varphi_{iD}; \quad \psi_i(x_i, h) = \varphi_{iE}. \quad (2)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что такими решениями уравнения (1), удовлетворяющими заданным значениям в вершинах прямоугольной области g_i , являются функции

$$\psi_i(x, y) = \tilde{a}_i + \tilde{b}_i \cdot \frac{\int_{x_{i-1}}^x \frac{dx}{f_i(x)}}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{f_i(x)}} + \tilde{c}_i \cdot \left(\frac{y}{h} \right) + \tilde{d}_i \cdot \frac{\left(\frac{y}{h} \right) \cdot \int_{x_{i-1}}^x \frac{dx}{f_i(x)}}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{f_i(x)}} \quad (3)$$

коэффициенты в которых равны:

$$\tilde{a}_i = \varphi_{iM}, \quad \tilde{b}_i = \varphi_{iD} - \varphi_{iM}, \quad \tilde{c}_i = \varphi_{iB} - \varphi_{iM}, \quad \tilde{d}_i = \varphi_{iE} + \varphi_{iM} - \varphi_{iB} - \varphi_{iD}. \quad (4)$$

Функции $\psi_i(x,y)$ будем называть передаточными функциями. Из (3) вытекает, что $\psi_i(x,y)$ на сторонах $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$ области g_i изменяется по линейному закону, а на сторонах $y = 0$ и $y = h$ изменяется непрерывно от φ_{iM} до φ_{iD} и от φ_{iB} до φ_{iE} соответственно - см. рис.67. Если заданные значения $\psi_i(x,y)$ в вершинах области g_i определить с помощью условий (2.1) по формулам

$$\varphi_{iM} = \Phi_1(x_{i-1}); \quad \varphi_{iB} = \Phi_2(x_{i-1}); \quad \varphi_{iD} = \Phi_1(x_i); \quad \varphi_{iE} = \Phi_2(x_i), \quad (5)$$

то функции $\psi_i(x,y)$ на границах $y = 0$ и $y = h$ в точках x_i , $i = \overline{0,n}$, будут принимать значения, совпадающие соответственно со значениями граничных условий $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$. Далее первоначально заданные граничные условия (2.1) будем заменять на новые приближённые к ним граничные условия

$$\varphi_i(x,0)|_{x \in \Delta_i} = \psi_i(x,0); \quad \varphi_i(x,h)|_{x \in \Delta_i} = \psi_i(x,h) \quad , \quad (6)$$

в которых коэффициенты функций $\psi_i(x,y)$ вычисляются по формулам (4) и (5). Если длины частичных отрезков $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ малы, то функции $\psi_i(x,y)$ достаточно точно передадут (откуда и происходит их название) значения заданных граничных условий. Если же отрезки Δ_i будут велики, то их можно разбить на более мелкие составные части, добавив ряд новых точек деления. Постановка задачи и её решение от этого принципиально не меняется. К тому же из общей теории линейных уравнений эллиптического типа, к которым относится уравнение (1.4), известно, что краевые задачи Дирихле являются корректными. Поэтому решение уравнения (1.4) с условиями (2.1) будет мало отличаться от решения этого же уравнения, но с приближёнными граничными условиями (6). Количественную оценку в изменении решения при замене точных граничных условий на приближённые будем определять с помощью вычислительных экспериментов. Краевую задачу для уравнения (1.4) с новыми граничными условиями (6) будем называть модельной задачей.

6.4. Формулировка граничных условий в модельной задаче

Решение уравнений (1.5) будем представлять в виде сумм

$$\varphi_i(x,y) = \psi_i(x,y) + w_i(x,y), \quad (1)$$

в которых $\psi_i(x,y)$ – передаточные функции (3.3). После подстановки (1) в (1.5) и учитывая, что $\psi_i(x,y)$ удовлетворяют однородному уравнению (3.1), для функций $w_i(x,y)$ получим уравнения

$$L[w_i(x,y)|\varepsilon_i, f_i(x)] = \omega_i(y); \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Так как в модельной задаче при $y = 0$ и $y = h$ выполняются условия (3.6), то на сторонах MD и BE функции $w_i(x,y)$ должны будут удовлетворять однородным граничным условиям

$$w_i(x,0) = w_i(x,h) = 0. \quad (3)$$

На границах контакта слоёв g_i друг с другом должны выполняться условия (2.3). Подставляя в (2.3) выражения (1) и учитывая формулы (3.3) и (3.4), граничные условия сопряжения в модельной задаче после преобразований примут вид: при $x = x_{i-1}$

$$w_{i-1}(x_{i-1}, y) = w_i(x_{i-1}, y); \quad i = \overline{2, n} \quad (4)$$

и

$$\gamma_{i-1} \cdot \tau_{i-1} \cdot \frac{\partial w_{i-1}}{\partial x} = \gamma_i \cdot \frac{\partial w_i}{\partial x} + L_{i-1}(y). \quad (5)$$

В формуле (5) через $L_{i-1}(y)$ обозначена функция

$$L_{i-1}(y) = \gamma_i \left[\frac{\Delta\Phi_1^{(i)} + \frac{y}{h} \cdot (\Delta\Phi_2^{(i)} - \Delta\Phi_1^{(i)})}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{f_i(x)}} \right] - \gamma_{i-1} \cdot \left[\frac{\Delta\Phi_1^{(i-1)} + \frac{y}{h} \cdot (\Delta\Phi_2^{(i-1)} - \Delta\Phi_1^{(i-1)})}{\int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \frac{dx}{f_{i-1}(x)}} \right]$$

в которой $\Delta\Phi_1^{(i)}$ и $\Delta\Phi_2^{(i)}$ – приращения функций $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ на отрезках Δ_{i-1} и Δ_i :

$$\Delta\Phi_1^{(i)} = \Phi_1(x_i) - \Phi_1(x_{i-1}) \quad \text{и} \quad \Delta\Phi_2^{(i)} = \Phi_2(x_i) - \Phi_2(x_{i-1}) \quad (6)$$

На сторонах MB и DE, т.е. при $x = 0$ и $x = \ell$, должны выполняться условия (2.2). Подставляя в (2.2) функции $\varphi_1 = \psi_1 + w_1$ и $\varphi_n = \psi_n + w_n$, после

преобразований для соответствующих граничных условий в модельной задаче получим:

$$\left(a_1^* \cdot w_1 + b_1^* \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \hat{F}_1(y), \quad (7)$$

$$\left(a_2^* \cdot w_n + b_2^* \cdot \frac{\partial w_n}{\partial x} \right) \Big|_{x=1} = \hat{F}_2(y), \quad (8)$$

где через $\hat{F}_1(y)$ и $\hat{F}_2(y)$ обозначены выражения

$$\hat{F}_1(y) = F_1(y) - a_1^* \left\{ \Phi_1(0) + \frac{y}{h} [\Phi_2(0) - \Phi_1(0)] \right\} - b_1^* \frac{\Delta\Phi_1^{(1)} + \frac{y}{h} (\Delta\Phi_2^{(1)} - \Delta\Phi_1^{(1)})}{\int_0^{x_1} \frac{dx}{f_1(x)}} \quad (9)$$

и

$$\hat{F}_2(y) = F_2(y) - a_2^* \left\{ \Phi_1(1) + \frac{y}{h} [\Phi_2(1) - \Phi_1(1)] \right\} - b_2^* \frac{\Delta\Phi_1^{(n)} + \frac{y}{h} (\Delta\Phi_2^{(n)} - \Delta\Phi_1^{(n)})}{\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{f_n(x)}} \quad (10)$$

Итак, задача о расчёте поля в многослойной среде (МС-среде) свелась к решению системы уравнений (2) с граничными условиями (3)-(5), (7) и (8).

6.5. Представление решений $w_i(x, y)$ рядами Фурье

Решения системы уравнений (4.2) в модельной задаче будем представлять в виде тригонометрических рядов Фурье

$$w_i(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} U_{ik}(x) \cdot \sin(\lambda_k y), \quad \text{где} \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{h}. \quad (1)$$

Такая форма представления $w_i(x, y)$ выбрана потому, что граничные условия (4.3) благодаря ей оказываются выполненными. Функции же $U_{ik}(x)$ в (1) подберём так, чтобы при подстановке $w_i(x, y)$ в уравнение (4.2) последнее обратилось в тождество. Предполагая правомочность двукратного дифференцирования рядов (1) по каждому аргументу, после подстановки (1) в (4.2) получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{d}{dx} \left[f_i(x) \cdot \frac{dU_{ik}(x)}{dx} \right] - \lambda_k^2 \cdot \varepsilon_i \cdot f_i(x) \cdot U_{ik}(x) \right\} \cdot \sin(\lambda_k y) = \omega_i(y). \quad (2)$$

Если теперь разложить $\omega_i(y)$ в ряд Фурье по синусам $\sin(\lambda_k \cdot y)$ и затем сравнить левые и правые части (2), то для функций $U_{ik}(x)$ получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[f_i(x) \cdot \frac{dU_{ik}(x)}{dx} \right] - \lambda_k^2 \cdot \varepsilon_i \cdot f_i(x) \cdot U_{ik}(x) = A_{ik}, \\ i = \overline{1, n}; \quad k = 1, 2, 3, \dots, \infty \end{cases} \quad (3)$$

где A_{ik} – коэффициенты Фурье для функций $\omega_i(y)$, т.е.

$$A_{ik} = \frac{2}{h} \cdot \int_0^h \omega_i(y) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{h} y\right) dy. \quad (4)$$

Решения уравнений (3) будем искать с помощью подстановки

$$U_{ik}(x) = \frac{V_{ik}(x)}{\sqrt{f_i(x)}}. \quad (5)$$

Выполнив преобразования, для вспомогательной функции $V_{ik}(x)$ получим уравнение:

$$\frac{d^2 V_{ik}(x)}{dx^2} - [\lambda_k^2 \cdot \varepsilon_i + H_i(x)] \cdot V_{ik}(x) = \frac{A_{ik}}{\sqrt{f_i(x)}}, \quad (6)$$

в котором через $H_i(x)$ обозначено выражение

$$H_i(x) = \frac{1}{\sqrt{f_i(x)}} \cdot \frac{d^2}{dx^2} (\sqrt{f_i(x)}). \quad (7)$$

Формулы (5), (6) и (7) показывают, что вид функций $U_{ik}(x)$ зависит от закона изменения неоднородности i -го слоя g_i . Поэтому выделим прежде всего те частные случаи законов изменения $f_i(x)$, когда уравнение (6) имеет постоянные коэффициенты. Таких случаев три.

1). Однородно - анизотропная среда $f_i(x) = 1$; ($\tau_i = 1$). (8)

2). Анизотропная среда с квадратичным законом изменения неоднородности:

$$f_i(x) = \left[\frac{\sqrt{\tau_i} \cdot (x - x_{i-1}) + (x_i - x)}{x_i - x_{i-1}} \right]^2. \quad (9)$$

Подчеркнём, что если $\tau_i = 1$, то из (9) будет вытекать важный частный случай однородно - анизотропной среды (8).

3). Анизотропная среда с экспоненциальным законом.

$$f_i(x) = \exp\left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \ln \tau_i\right). \quad (10)$$

Здесь тоже при $\tau_i = 1$ получим 1-ый случай (8).

Из всех перечисленных наиболее приемлемым с точки зрения универсальности получаемых вычислительных алгоритмов, предназначенных для вычисления полей в широком спектре многослойных и неоднородных сред, оказывается последний третий случай. Именно поэтому в дальнейшем под функцией $f_i(x)$ (если нет специальных оговорок) будет пониматься функция (10), или, если $\tau_i = 1$, то считается что $f_i(x) \equiv 1$. Решая известными методами уравнение (6), в котором $f_i(x)$ задана по формуле (10), для функций $U_{ik}(x)$ получим выражения

$$U_{ik}(x) = C_{ik} \cdot g_{ik}(x) + D_{ik} \cdot p_{ik}(x) - \frac{A_{ik}}{\lambda_k^2 \cdot \epsilon_i \cdot f_i(x)}, \quad (11)$$

где $g_{ik}(x)$ и $p_{ik}(x)$ – линейно независимые частные решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (3). Эти частные решения удобно подобрать так, чтобы они удовлетворяли следующим краевым условиям:

$$g_{ik}(x_{i-1}) = 1; \quad g_{ik}(x_i) = 0; \quad p_{ik}(x_{i-1}) = 0; \quad p_{ik}(x_i) = 1. \quad (12)$$

Такие решения, как легко проверить, имеют вид:

$$g_{ik}(x) = \frac{\text{sh}[\beta_{ik} \cdot (x_i - x)]}{\sqrt{f_i(x)} \cdot \text{sh}(\beta_{ik} \cdot d_i)}; \quad p_{ik}(x) = \frac{\sqrt{\tau_i} \cdot \text{sh}[\beta_{ik} \cdot (x - x_{i-1})]}{\sqrt{f_i(x)} \cdot \text{sh}(\beta_{ik} \cdot d_i)}, \quad (13)$$

в котором обозначено

$$d_i = x_i - x_{i-1}; \quad \beta_{ik} = \sqrt{\lambda_k^2 \cdot \epsilon_i + a_i^2}; \quad a_i = \frac{\ln \tau_i}{2d_i}. \quad (14)$$

Подчеркнём, что если в формулах (11) и (13) положим $f_i(x) \equiv 1$ и $\tau_i = 1$, то получим, как частный случай, решение относящееся к однородному закону (8).

6.6. Алгебраизация граничных условий в модельной задаче

Рассмотрим теперь граничные условия (4.4), (4.5), (4.7) и (4.8). Подставляя в (4.4) выражения (5.1) и учитывая равенства (5.12), получим систему уравнений

$$\begin{cases} D_{i-1,k} - \frac{A_{i-1,k}}{\lambda_k^2 \cdot \varepsilon_{i-1} \cdot \tau_{i-1}} = C_{ik} - \frac{A_{ik}}{\lambda_k^2 \cdot \varepsilon_i} \\ (i = \overline{2, n}; \quad k = \overline{1, \infty}) \end{cases} \quad (1)$$

Аналогично, подставляя в (4.5) выражения (5.1) и выполняя необходимые преобразования, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} -\gamma_{i-1} \cdot \alpha_{i-1,k} \cdot C_{ik} + \gamma_{i-1} \cdot \tau_{i-1} \cdot (r_{i-1,k} - a_{i-1}) \cdot D_{i-1,k} + \frac{2 \cdot \gamma_{i-1} \cdot a_{i-1} \cdot A_{i-1,k}}{\lambda_k^2 \cdot \varepsilon_{i-1}} = \\ = -\gamma_i \cdot (r_{ik} + a_i) \cdot C_{ik} + \gamma_i \cdot \alpha_{ik} \cdot D_{ik} + \frac{2 \cdot \gamma_i \cdot a_i \cdot A_{ik}}{\lambda_k^2 \cdot \varepsilon_i} + L_{i-1,k}; \\ (i = \overline{2, n}; \quad k = \overline{1, \infty}) \end{aligned} \quad (2)$$

В системе уравнений (2) через α_{ik} и r_{ik} обозначены выражения:

$$\alpha_{ik} = \frac{\beta_{ik} \cdot \sqrt{\tau_i}}{\operatorname{sh}(\beta_{ik} \cdot d_i)}; \quad r_{ik} = \beta_{ik} \cdot \operatorname{cth}(\beta_{ik} \cdot d_i) \quad (3)$$

а через $L_{i-1,k}$ – коэффициенты разложений в ряды Фурье функций $L_{i-1}(y)$.

Последние имеют вид:

$$\begin{aligned} L_{i-1,k} = \frac{2}{\pi k} \cdot \left\{ (-1)^{k+1} \cdot \left[T_i (\Delta \Phi_2^{(i)} - \Delta \Phi_1^{(i)}) - T_{i-1} (\Delta \Phi_2^{(i-1)} - \Delta \Phi_1^{(i-1)}) \right] + \right. \\ \left. + [1 - (-1)^k] \cdot (T_i \cdot \Delta \Phi_1^{(i)} - T_{i-1} \cdot \Delta \Phi_1^{(i-1)}) \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где через T_i обозначены выражения

$$T_i = \begin{cases} \frac{\gamma_i \tau_i \cdot \ln(\tau_i)}{(\tau_i - 1) \cdot d_i}, & \text{если } \tau_i \neq 1 \\ \frac{\gamma_i}{d_i}, & \text{если } \tau_i = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Наконец, подставляя $w_1(x,y)$ и $w_n(x,y)$ из (5.1) в (4.7) и (4.8) соответственно, для граничных условий при $x = 0$ и $x = \ell$ получим выражения:

$$C_{1k} \cdot [a_1^* - b_1^* \cdot (r_{1k} + a_1)] + D_{1k} \cdot b_1^* \cdot \alpha_{1k} = \widehat{F}_{1k} + \frac{(a_1^* - 2a_1 b_1^*) \cdot A_{1k}}{\lambda_k^2 \cdot \varepsilon_1} \quad (6)$$

и

$$-\frac{b_2^* \cdot \alpha_{nk} \cdot C_{nk}}{\tau_n} + [a_2^* + b_2^* (r_{nk} - a_n)] D_{nk} = \widehat{F}_{2k} + \frac{(a_2^* - 2a_n b_2^*) \cdot A_{nk}}{\lambda_k^2 \cdot \varepsilon_n \cdot \tau_n} \quad (7)$$

Через \widehat{F}_{1k} и \widehat{F}_{2k} в (6) и (7) обозначены коэффициенты разложений в ряды Фурье функций $\widehat{F}_1(y)$ и $\widehat{F}_2(y)$, т.е.

$$\widehat{F}_{1k} = \frac{2}{h} \cdot \int_0^h \widehat{F}_1(y) \cdot \sin(\lambda_k y) \cdot dy; \quad \widehat{F}_{2k} = \frac{2}{h} \cdot \int_0^h \widehat{F}_2(y) \cdot \sin(\lambda_k y) \cdot dy$$

Таким образом, для отыскания потенциалов поля необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений (1), (2), (6) и (7).

6.7. Вычисление коэффициентов в рядах Фурье методом прогонки

Уравнение (6.1) показывает, что коэффициенты $D_{i-1,k}$ выражаются через C_{ik} . В частности, D_{1k} будет вычисляться через C_{2k} . Подставляя D_{1k} , выраженный из (6.1) через C_{2k} , в уравнение (6.6), получаем связь между коэффициентами C_{1k} и C_{2k} . Эта связь, после преобразований, даёт следующее уравнение:

$$C_{1k} = m_{2k} \cdot C_{2k} + S_{2k}, \quad (1)$$

где

$$m_{2k} = -\frac{b_1^* \cdot a_{1k}}{a_1^* - b_1^* \cdot (r_{1k} + a_1)} \quad (2)$$

и

$$S_{2k} = \frac{1}{a_1^* - b_1^* (r_{1k} + a_1)} \left\{ \widehat{F}_{1k} + \frac{(a_1^* - 2a_1 b_1^*) A_{1k}}{\lambda_k^2 \varepsilon_1} - b_1^* a_{1k} \left[\frac{A_{1k}}{\lambda_k^2 \varepsilon_1 \tau_1} - \frac{A_{2k}}{\lambda_k^2 \varepsilon_2} \right] \right\} \quad (3)$$

Аналогично, вычисляя с помощью уравнений (6.1) $D_{i-1,k}$ через C_{ik} и D_{ik} через $C_{i+1,k}$ и подставляя затем эти выражения в (6.2), относительно коэффициентов $C_{i-1,k}$, $C_{i,k}$ и $C_{i+1,k}$ получим трёхдиагональную систему линейных алгебраических уравнений. Такие системы, как известно, решаются методами прогонки. В соответствии с алгоритмом названного метода связь между коэффициентами C_{ik} и $C_{i+1,k}$ ищем в линейной форме

$$C_{ik} = m_{i+1,k} \cdot C_{i+1,k} + S_{i+1,k}, \quad (4)$$

в которой $m_{i+1,k}$ и $S_{i+1,k}$ - пока неизвестные прогоночные коэффициенты. Для определения прогоночных коэффициентов подставим

$$C_{i-1,k} = m_{ik} \cdot C_{ik} + S_{ik} \quad (5)$$

В трёхдиагональную систему линейных относительно $C_{i-1,k}$, C_{ik} и $C_{i+1,k}$ алгебраических уравнений. В результате подстановки и последующих преобразований получим рекуррентные формулы:

$$m_{i+1,k} = \frac{\gamma_i \cdot \alpha_{ik}}{\gamma_{i-1} \cdot \tau_{i-1} \cdot (r_{i-1,k} - a_{i-1}) + \gamma_i \cdot (r_{ik} + a_i) - \gamma_{i-1} \cdot \alpha_{i-1,k} \cdot m_{ik}} \quad (6)$$

и

$$S_{i+1,k} = m_{i+1,k} \cdot \left\{ \frac{\gamma_{i-1} \cdot \alpha_{i-1,k} \cdot S_{ik}}{\gamma_i \cdot \alpha_{ik}} + \left[\frac{A_{ik}}{\lambda_k^2 \cdot \varepsilon_i \cdot \tau_i} - \frac{A_{i+1,k}}{\lambda_k^2 \cdot \varepsilon_{i+1}} \right] - \frac{\gamma_{i-1} \cdot \tau_{i-1} \cdot (r_{i-1,k} - a_{i-1})}{\gamma_i \cdot \alpha_{ik}} \cdot \left[\frac{A_{i-1,k}}{\lambda_k^2 \cdot \varepsilon_{i-1} \cdot \tau_{i-1}} - \frac{A_{ik}}{\lambda_k^2 \cdot \varepsilon_i} \right] + \left[\frac{2a_i \cdot A_{ik}}{\lambda_k^2 \cdot \alpha_{ik} \cdot \varepsilon_i} - \frac{2\gamma_{i-1} \cdot a_{i-1} \cdot A_{i-1,k}}{\gamma_i \cdot \alpha_{ik} \cdot \lambda_k^2 \cdot \varepsilon_{i-1}} \right] + \frac{L_{i-1,k}}{\gamma_i \cdot \alpha_{ik}} \right\} \quad (7)$$

Отправляясь от известных значений m_{2k} и S_{2k} в (2) и (3), по рекуррентным формулам (6) и (7) вычислим m_{3k}, \dots, m_{nk} и S_{3k}, \dots, S_{nk} (т.к. $i = 2, 3, \dots, (n-1)$).

Рассмотрим теперь уравнения (6.1), (6.2) и (6.7) при $i = n$. Из (6.1) $D_{n-1,k}$ выразим через C_{nk} и подставим в (6.2). Коэффициент $C_{n-1,k}$ по формуле (5) выразим через C_{nk} и тоже подставим в (6.2). Тогда, преобразованное таким способом уравнение (6.2) и уравнение (6.7) дадут систему двух уравнений относительно неизвестных C_{nk} и D_{nk} . Решая эту систему, для C_{nk} и D_{nk} найдём следующие значения:

$$C_{nk} = \frac{[a_2^* + b_2^*(r_{nk} - a_n)] \cdot \tau_n \cdot R_1 + \tau_n \cdot \gamma_n \cdot \alpha_{nk} \cdot R_2}{[a_2^* + b_2^*(r_{nk} - a_n)] \cdot \tau_n \cdot q_1 - b_2^* \cdot \alpha_{nk}^2 \cdot \gamma_n} \quad (8)$$

и

$$D_{nk} = \frac{1}{a_2^* + b_2^* \cdot (r_{nk} - a_n)} \cdot \left\{ \frac{b_2^* \cdot a_{nk} \cdot C_{nk}}{\tau_n} + R_2 \right\} \quad (9)$$

Через q_1 , R_1 и R_2 в формулах (8) и (9) обозначены выражения:

$$q_1 = -\gamma_{n-1} \alpha_{n-1,k} m_{nk} + \gamma_{n-1} \tau_{n-1} (r_{n-1,k} - a_{n-1}) + \gamma_n (r_{nk} + a_n);$$

$$R_1 = \gamma_{n-1} \alpha_{n-1,k} S_{nk} - \gamma_{n-1} \tau_{n-1} (r_{n-1,k} - a_{n-1}) \cdot \left[\frac{A_{n-1,k}}{\lambda_k^2 \varepsilon_{n-1} \tau_{n-1}} - \frac{A_{nk}}{\lambda_k^2 \varepsilon_n} \right] + \frac{2\gamma_n a_n A_{nk}}{\lambda_k^2 \varepsilon_n} - \frac{2\gamma_{n-1} a_{n-1} A_{n-1,k}}{\lambda_k^2 \varepsilon_{n-1}} + L_{n-1,k}; \quad (10)$$

$$R_2 = \widehat{F}_{2k} + \frac{(a_2^* - 2b_2^* a_n) \cdot A_{nk}}{\lambda_k^2 \cdot \varepsilon_n \cdot \tau_n} \quad (11)$$

В заключение дадим краткое описание алгоритма по расчёту потенциала поля в прямоугольной многослойной области.

Во-первых, вычисляются коэффициенты m_{2k} и S_{2k} по формулам (2) и (3).

Во-вторых, вычисляются прогоночные коэффициенты m_{ik} и S_{ik} для $i = 3, 4, \dots, n$ по рекуррентным формулам (6) и (7).

В-третьих, вычисляем коэффициенты C_{nk} и D_{nk} по формулам (8) и (9).

В-четвёртых, вычисляем коэффициенты $C_{n-1,k}$; $C_{n-2,k}$; $C_{n-3,k}$; ...; C_{2k} ; C_{1k} по рекуррентным формулам (5).

В-пятых, по формулам (6.1) через C_{ik} последовательно вычисляем D_{1k} ; D_{2k} ; ...; $D_{n-1,k}$.

После этого остаётся подставить вычисленные коэффициенты C_{ik} и D_{ik} в ряды (5.1) и с их помощью вычислить потенциалы поля по формулам (4.1) для каждого слоя g_i в многослойной области.

6.8. Применения развитой теории

Изложенная теория расчёта статического поля в прямоугольной многослойной области может быть применена к решению следующих конкретных задач: 1). Для анализа точности моделирования многослойных сред (МС-сред) из периодически повторяющихся изотропных слоёв с разными проницаемостями анизотропно-однородными моделями Оллендорфа. 2). Для приближённого расчёта статического поля в неоднородной вдоль оси x прямоугольной области с произвольным законом изменения $\Gamma_1(x)$. В этом случае ось x разбиваем на частичные отрезки (диаметр разбиения будет зависеть от поставленной точности расчётов). Затем заменяем на частичных отрезках $\Gamma_1(x)$ на экспоненциальный закон изменения проницаемости. Подчеркнём, что на концах каждого частичного отрезка значения $\Gamma_1(x)$ и найденные из аппроксимирующего закона будут совпадать. После осуществлённой аппроксимации для расчёта поля в неоднородной среде применяем изложенную

методику расчёта поля в МС-среде. 3). Для расчёта при аналогичных краевых условиях поля в многослойной криволинейной области, ограниченной координатными линиями какой-либо изотермической системы координат. При этом границами слоёв должны быть координатные линии одно из семейств. Возможность применения развитой теории к расчёту полей в таких многослойных областях основана на том, что в изотермических координатах уравнение для потенциала и граничные условия принимают аналогичный для случая декартовых координат вид.

Для иллюстрации применения развитой теории далее приводятся три конкретных примера, имеющих самостоятельное практическое значение.

В первом примере анализ полученного решения, основанный на способе послыоного расчёта поля, выявил эффекты присущие только МС-средам. Доказано, что широко применяемый на практике метод однородно-анизотропного эквивалентирования МС-сред, основанный на идее Оллендорфа [252], не способен уловить эти особенности.

Во втором и третьем примерах показано, как на основе развитой в этой главе теории и предложенной операции интегрального эквивалентирования можно найти распределение потенциала поля в изотропных неоднородных средах. Проанализированы возможные числовые погрешности.

6.8.1 Метод интегрального эквивалентирования кусочно-неоднородных сред.

Однородно-анизотропное эквивалентирование. Рассмотрим случай, когда область G заполнена средой, главные проницаемости которой равны $\Gamma_1 = \gamma \cdot f(x)$ и $\Gamma_2 = \varepsilon \gamma \cdot f(x)$, где ε, γ - постоянные, $f(x)$ – кусочно-непрерывная на отрезке MD (рис.66) функция и плотность источников $\Omega(y) \equiv 0$. Тогда уравнение (1.4) будет иметь два частных решения, зависящих только от одной из координат. Первое $\varphi = \varphi_1(x)$, и второе $\varphi = \varphi_2(y)$, где

$$\varphi_1(x) = \varphi_a + (\varphi_b - \varphi_a) \cdot \frac{\int_a^x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}; \quad \varphi_2(y) = \varphi_a + (\varphi_b - \varphi_a) \cdot \frac{y-a}{b-a}.$$

Физический смысл этих решений в том, что они описывают однородные поля (в теории фильтрации – поступательные потоки), в первом линии тока направлены вдоль оси x , а во втором – вдоль y . Постоянные φ_a и φ_b – значения потенциала на прямых $x = a$, $x = b$ (в первом) и $y = a$, $y = b$ (во втором). Поток однородного поля в первом случае через нормальный к нему отрезок $x = \text{const}$, $0 < y < h$ равен

$$Q_1 = \int_0^h v_x dy = -\frac{\gamma h (\varphi_b - \varphi_a)}{\int_a^b \frac{dx}{f(x)}}, \quad (1)$$

а во втором случае через нормальный к нему отрезок $y = \text{const}$, $a < x < b$ равен

$$Q_2 = \int_a^b v_y dx = -\frac{\varepsilon \gamma (\varphi_b - \varphi_a)}{b - a} \cdot \int_a^b f(x) dx. \quad (2)$$

Определение: две физические среды с главными проницаемостями $\Gamma_1 = \gamma \cdot f(x)$, $\Gamma_2 = \varepsilon \gamma \cdot f(x)$ у первой и $\Gamma'_1 = \gamma' \cdot f'(x)$, $\Gamma'_2 = \varepsilon' \gamma' \cdot f'(x)$ у второй, называются интегрально эквивалентными в прямоугольнике $D = \{a < x < b; 0 < y < h\}$ если соответствующие потоки однородных полей в этих средах через прямые $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ при одинаковых граничных условиях φ_a и φ_b будут равными, т.е. если $Q_1 = Q'_1$ и $Q_2 = Q'_2$.

Приравнивая указанные потоки, получаем следующие выражения для условия интегральной эквивалентности двух сред в прямоугольнике D :

$$\frac{1}{\gamma} \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} = \frac{1}{\gamma'} \cdot \int_a^b \frac{dx}{f'(x)}; \quad \varepsilon \gamma \int_a^b f(x) dx = \varepsilon' \gamma' \int_a^b f'(x) dx \quad (3)$$

Приведём теперь важный для практики пример построения интегрально-эквивалентной среды для заданной. Пусть заданная среда – многослойная, составленная из чередующихся изотропных однородных слоёв с проницаемостями γ_1 и γ_2 и с толщинами h_1 и h_2 . Тогда $\varepsilon = 1$, $\gamma = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} \gamma_1, & \text{для } a \leq x \leq a + h_1 \\ \gamma_2, & \text{для } a + h_1 < x \leq a + h_1 + h_2 \end{cases}. \quad \text{Подберём для неё интегрально}$$

эквивалентную однородную анизотропную среду с характеристиками $\gamma' = \gamma'_1$,

$\varepsilon' = \gamma'_2/\gamma'_1$ и $f'(x) = 1$. Из решения системы уравнений (3) для γ'_1 и γ'_2 найдём, что

$$\gamma'_1 = \frac{(h_1 + h_2) \cdot \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}; \quad \gamma'_2 = \frac{\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2}{h_1 + h_2}. \quad (4)$$

Формулы (4) выводились другим путём и применялись ранее при расчётах физических полей в слоистых средах многими авторами. Например в [120-122], анализируя линии тока фильтрационного течения в физически малой окрестности и заменяя затем в ней истинную трубку тока течения на трубку тока некоторого эквивалентного суммарного движения Е.С. Ромм тоже приходит к формулам (4). Точно так же и Оллендорф [252] электротехнические расчёты потенциальных полей в мелкослойчатых средах выполняет с помощью (4) на однородно-анизотропных моделях МС-сред. На самом же деле погрешности расчётов, полученные методом однородно-анизотропной аппроксимации слоистой среды могут быть существенными. Кроме того, однородно-анизотропная аппроксимация МС-среды не может выявить свойства, присущие самим мелкослойчатым средам. Для подтверждения этого приведём следующий пример 1. Рассмотрим случай, когда прямоугольная область MBED (рис.66) заполнена чередующимися однородными изотропными слоями одинаковой толщины $h_1 = h_2$ и с проницаемостями γ_1 и γ_2 . Источники отсутствуют. Пусть на сторонах MD и BE заданы однородные граничные условия $\varphi = 0$, на стороне DE $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, а на стороне MB

$$\varphi|_{MB} = \sum_{k=1}^N a_k \cdot \sin\left(\frac{\pi k y}{h}\right), \quad (5)$$

где $a_k = \text{const}$. Потенциал $\varphi_{\text{ан}}(x, y)$ для однородно-анизотропной модели будет найден при тех же граничных условиях из уравнения (1.4), которое здесь

имеет вид $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$; $\varepsilon = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, $\lambda_1 = \frac{2\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$, $\lambda_2 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$. Точное решение

этой «анизотропной» краевой задачи такое:

$$\varphi_{ан}(x, y) = \sum_{k=1}^N a_k \cdot \frac{\text{ch}[\beta_k(\ell - x)]}{\text{ch}(\beta_k \ell)} \cdot \sin\left(\frac{\pi k y}{h}\right), \quad (6)$$

где $\beta_k = \sqrt{\varepsilon} \cdot \frac{\pi k}{h}$. С помощью (6) вычислим потоки Q_{BE} , Q_{MD} и Q_{MB} векторного поля \vec{v} через границы BE, MD и MB. Имеем:

$$Q_{MB} = \int_0^h v_x(0, y) dy = \lambda_1 \sqrt{\varepsilon} \sum_{k=1}^N a_k \cdot \text{th}(\beta_k \ell) \cdot [1 - (-1)^k]; \quad Q_{MD} = \int_0^{\ell} v_y(x, 0) dx = \lambda_1 \sqrt{\varepsilon} \sum_{k=1}^N a_k \cdot \text{th}(\beta_k \ell);$$

$$Q_{BE} = \int_0^{\ell} v_y(x, h) dx = -\lambda_1 \sqrt{\varepsilon} \sum_{k=1}^N (-1)^k a_k \cdot \text{th}(\beta_k \ell)$$

Естественно, как и должно быть по уравнению неразрывности, $Q_{MB} = Q_{MD} + Q_{BE}$. В контрольных расчётах граничное условие (5) имело вид

$$\varphi_{MB}(y) = \varphi_0 \cdot \sin^5\left(\frac{\pi y}{h}\right) = \varphi_0 \cdot \left(\frac{10}{16} \sin \frac{\pi y}{h} - \frac{5}{16} \sin \frac{3\pi y}{h} + \frac{1}{16} \sin \frac{5\pi y}{h}\right),$$

а для безразмерных параметров задавались значения $\varphi_0 = 100$, $\ell = h = 10$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 1$. Распределение потенциала и потоки Q_{MB} , Q_{MD} и Q_{BE} для многослойной среды вычислялись по изложенной в этой главе теории. Результаты вычислений для МС-среды и её однородно-анизотропной модели представлены в таблице 6.1 и на графике (рис.68).

Из представленных в таблице 6.1 и на графике на рис.68 видно следующее.

1). С увеличением числа слоёв на отрезке MD слоистая среда по своим свойствам приближается к однородно-анизотропной модели. Однако скорость достижения «анизотропного состояния» различна в отношении потоков и в отношении потенциала. Так погрешности в расчётах потоков в МС-среде по соответствующим потокам в анизотропной модели будут менее 1% начиная с 50 слоёв и выше (т.е. когда толщина отдельного слоя составляет 2% и менее от характерного размера ℓ расчётной области). В расчётах же потенциала (и его градиента) погрешность однородно-анизотропной модели долгое время остаётся большой. В частности, погрешность в определении φ по анизотропной модели будет менее 1%, если число слоёв на MD будет 80 и более (т.е. когда толщина отдельного слоя будет менее $\approx 1,2\%$ от характерного размера расчётной области). Таким

образом, однородно-анизотропное эквивалентирование МС-сред будет оправдано, в основном, в задачах расчёта потоков в слоистых средах, когда максимальная толщина отдельных слоёв не превышает 2% от характерного размера области. К аналогичному выводу приводят исследования и в 3-ей главе диссертации.

Таблица 6.1

Число слоёв	Q_{MD}	δ_Q (%)	$\varphi(5,5)$	δ_φ (%)
2	331,312	179,4	23,491	473,8
4	208,995	76,3	6,000	46,6
6	144,955	22,2	9,543	133,1
8	120,550	1,7	4,690	14,6
10	112,495	-5,1	6,822	66,6
12	110,548	-6,8	4,376	6,9
14	110,745	-6,6	5,857	43,1
16	111,590	-5,9	4,258	4,0
18	112,550	-5,1	5,384	31,5
20	113,427	-4,3	4,201	2,6
50	117,730	-0,7	4,495	9,8
70	118,156	-0,4	4,373	6,8
80	118,250	-0,3	4,101	0,2
100	118,350	-0,2	4,099	0,1
$N = \infty$ анизотр. среда	118,578	относ. погреш. (%)	4,094	относ. погреш. (%)

2). В столбике со значениями потока Q_{MD} видно, что когда на стороне MD укладывается 12 слоёв, поток Q_{MD} минимален. Это объясняется тем, что в этом случае линии тока поля, преломляясь на границах раздела слоев, выстраиваются в линии наибольшей длины. Анизотропная модель не

содержит информации о числе n слоёв и, поэтому в ней линии тока имеют одну и ту же геометрию для различного значения n . Именно, главным образом поэтому, анизотропная модель не может передать какие-то «глубинные» свойства МС-среды, почему и требуется развитие самостоятельной теории расчёта полей в слоистых средах.

6.8.2. Расчёт полей в изотропных неоднородных средах методом многослойного эквивалентирования.

Ещё одним практическим применением теории расчёта полей в МС-средах служит возможность её применения для исследования полей в сплошных неоднородных средах. Пусть, например, область G на рис.66 заполнена изотропной средой ($\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$) с проницаемостью

$$\Gamma(x) = \gamma f(x), \quad (7)$$

где $\gamma = \text{const}$, а $f(x)$ - некоторая положительная дифференцируемая функция.

Тогда уравнение (1.4) для потенциала $\varphi = \varphi(x, y)$ примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + f(x) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \Omega(y) \quad (8)$$

Доведение решений краевых задач для уравнения (8) с произвольной функцией $f(x)$ до числовых результатов приводит к серьёзным математическим трудностям. Для их преодоления будем моделировать среду с проницаемостью $\Gamma(x)$ некоторой эквивалентной многослойной изотропной средой. С этой целью границу MD области G разбиваем произвольным образом точками деления $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n =$ на частичные отрезки $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$ с единственным требованием: в пределах каждого Δ_i функция $f(x)$ должна меняться монотонно. Затем на каждом из частичных отрезков Δ_i среду с заданной проницаемостью $\Gamma(x)$ заменяем на слой g_i новой изотропной МС-среды, проницаемость которой выберем изменяющейся по экспоненциальному закону

$$\gamma'_i(x) = \gamma_i \cdot \exp \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \ln \tau_i \right) \quad (9)$$

Параметры γ_i и τ_i , характеризующие проницаемость i -го слоя МС-модели находим из условия интегральной эквивалентности (3) на отрезке Δ_i первоначально заданной среды и слоя g_i . После подстановки (9) в (3), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\gamma_i(x_i - x_{i-1}) \cdot (\tau_i - 1)}{\ln \tau_i} = \gamma \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \gamma \cdot A \\ \frac{(x_i - x_{i-1}) \cdot (\tau_i - 1)}{\ln \tau_i \cdot \tau_i \cdot \gamma_i} = \frac{1}{\gamma} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{f(x)} = \frac{1}{\gamma} \cdot B \end{cases} \quad (10)$$

Решение системы (10) сводится к отысканию корня τ_i трансцендентного уравнения

$$\frac{1}{\tau_i} \cdot \left(\frac{\tau_i - 1}{\ln \tau_i} \right)^2 = Q_i, \quad \text{где } Q_i = \frac{A \cdot B}{(x_i - x_{i-1})^2} \quad (11)$$

и последующему вычислению γ_i по формуле

$$\gamma_i = \gamma \cdot \sqrt{\frac{A}{\tau_i \cdot B}} \quad (12)$$

В силу известного в математическом анализе неравенства [213]

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{f(x)} \geq (x_i - x_{i-1})^2$$

вытекает, что в уравнении (11) $Q_i \geq 1$. Именно при

таких значениях Q_i уравнение (11) имеет два положительных корня τ_{1i} и τ_{2i} , произведение которых равно единице $\tau_{1i} \cdot \tau_{2i} = 1$. Большему корню отвечает случай монотонного возрастания $\gamma'_i(x)$ на отрезке Δ_i , а меньшему – случай монотонного убывания. Поэтому из двух возможных корней уравнения (11) выбираем тот, который соответствует возрастанию или убыванию на отрезке Δ_i заданной функции $f(x)$. В результате описанной процедуры локального эквивалентирования заданной среды на каждом частичном отрезке Δ_i новой средой с проницаемостью (9), получаем МС-среду из n слоёв и с характеристиками γ_i , τ_i , $\epsilon_i = 1$. Подчеркнём, что полученная МС-среда обладает не только локальными свойствами интегральной эквивалентности по отдельным слоям, но и глобальной интегральной эквивалентностью с

заданной средой во всей области G . Последнее непосредственно проверяется с помощью (3) при $a = x_0 = 0$ и $b = x_n = \ell$.

Приведём теперь **пример 2**, на котором продемонстрируем предлагаемую методику расчёта поля в неоднородной изотропной среде. Пусть проницаемость (7) заданной среды определяется законом

$$\Gamma(x) = \gamma \cdot (x + a)^2, \quad (13)$$

и источники в G отсутствуют, т.е. $\Omega(y) = 0$. Требуется рассчитать потенциал $\varphi = \varphi(x, y)$ при граничных условиях

$$\varphi|_{y=0} = \varphi|_{y=h} = \varphi|_{x=\ell} = 0 \quad (14)$$

и

$$\varphi|_{x=0} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \cdot \sin\left(\frac{\pi ky}{h}\right), \quad (15)$$

где $\alpha_k = \text{const}$. В этом контрольном примере точное решение уравнения (8) с условиями (14) и (15) имеет вид:

$$\varphi(x, y) = \frac{a}{x+a} \cdot \sum_{k=1}^N \alpha_k \cdot \frac{\text{sh}\left(\frac{\pi k(\ell-x)}{h}\right)}{\text{sh}\left(\frac{\pi k\ell}{h}\right)} \cdot \sin\left(\frac{\pi ky}{h}\right). \quad (16)$$

Значения φ в МС-модели среды (13) (все слои в которой выбирались одинаковыми по размерам) и найденные по теории для МС-сред, сравнивались с точным решением (16). Результаты расчетов (для $\ell = h = 10$, $a = 1$, $\alpha_1 = 10$, $N = 1$) представлены в таблице 6.2. Вычислительный эксперимент показал, что в этом опыте, начиная с пяти слоёв (т.е. когда толщина отдельного слоя составляет 20% и менее от размера участка монотонности $\Gamma(x)$) расчёт φ для МС-модели отличается от точного значения менее чем на 0,5%.

В следующем **примере 3** расчёт потенциала $\varphi(x, y)$ в неоднородной среде (13) проводится на той же самой МС-модели, но при других граничных условиях:

$$\varphi|_{y=h} = 1, \quad \varphi|_{y=0} = 0, \quad \varphi|_{x=0} = \sin\left(\frac{\pi y}{2h}\right), \quad \Gamma(x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0 \quad (17)$$

Таблица 6.2.

$y \setminus x$		$x = 2$	$x = 5$	$x = 7$
$y = 2$	5 слоёв	1,043	0,196	0,069
	10 слоёв	1,041	0,195	0,069
	20 слоёв	1,040	0,195	0,069
	50 слоёв	1,040	0,195	0,069
Точное решение		1.040	0.195	0.069
$y = 5$	5 слоёв	1,774	0,333	0,118
	10 слоёв	1,770	0,332	0,118
	20 слоёв	1,770	0,332	0,118
	50 слоёв	1,770	0,332	0,118
Точное решение		1.770	0.332	0.118
$y = 7$	5 слоёв	1,435	0,270	0,096
	10 слоёв	1,432	0,269	0,095
	20 слоёв	1,432	0,269	0,095
	50 слоёв	1,432	0,269	0,095
Точное решение		1.432	0.269	0.095

Точное решение краевой задачи (17) для уравнения (8), когда $\Omega(y) = 0$, имеет вид

$$\varphi(x, y) = \frac{y}{h} + \frac{2a}{\pi(x+a)} \cdot S,$$

где

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cdot \left\{ \operatorname{ch}\left(\frac{\pi k(\ell-x)}{h}\right) + \frac{h}{\pi k(\ell+a)} \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\pi kx}{h}\right) \right\}}{(4k^2-1) \cdot k \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\pi k\ell}{h}\right)} \cdot \sin\left(\frac{\pi ky}{h}\right) \quad (18)$$

Точные, найденные из (18), и приближённые, найденные по развитой в этой главе теории расчётов полей в слоистых средах, значения потенциала φ представлены в таблице 6.3 (при $\ell = h = 10$, $a = 1$). Вычислительный эксперимент показал, что и в этом опыте, начиная с 5 слоёв, расчёт φ для МС-модели практически совпадает с точным решением (относительная ошибка 0,8% и менее).

Таким образом, метод МС-эквивалентирования изотропных неоднородных сред приводит к практически точному решению, если:

- 1). Толщина отдельных слоёв на участках монотонного изменения проницаемости составляет не более 20% от размера участка монотонности и,
- 2) краевые условия на торцевой части МС-модели (т.е. при $y = 0$ и $y = h$) – постоянные величины. В заключении к данному пункту отметим, что в ряде случаев расчёт потенциала поля в изотропных неоднородных средах получается с приемлемой для практики точностью даже тогда, когда интегральное эквивалентирование осуществляется глобально, ко всей расчётной области, а не локально по отдельным слоям, как было сделано в примерах 2 и 3. Числовые эксперименты, подтверждающие это, приведены в статьях автора [208-210].

Таблица 6.3.

y \ x		x = 2		x = 5		x = 7	
y = 2	2 слоя	0,225	-1,7%	0,205	0,2%	0,202	0,8%
	5 слоёв	0,221	0,1%	0,205	0,2%	0,202	0,8%
	10 слоёв	0,221	0,1%	0,205	0,2%	0,202	0,8%
	Точ. реш.	0,2213	Относ. пог.(%)	0,2055	Относ. пог.(%)	0,2036	Относ. пог.(%)
y = 5	2 слоя	0,545	-1,2%	0,508	0,3%	0,504	0,5%
	5 слоёв	0,538	0,1%	0,508	0,3%	0,504	0,5%
	10 слоёв	0,538	0,1%	0,508	0,3%	0,504	0,5%
	Точ. реш.	0,5388	Относ. пог.(%)	0,5097	Относ. пог.(%)	0,5063	Относ. пог.(%)
y = 7	2 слоя	0,738	-0,7%	0,707	0,1%	0,703	0,3%
	5 слоёв	0,733	0,1%	0,707	0,1%	0,703	0,3%
	10 слоёв	0,733	0,1%	0,707	0,1%	0,703	0,3%
	Точ. реш.	0,7336	Относ. пог.(%)	0,7080	Относ. пог.(%)	0,7052	Относ. пог.(%)

6.9. Граничные условия 2 – го типа (Неймана по одной паре противоположных сторон прямоугольника и смешанные по другой паре)

В этом параграфе даётся дальнейшее развитие теории расчёта стационарных фильтрационных течений в многослойных средах. В отличие от §§1-7, сейчас границы BE и MD многослойной области на рис.66 рассматриваются как непроницаемые. Кроме того, считается, что в области MBED отсутствуют источники (стоки). В остальном исходные положения сохраняются прежними и поэтому решение рассматриваемой здесь задачи приведём в краткой форме.

Общая постановка задачи. Имеется прямоугольная область плоскопараллельной фильтрации несжимаемой жидкости MBED (рис. 66), состоящая из n отдельных слоёв с размерами d^1, d^2, \dots, d^n по оси x и с одинаковыми высотами h . (Здесь и далее параметры характеризующие i -ю полосу, будут снабжаться верхним индексом i , по нижнему индексу будет осуществляться суммирование. При возведении в степень индексированного параметра этот параметр записывается в скобках). Стороны MD и BE непроницаемы. На сторонах BM и ED задаются некоторые стационарные граничные условия (например, известно распределение потенциала). Требуется рассчитать потенциал и скорость фильтрации в данной области.

Уравнения и граничные условия. Плоскопараллельное поле $\vec{v}^i(x, y) = v_x^i(x, y) \cdot \vec{e}_x + v_y^i(x, y) \cdot \vec{e}_y$ скорости фильтрации в i -ом слое, главные направления анизотропии (ГНА) которого совпадают с направлениями осей x и y , описывается законом Дарси

$$v_x^i(x, y) = -\tilde{\gamma}_x^i \cdot \frac{\partial \varphi^i}{\partial x} ; \quad v_y^i(x, y) = -\tilde{\gamma}_y^i \cdot \frac{\partial \varphi^i}{\partial y} ; \quad \varphi^i = \frac{P^i}{\mu} \quad (1)$$

(где P^i – приведённое давление в i -ом слое) и уравнением неразрывности:

$$\operatorname{div} \vec{v}^i = \frac{\partial v_x^i}{\partial x} + \frac{\partial v_y^i}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

В формулах (1) $\varphi^i(x, y)$ — потенциал скорости фильтрации; $\tilde{\gamma}_x^i$ и $\tilde{\gamma}_y^i$ — главные проницаемости i -го слоя вдоль ГНА, которые зависят от координаты x

рассматриваемых МС - сред следующим образом: $\tilde{\gamma}_x^i = \gamma^i f^i(x)$; $\tilde{\gamma}_y^i = \varepsilon^i \gamma^i f^i(x)$

где ε^i — коэффициент анизотропии; $\varepsilon^i = \frac{\tilde{\gamma}_y^i}{\tilde{\gamma}_x^i}$, $f^i(x)$ — безразмерная функция,

принимая значения $f(x^{i-1})=1$ и $f(x^i)=\tau^i$, τ^i коэффициент неоднородности i -го слоя вдоль оси x . Подставляя (1) в (2), для потенциала $\varphi^i(x,y)$ получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[f^i(x) \cdot \frac{\partial \varphi^i}{\partial x} \right] + \varepsilon^i f^i(x) \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

Рассмотрим теперь граничные условия, совместно с которыми необходимо интегрировать систему n уравнений (3). Во-первых, так как рассматривается случай, когда стороны MD и BE многослойного прямоугольника непроницаемы, то в каждой полосе на указанных сторонах $v_y^i = 0$ т.е.

$$\left. \frac{\partial \varphi^i}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \varphi^i}{\partial y} \right|_{y=h} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (4)$$

Во-вторых, на сторонах MB и ED могут быть заданы различные условия — либо закон распределения потенциала, либо закон распределения нормальной составляющей скорости фильтрации. Чтобы одновременно рассмотреть каждый из этих случаев, запишем граничные условия на сторонах MB и ED в виде:

$$\left(\tilde{a}_1 \varphi^i + \tilde{b}_1 \frac{\partial \varphi^i}{\partial x} \right) \Bigg|_{x=0} = F_1(y) \quad (5)$$

$$\left(\tilde{a}_2 \varphi^i + \tilde{b}_2 \frac{\partial \varphi^i}{\partial x} \right) \Bigg|_{x=\ell} = F_2(y) \quad (6)$$

Если в (5) и (6) положить $\tilde{b}_1 = \tilde{b}_2 = 0$ а $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = 1$ то получаем случай заданного на границах $x=0$ и $x=\ell$ закона распределения потенциала. Если же взять $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = 0$, $\tilde{b}_1 = -\gamma^i$, $\tilde{b}_2 = -\gamma^n \cdot \tau^n$, то получаем случай заданного на границах MB и ED закона распределения нормальной составляющей скорости фильтрации. Однако в последнем случае нужно еще учитывать то, что функции $F_1(y)$ и

$F_2(y)$ не могут быть произвольными. В самом деле, так как в силу уравнения неразрывности количество поступающей в область фильтрации жидкости за единицу времени должно быть равно количеству вытекающей из неё жидкости за то же время, то $F_1(y)$ и $F_2(y)$ должны удовлетворять требованию:

$$\int_0^h F_1(y) dy = \int_0^h F_2(y) dy.$$

В-третьих, на границах контакта полос друг с другом должны выполняться условия непрерывности давления и нормальных составляющих скорости фильтрации, т.е.

$$\text{при } x = x^{i-1}: \quad \varphi^{i-1} = \varphi^i; \quad \gamma^{i-1} \tau^{i-1} \frac{\partial \varphi^{i-1}}{\partial x} = \gamma^i \frac{\partial \varphi^i}{\partial x}; \quad (i = 2, 3, \dots, n). \quad (7)$$

Решение системы (3) методом Фурье. Решение каждого из уравнений системы (3), удовлетворяющее граничным условиям (4) будем искать методом Фурье. Осуществляя стандартные для этого метода выкладки, получим

$$\varphi^i(x, y) = X_0^i(x) + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^i(x) \cos(\lambda_k y) \quad (8)$$

где $\lambda_k = \frac{\pi k}{h}$, а $X_k^i(x)$ — решение уравнений

$$\frac{d}{dx} \left[f^i(x) \frac{dX_k^i(x)}{dx} \right] - (\lambda_k)^2 \varepsilon^i f^i(x) X_k^i(x) = 0; \quad (k = 0, 1, 2, \dots; \quad i = 1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

В дальнейшем для простоты удовлетворения граничным условиям (7), общее решения уравнений (9) удобно представить в виде суммы

$$X_k^i(x) = A_k^i g_k^i(x) + B_k^i p_k^i(x) \quad (10)$$

где A_k^i и B_k^i — пока произвольные постоянные, а $g_k^i(x)$ и $p_k^i(x)$ — частные решения (9), удовлетворяющие крайним условиям

$$g_k^i(x^{i-1}) = 1, \quad g_k^i(x^i) = 0, \quad p_k^i(x^{i-1}) = 0, \quad p_k^i(x^i) = 1 \quad (11)$$

При $k=0$ функции $g_0^i(x)$ и $p_0^i(x)$, удовлетворяющие условиям (11), из уравнения (9) находятся при помощи квадратур и имеют вид:

$$g_0^i(x) = 1 - p_0^i(x); \quad p_0^i(x) = \frac{\int_{x^{i-1}}^x \frac{dx}{f^i(x)}}{\int_{x^{i-1}}^{x^i} \frac{dx}{f^i(x)}} \quad (12)$$

При $k \neq 0$ для интегрирования уравнения (9) оказалось удобным использовать подстановку

$$X_k^i = \frac{\omega_k^i(x)}{\sqrt{f^i(x)}}. \quad (13)$$

Относительно новой вспомогательной функции $\omega_k^i(x)$ уравнение (9) примет более простой вид:

$$\frac{d^2 \omega_k^i(x)}{dx^2} - \left[(\lambda_k)^2 \varepsilon^i + \frac{1}{\sqrt{f^i(x)}} \frac{d^2}{dx^2} (\sqrt{f^i(x)}) \right] \omega_k^i(x) = 0 \quad (14)$$

Характеристика изучаемой МС-среды. Уравнение (14) для некоторых специально выбранных функций $f^i(x)$ сводится к уравнению с постоянными коэффициентами. Будем рассматривать МС-среды, представленные набором анизотропных слоев (рис. 66), закон изменения проницаемости в которых определяется тремя типами.

1. *Однородно-анизотропная среда.*

$$f^i(x) \equiv 1 \quad (\tau^i = 1) \quad (15)$$

2. *Анизотропная среда с квадратичным законом*

$$f^i(x) = \left[\frac{\sqrt{\tau^i} (x - x^{i-1}) + (x^i - x)}{x^i - x} \right] \quad (16)$$

Если $\tau^i = 1$ то из (16) будет вытекать важный частный случай однородно-анизотропной среды.

3. *Анизотропная среда с экспоненциальным законом*

$$f^i(x) = \exp \left(\frac{x - x^{i-1}}{x^i - x^{i-1}} \ln \tau^i \right) \quad (17)$$

При этом закон $f^i(x)$ для i -ой полосы не зависит от того, каким законам следуют соседние полосы. В частном случае, если для всех полос

коэффициенты неоднородности $\tau_i = 1$, то получим МС-среду, являющуюся кусочно-однородной анизотропной средой.

Функции $g_k^i(x)$, $p_k^i(x)$ и их производные. Для вычисления функций $g_0^i(x)$ и $p_0^i(x)$ следует подставить (15)-(17) в (12). Для вычисления $g_k^i(x)$ и $p_k^i(x)$ при $k \neq 0$ подставляем поочередно (15)-(17) в (14). При этом в каждом из трёх случаев получается дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Интегрируя это уравнение и учитывая формулы (10), (11), (13), получим функции $g_k^i(x)$ и $p_k^i(x)$. Перечислим эти функции для рассматриваемых законов изменения электропроводности слоя.

Для среды с *квадратичным* законом функции $g_0^i(x)$ и $p_0^i(x)$ имеют вид:

$$p_0^i(x) = \frac{\sqrt{\tau^i}(x - x^{i-1})}{d^i \sqrt{f^i(x)}}, \quad p_0^i(x) = \frac{\sqrt{\tau^i}(x - x^{i-1})}{d^i \sqrt{f^i(x)}} \quad (18)$$

где $f^i(x)$ определяются по формуле (16). Для *однородно-анизотропных* сред функции $g_0^i(x)$ и $p_0^i(x)$ находятся из (18), но при $\tau^i = 1$ и $f^i(x) = 1$.

Для среды с *экспоненциальным* законом функции $g_0^i(x)$ и $p_0^i(x)$ имеют вид:

$$g_0^i(x) = \frac{1}{\tau^i - 1} \left(\frac{\tau^i}{f^i(x)} - 1 \right); \quad p_0^i(x) = \frac{\tau^i}{\tau^i - 1} \left(1 - \frac{1}{f^i(x)} \right) \quad (19)$$

где $f^i(x)$ определяется по формуле (17).

Функции $g_k^i(x)$ и $p_k^i(x)$ при $k \neq 0$ для каждого из трех случаев записываются одинаково и имеют вид

$$g_k^i(x) = \frac{\text{sh}[\beta_k^i(x^i - x)]}{\text{sh}(\beta_k^i d^i) \sqrt{f^i(x)}}; \quad p_k^i(x) = \frac{\sqrt{\tau^i} \text{sh}[\beta_k^i(x - x^{i-1})]}{\text{sh}(\beta_k^i d^i) \sqrt{f^i(x)}} \quad (20)$$

где $f^i(x)$ определяется в зависимости от закона изменения электропроводности слоя по формулам (15), (16) или (17), а β_k^i находится по формуле:

$$\beta_k^i = \begin{cases} \lambda_k \sqrt{\varepsilon^i} & \text{в случае (15) и (16)} \\ \sqrt{(\lambda_k)^2 \varepsilon^i + (a^i)^2} & \text{где } a^i = \ln \frac{\tau^i}{2d^i} \text{ - в случае (17)} \end{cases} \quad (21)$$

В граничные условия (5)-(7) входят производные по x . Дифференцируя указанные в формулах (18)-(20) функции, найдем, что на границах i -го слоя их производные имеют следующие значения, перечисленные в таблице 6.4.

Таблица 6.4.

производная	$x=x^{i-1}$	$x=x^i$
$\frac{dg_0^i}{dx}$	$-\alpha_0^i$	$-\frac{\alpha_0^i}{\tau^i}$
$\frac{dp_0^i}{dx}$	α_0^i	$\frac{\alpha_0^i}{\tau^i}$
$\frac{dg_k^i}{dx}$	$-(r_k^i + \delta^i)$	$-\frac{\alpha_k^i}{\tau^i}$
$\frac{dp_k^i}{dx}$	α_k^i	$r_k^i - v^i$

Вспомогательные постоянные, через которые выражаются производные в таблице 6.4, перечислены в таблице 6.5.

Таблица 6.5.

Константа	Закон изменения проницаемости i -го слоя		
	По формуле (15)	По формуле (16)	По формуле (17)
α_0^i	$\frac{1}{d^i}$	$\frac{\sqrt{\tau^i}}{d^i}$	$\frac{2a^i \tau^i}{(\tau^i - 1)}$
δ^i	0	$\frac{(\tau^i - 1)}{d^i}$	a^i
v^i	0	$\frac{\delta^i}{\sqrt{\tau^i}}$	a^i

Коэффициенты α_k^i и r_k^i через β_k^i из (21) для всех трех случаев вычисляются по формулам:

$$\alpha_k^i = \frac{\sqrt{\tau^i} \beta_k^i}{\text{sh}(\beta_k^i d^i)} \quad ; \quad r_k^i = \beta_k^i \text{cth}(\beta_k^i d^i).$$

Уравнения для коэффициентов рядов Фурье (8). Рассмотрим граничные условия (5)-(7). Подставляя в (5) потенциал $\phi^i(x,y)$ из (8) и учитывая значения

функций $g_k^i(x)$, $p_k^i(x)$ и их производных на левой стороне i -го слоя (указанные в формулах (11) и таблице 6.4) получим

$$(\tilde{a}_1 - \tilde{b}_1 \alpha_0^1) A_0^1 + \tilde{b}_1 \alpha_0^1 B_0^1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left[\tilde{a}_1 - \tilde{b}_1 (r_k^1 + \delta^1) \right] A_k^1 + \tilde{b}_1 \alpha_k^1 B_k^1 \right) \cos \lambda_k y = F_1(y) \quad (22)$$

Аналогично, подставляя потенциал $\varphi^n(x, y)$ из (8) в (6) и учитывая значения функций $g_k^i(x)$, $p_k^i(x)$ и значение их производных на правой стороне n -го слоя, получим:

$$-\frac{\tilde{b}_2 \alpha_0^n}{\tau^n} A_0^n + \left(\tilde{a}_2 + \frac{\tilde{b}_2 \alpha_0^n}{\tau^n} \right) B_0^n + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -\frac{\tilde{b}_2 \alpha_k^n}{\tau^n} A_k^n + \left[\tilde{a}_2 + \tilde{b}_2 (r_k^n - v^n) \right] B_k^n \right\} \cos(\lambda_k y) = F_2(y) \quad (23)$$

Раскладывая функции $F_{1,2}(y)$ в ряды Фурье на отрезке $[0, h]$ по косинусам и сравнивая затем коэффициенты этих разложений с теми, которые присутствуют в левых частях формул (22) и (23), относительно A_k^1 , B_k^1 , A_k^n , B_k^n получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{a}_1 - \tilde{b}_1 \alpha_0^1) A_0^1 + \tilde{b}_1 \alpha_0^1 B_0^1 &= F_{10} \\ \left[\tilde{a}_1 - \tilde{b}_1 (r_k^1 + \delta^1) \right] A_k^1 + \tilde{b}_1 \alpha_k^1 B_k^1 &= F_{1k} \\ (k = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\tilde{b}_2 \alpha_0^n}{\tau^n} A_0^n + \left(\tilde{a}_2 + \frac{\tilde{b}_2 \alpha_0^n}{\tau^n} \right) B_0^n &= F_{s0} \\ -\frac{\tilde{b}_2 \alpha_k^n}{\tau^n} A_k^n + \left[\tilde{a}_2 + \tilde{b}_2 (r_k^n - v^n) \right] B_k^n &= F_{sk} \\ (k = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где

$$F_{s0} = \frac{1}{h} \int_0^h F_s(y) dy \quad F_{sk} = \frac{1}{h} \int_0^h F_s(y) \cos(\lambda_k y) dy \quad (s = 1, 2).$$

Подставляя далее потенциалы φ^{i-1} и φ^i из (8) в условия (7) (с учетом значений функции $g_k^i(x)$, $p_k^i(x)$ и их производных на правой и левой границах $(i-1)$ -го

и i -го слоев соответственно) и приравнявая коэффициенты при косинусах одинаковой кратности, получим систему уравнений, связывающих друг с другом коэффициенты $(i - 1)$ -го и i -го слоев :

$$\left. \begin{aligned} B_0^{i-1} = A_0^i \quad ; \quad B_k^{i-1} = A_k^i \quad ; \quad (i = 2, 3, \dots, n \quad k = 1, 2, 3, \dots) \\ -\gamma^{i-1} \alpha_0^{i-1} A_0^{i-1} + \gamma^{i-1} \alpha_0^{i-1} B_0^{i-1} = -\gamma^i \alpha_0^i A_0^i + \gamma^i \alpha_0^i B_0^i \\ -\gamma^{i-1} \alpha_k^{i-1} A_k^{i-1} + \gamma^{i-1} \tau^i (r_k^{i-1} - v^{i-1}) B_k^{i-1} = -\gamma^i (r_k^i - \delta^i) A_k^i + \gamma^i \alpha_k^i B_k^i \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Таким образом, для отыскания коэффициентов A_0^i, B_0^i , и A_k^i, B_k^i рядов Фурье (8), определяющих потенциалы каждого слоя МС-среды, необходимо решить систему из линейных алгебраических уравнений (24)-(26).

Решение системы линейных алгебраических уравнений (24)-(26) методом прогонки. Решение системы перечисленных уравнений осуществляется отдельно для коэффициентов A_0^i, B_0^i, A_k^i , и B_k^i (при $k=1, 2, 3, \dots$) но однотипным для обеих групп коэффициентов способом. Поэтому подробно опишем решение лишь для коэффициентов A_0^i, B_0^i . Перепишем первое уравнение системы (24) с учетом того, что $B_0^1 = A_0^2$ (26):

$$(\tilde{a}_1 - \tilde{b}_1 \alpha_0^1) A_0^1 + \tilde{b}_1 \alpha_0^1 A_0^2 = F_{10} \quad (27)$$

Далее подставляя в соответствии с первым уравнением системы (26) в её третье уравнение вместо B_0^{i-1} коэффициент A_0^i и вместо B_0^i коэффициент A_0^{i+1} для $i=2, 3, \dots, (n-1)$ получим:

$$-\gamma^{i-1} \alpha_0^{i-1} A_0^{i-1} + (\gamma^{i-1} \alpha_0^{i-1} + \gamma^i \alpha_0^i) A_0^{i+1} = 0 \quad (28)$$

При $i=n$ в третьем уравнении системы (26) можно заменить B_0^{n-1} на A_0^n , в результате чего получим:

$$-\gamma^{n-1} \alpha_0^{n-1} A_0^{n-1} + (\gamma^{n-1} \alpha_0^{n-1} + \gamma^n \alpha_0^n) A_0^n = \gamma^n \alpha_0^n B_0^n \quad (29)$$

Таким образом, относительно $(n+1)$ -го неизвестного A_0^1 и B_0^1 получилась система n уравнений (27)-(29). Последнее, $(n+1)$ -е уравнение, связывающее друг с другом A_0^1 и B_0^1 , приводится в системе (25). Получившаяся система $(n+1)$ -го уравнения относительно $(n+1)$ -го неизвестного будет иметь трехдиагональный вид.

В результате аналогичных преобразований относительно коэффициентов A_k^i и B_k^i также получается трехдиагональная система линейных алгебраических уравнений. Решение таких систем линейных алгебраических уравнений осуществляется известным способом — методом прогонки. Выполняя в обоих случаях известные для метода прогонки операции, приходим к следующему алгоритму для вычисления коэффициентов ряда Фурье (8).

1. Вычисляем коэффициенты m_0^2 и c_0^2 (при $k=0$) и m_k^2 и c_k^2 (при $k \neq 0$):

$$m_0^2 = \frac{\tilde{b}_1 \alpha_0^1}{(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{b}_1 \alpha_0^1)} \quad m_k^2 = \frac{\tilde{b}_1 \alpha_k^1}{(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{b}_1 (r_k^1 + \delta^1))}$$

$$c_0^2 = \frac{F_{10}}{(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{b}_1 \alpha_0^1)} \quad c_k^2 = \frac{F_{1k}}{(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{b}_1 (r_k^1 + \delta^1))}$$

2. Вычисляем прогоночные коэффициенты m_0^i , c_0^i , и m_k^i , c_k^i по рекуррентным формулам:

$$m_0^{i+1} = -\frac{\gamma^i \alpha_0^i}{[\gamma^{i-1} \alpha_0^{i-1} (m_0^i + 1) + \gamma^i \alpha_0^i]} ; c_0^{i+1} = -\frac{\gamma^{i-1} \alpha_0^{i-1} c_0^i m_0^{i+1}}{\gamma^i \alpha_0^i}$$

$$m_0^{i+1} = -\frac{\gamma^i \alpha_k^i}{[\gamma^{i-1} \alpha_k^{i-1} m_k^i + \gamma^{i-1} \tau^{i-1} (r_k^{i-1} - v^{i-1}) + \gamma^i (r_k^i + \delta^i)]} ; c_k^{i+1} = -\frac{\gamma^{i-1} \alpha_k^{i-1} c_k^i m_k^{i+1}}{\gamma^i \alpha_k^i} ; (i = 2, 3, \dots, n)$$

3. Вычисляем коэффициенты B_0^n и B_k^n

$$B_0^n = \frac{F_{20} + \frac{\tilde{b}_2 \alpha_0^n c_0^{n+1}}{\tau_n}}{\tilde{a}_2 + \frac{\tilde{b}_2 \alpha_0^n (m_0^{n+1} + 1)}{\tau_n}} ; B_k^n = \frac{F_{2k} + \frac{\tilde{b}_2 \alpha_k^n c_k^{n+1}}{\tau_n}}{\tilde{a}_2 + \tilde{b}_2 \cdot \left(\frac{\alpha_k^n m_k^{n+1}}{\tau_n} + r_k^n - v^n \right)}$$

4. Вычисляем коэффициенты A_k^n :

$$A_k^n = -m_k^{n+1} B_k^n + c_k^{n+1} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

5. Вычисляем коэффициенты A_k^{i-1} :

$$A_k^{i-1} = -m_k^i A_k^i + c_k^i \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

При каждом зафиксированном номере k индекс i пробегает значения n , $n-1$, $n-2$, ..., 3 , 2 .

6. Вычисляем коэффициенты B_k^i по формулам:

$$B_k^1 = A_k^2, \quad B_k^2 = A_k^3, \quad \dots, \quad B_k^{i-1} = A_k^i, \quad \dots, \quad B_k^{n-1} = A_k^n \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Тестовые примеры расчётов поля в МС-средах по разработанной теории автором представлены в [162].

Основные результаты главы 6. 1). Разработан математический аппарат расчёта линейной фильтрации в кусочно-неоднородных многослойных средах в областях, топологически эквивалентных прямоугольнику. 2). С помощью развитой теории на конкретных примерах выполнены дополнительные исследования точности расчётов в МС-средах методом интегрального однородно-анизотропного эквивалентирования. 3). Предложен общий метод, названный методом многослойной аппроксимации неоднородной изотропной среды, решения краевых задач для эллиптического уравнения $\frac{\partial}{\partial x} \left(f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + f(x) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ с произвольным положительным кусочно-непрерывным коэффициентом $f(x)$ в прямоугольной области и с широким набором граничных условий на её сторонах (перечислявшихся выше в этой главе). 4). На примере разработанной теории указаны общие подходы к расчётам полей в многослойных средах в других областях - полосе, полуполосе, круге и н. др., а также в топологических аналогах этих областей в изотермических системах координат.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации на основании выполненных исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как новое крупное достижение в развитии теории двумерной фильтрации 1) в искривлённых слоях конечной переменной толщины и 2) в многослойных и анизотропных средах.

Основные результаты работы, полученные лично автором

1. Разработаны алгоритмы для расчёта тензоров проницаемостей для тех анизотропных сред, у которых главные направления анизотропии известны априори (к таким относятся распространённые в естественных условиях трансверсально-изотропные и ортотропные среды, некоторые периодические, трещиноватые и слоистые среды) при линейном и нелинейном режимах фильтрации.
2. Предложена математическая модель двумерных фильтрационных течений несжимаемой жидкости в неоднородных анизотропных искривлённых пластах конечной переменной и постоянной толщины.
3. Проведены исследования точности фильтрационных расчётов в слоистых средах методом однородно-анизотропного эквивалентирования.
4. Разработаны математические модели учёта индивидуальных фильтрационных свойств призабойных зон скважин при исследовании течений к одиночным и групповым скважинам.
5. Предложена качественная и точная количественная математическая модель работы скважины с гравийным фильтром.
6. Предложены математические модели работы основных конструкций промышленных фильтров нефте- и вододобывающих скважин.
7. Предложены качественные математические модели работы скважин при вертикальном и горизонтальном гидроразрыве пласта.
8. Предложена теория расчётов двумерных фильтрационных течений в многослойных и неоднородных средах в области, ограниченной дугами координатных линий изотермических систем координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. АМИРАСЛАНОВ И.А., ЧЕРЕПАНОВ Г.П. Фильтрация жидкости в криволинейных слоях переменной толщины // ПММ. – 1981. – вып.6. – С. 1142-1146.
2. АРАВИН В.И. К вопросу о фильтрации в анизотропно-водопроницаемых грунтах // Тр. Ленинградского индустриального ин-та. – 1937. – вып.2. – № 9. – С. 3-12.
3. АРАВИН В.И. Расчет плоской фильтрации в грунтах с криволинейной анизотропией // Изв. ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. – 1974. Т.104. – С.3-9.
4. АРАВИН В.И. Фильтрация в анизотропно-водопроницаемом грунте // Тр. Ленинградского индустриального ин-та. – 1940. – вып.1. – № 1. – С.3-14.
5. АРАВИН В.И., НОСОВА О.И. Натурные исследования фильтрации. – Л.: Энергия, 1969. – 256 с.
6. АРАВИН В.И., НУМЕРОВ С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. – М.: Гостехиздат, 1953. – 616 с.
7. АРЬЕ А.Г. Физические основы фильтрации подземных вод. – М.: Недра, 1984. – 101 с.
8. БАРЕНБЛАТТ Г.И. и др. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик. – М.: Недра, 1984. – 208 с.
9. БАРИНОВА М.Ф. К вопросу о построении фильтрационных течений в прерывно – однородных пластах // Уч. зап. МОПИ им. Н.К. Крупской. – 1971. – Т.299. – вып.1. – С.38-44.
10. БАСАРЬГИН Ю.М. и др. Заканчивание скважин / Ю.М. Басарьгин, А.И. Булатов, Ю.М. Проселков. – М.: Недра, 2000. – 670 с.
11. БАСНИЕВ К.С., БЕДРИКОВЕЦКИЙ П.Г., ДЕДИНЕЦ Е.Н. Определение эффективной проницаемости трещиновато-пористой среды // ИФЖ. – 1988. – Т.55. – № 6. – С.940-948.
12. БАСНИЕВ К.С., ДМИТРИЕВ Н.М. К определению проницаемости и фильтрационного сопротивления для анизотропных пористых сред // Изв. вузов. Нефть и газ. – 1985. – №2. – С. 26, 43, 44.

13. БАСНИЕВ К.С., ДМИТРИЕВ Н.М. Обобщенный закон Дарси для анизотропных пористых сред // Изв. вузов. Нефть и газ. – 1986. – №5. – С.54-59.
14. БАСНИЕВ К.С., ДМИТРИЕВ Н.М. Определяющие соотношения для анизотропных пористых сред, проявляющих асимметрию фильтрационных свойств // Изв. вузов. Нефть и газ. – 1987. – №10. – С. 56-61.
15. БАСНИЕВ К.С., ДМИТРИЕВ Н.М. Соотношения между значениями направленной проницаемости для анизотропных коллекторов // Изв. вузов. Нефть и газ. – 1988. – №8. – С. 70-94.
16. БАСНИЕВ К.С., ДМИТРИЕВ Н.М., РОЗЕНБЕРГ Г.Д. Нефтегазовая гидромеханика. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 480 с.
17. БАХВАЛОВ Н.С., ПАНАСЕНКО Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
18. БАХВАЛОВ Ю.А., ТОЛПАЕВ В.А., ШАХНАБАТОВА Л.Б. Качественное исследование электрического поля в межобмоточных промежутках высоковольтных трансформаторов // Изв. вузов СССР. Электромеханика. – 1987. – № 9. – С.16-26.
19. БОРИСЕНКО А.И., ТАРАПОВ И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. – М.: «Высшая школа», 1966. – 251 с.
20. БОЯРСКИЙ Б.В. Гомеоморфные решения систем Бельтрами // ДАН СССР. – 1955. – Т.102. – №4. С.661-664.
21. БРАГИНСКАЯ В.А. Некоторые задачи фильтрации в анизотропном грунте // ПММ. – 1942. – Т.6. – вып. 2-3.
22. БУЙКИС А.А. Моделирование процессов фильтрации в слоистых средах методом консервативного осреднения : Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. – Рига, 1987. – 358 с.
23. БЫСТРОВ К.Н. Построение течений с точечными особенностями в искривленных слоях переменной толщины // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1968. – № 1. – С.169-175.

24. БЭР Я. и др. Физико-математические основы фильтрации воды / Я.Бэр, Д.Заславски, С.Ирмей. – М.: Мир, 1971. – 452 с.
25. ВАНЬКО В.И., ЕРМОШИНА О.В., КУВЫРКИН Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. – М.: изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999. – 487 с.
26. ВАСИЛЬЕВ В.А., ШУЛЬГИН Д.Ф. О работе фильтра буровой скважины // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1961. – №1.
27. ВАСИЛЬЕВ Ю.Н., БАШКИРОВ А.И. Приближенное решение задачи о притоке к скважине с горизонтальной трещиной // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1961. – № 5. – С.183-185.
28. ВЕКУА И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз. – 1959. – 628 с.
29. ВЕРЕМЧУК И.А., ПРУСОВ И.А. Комплексный потенциал плоской установившейся фильтрации несжимаемой жидкости в пористой анизотропной среде // Вестник Белорусского госуниверситета. Сер.1. «Математика. Физика. Механика». – Минск, 1975. – №3. – С.78-79.
30. ГАВРИЛКО В.М., АЛЕКСЕЕВ В.С. Фильтры буровых скважин. – М.: Недра, 1985. – 334 с.
31. ГАСУМОВ Р.А., МАШКОВ В.А., СИНГУРОВ А.А., КОНДРЕНКО О.С., МИНЛИКАЕВ В.З., ДУБРОВСКИЙ Н.Д. Опытные промышленные испытания технологии и технических средств по удалению глинисто-песчаных пробок в условиях АНЦД // «Проблемы эксплуатации и капитального ремонта скважин на месторождениях и ПХГ». Сб. науч. тр. ОАО «СевКавНИПИгаз». – Ставрополь, 2003. – вып.39. – С. 162-171.
32. ГЛАДЫШЕВ Ю.А. О методе перехода при решении задач фильтрации в пластах с переменными по простиранию мощностью и проницаемостью. // Гидромеханика. – М.: МОПИ им. Н.К.Крупской, 1974. – вып. 3. – С.217-221.
33. ГЛАДЫШЕВ Ю.А. Об одном обобщении теоремы об окружности и ее приложении в теории фильтрации // Избранные задачи гидродинамики. МОИП. – М.: Наука, 1977. – С.40-43.

34. ГЛАДЫШЕВ Ю.А. Построение потенциальных стационарных течений идеальной жидкости в искривлённом слое переменной толщины методом перехода // Тр. МОПИ им. Н.К. Крупской. – 1964. – Т. 142. – вып. 5. – С.39-48.
35. ГОЛУБЕВ Г.В. О некоторых точных решениях задачи об определении поля давлений в неоднородном нефтяном пласте // Изв. вузов. Нефть и газ. – 1966. – № 2. – С. 86-87.
36. ГОЛУБЕВ Г.В. Об одном методе определения поля давлений в неоднородной пористой среде // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1967. – № 3. – С.180-182.
37. ГОЛУБЕВ Г.В. Определение поля давлений в кусочно – однородных пластах различной формы // Тр. ун-та / Казанский ун-т. – 1958. – Т.118. – Кн.2. – С.166-192.
38. ГОЛУБЕВ Г.В., ТУМАШЕВ Г.Г. Фильтрация несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1972. – 195 с.
39. ГОЛУБЕВА О.В. Двумерные динамические процессы в анизотропных средах // ПММ. – 1980. – Т. 44. – вып.1. – С. 166-171.
40. ГОЛУБЕВА О.В. Задачи фильтрации в анизотропных средах. // Сб. науч. тр. «Исследования по теории функций комплексного переменного с приложениями к механике сплошных сред». – Киев: Наукова думка, 1986. – С.57-63.
41. ГОЛУБЕВА О.В. Курс механики сплошных сред. – М.: Высшая школа, 1972. – 364 с.
42. ГОЛУБЕВА О.В. Обобщение теоремы об окружности на фильтрационные течения // Изв.АН СССР. МЖГ. – 1966. – № 1. – С.113-116.
43. ГОЛУБЕВА О.В. Уравнения двумерных движений идеальной жидкости по криволинейной поверхности и их применение в теории фильтрации // ПММ. – 1950. – т. 14. – вып. 3. – С. 287-294.

44. ГОЛУБЕВА О.В., САПИЯНОВ Т.Н. Математические модели фильтрации при учёте неоднородности среды. – АН Киргизской ССР. – Фрунзе: «Илим», 1990. – 236 с.
45. ГОЛУБЕВА О.В., ТОЛПАЕВ В.А., КУТУЗОВ В.Г., СОЛОМКО Ю.Л. О фильтрации в однородно – анизотропных средах // Гидромеханика. М.: МОПИ им. Н.К.Крупской. – 1975. – вып.4. – С.163-171.
46. ГОЛУБЕВА О.В., ШПИЛЕВОЙ А.Я. О плоской фильтрации в средах с прерывно изменяющейся проницаемостью вдоль кривых второго порядка // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1967. – № 2. – С.174-179.
47. ГОРБУНОВ А.Т. Некоторые задачи фильтрации в анизотропных средах // НТС ВНИИ. – 1962. – вып. 16.
48. ДАНИЛОВ В.Л. Дебит нефтяных скважин при произвольной форме контура питания // Изв. КФАН СССР. Серия физ.-мат. и техн. наук. – 1954. – вып. 5. – С.52-69.
49. ДМИТРИЕВ Н.М. Модели фильтрации в анизотропных средах. / Дисс. ... д.т.н. ГАНГ им. И.М.Губкина. – М., 1997. – 316 с.
50. ДМИТРИЕВ Н.М. О нелинейных определяющих уравнениях для анизотропных пористых сред. // Вопросы подземной гидромеханики и оптимизации нефтедобычи / Тр. Казан. физ.-техн. ин-та. Казан. фил. АН СССР. – Казань, 1985. – С. 20-24.
51. ДМИТРИЕВ Н.М., МАКСИМОВ В.М. Нелинейные законы фильтрации для анизотропных пористых сред // ПММ. – 2001. – Т.65. – вып.6. – С.963-970.
52. ДОМАНСКИЙ А.В. Гидравлический разрыв в неоднородном пласте // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1988. – № 5. – С.109-114.
53. ДОНЦОВ К.М., ТОЛПАЕВ В.А., ЖЕРНОВОЙ А.Д. Развитие математической модели фильтрации в анизотропных средах // Тез. докл. XXIV научно-технической конференции. СтПИ. – Ставрополь, 1994. –Т.2. – С.86.

54. ЕНТОВ В.М., МУРЗЕНКО В.В. Стационарная фильтрация однородной жидкости в элементе разработки нефтяного пласта с трещиной гидроразрыва // Изв. РАН. МЖГ. – 1994. – № 1. – С.104-112.
55. ЖЕРНОВОЙ А.Д., ДОНЦОВ К.М., ТОЛПАЕВ В.А. Математическая модель вскрытия радиально-анизотропного пласта щелевым способом // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. – 1996. – № 1. – С.36-41.
56. ЖЕРНОВОЙ А.Д., ДОНЦОВ К.М., ТОЛПАЕВ В.А. Учет влияния течения жидкости по щелям // Тез. докл. XXV научно-технической конференции. Ставропольский государственный технический университет. – Ставрополь, 1995. – Т. III. – С.51.
57. ЗАЗОВСКИЙ А.Ф., ТОДУА Г.Т. О стационарном притоке жидкости к скважине с вертикальной трещиной гидроразрыва большой протяженности // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1990. – № 4. – С.107-116.
58. ЗАЙЦЕВ А.А., ФОМЧЕНКОВ В.В., ШПИЛЕВОЙ А.Я. Об определении течения поступательного потока через систему круговых или сферических слоёв различной проницаемости // Изв. РАН. МЖГ. – 2002. № 6. – С.162-165.
59. ЗАЙЦЕВ В.Ф., ПОЛЯНИН С.Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. – М.: Физматлит, 2003. – 416 с.
60. ИЛЬИН В.А., КИМ Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М.: Изд-во МГУ, 2002. – 319 с.
61. ИЛЬИН В.А., ПОЗНЯК Э.Г. Основы математического анализа. – М.: Наука-Физматлит, 2000. – Ч.1,2. – 616+447 с.
62. ИОССЕЛЬ Ю.Я., КОЧАНОВ Э.С., СТРУНСКИЙ М.Г. Расчет электрической емкости. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 288 с.
63. КАДЕТ В.В., СЕЛЯКОВ В.И. Фильтрация флюида в среде, содержащей эллиптическую трещину гидроразрыва // Изв. вузов. Нефть и газ. – 1988. – № 5. – С.54-60.

64. КАНЕВСКАЯ Р.Д. О притоке жидкости к скважине с вертикальной трещиной гидроразрыва в кусочно-однородном анизотропном пласте // Изв. РАН. МЖГ. – 1999. – № 2. – С.64-71.
65. КАНЕВСКАЯ Р.Д., КАЦ Р.М. Аналитические решения задач о притоке жидкости к скважине с вертикальной трещиной гидроразрыва и их использование в численных моделях фильтрации // Изв. РАН. МЖГ. – 1996. – № 6. – С.59-80.
66. КАЧАНОВ М.Л. Об анизотропии фильтрационных свойств трещиноватой среды // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1975. – № 4. – С.171-173.
67. КОЗЛОВ В.С. К вопросу о расчете движения воды под гидротехническими сооружениями в анизотропно-водопроницаемых грунтах // Изв. АН СССР, ОТН. – 1940. – №3. – С. 59-79.
68. КОЛЛИНЗ Р. Течение жидкостей через пористые материалы. – М.: Мир, 1964, – 350 с.
69. КОПАЕВ А.В., РАДЫГИН В.М. Фильтрационные теоремы о прямых // Изв. РАН. МЖГ. – 1992. – №5. – С.86-90.
70. КОПАЕВ А.В., РАДЫГИН В.М. Фильтрационные теоремы о сферах // Изв. РАН. МЖГ. – 1991. – № 2. – С.105-109.
71. КОПАЕВ А.В., РАДЫГИН В.М. Фильтрационные теоремы об окружностях // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1990. – № 1. – С.179-183.
72. КОРЕНЕВ Г.В. Тензорное исчисление. – М.: МФТИ, 2000. – 239 с.
73. КОСТЕРИН А.В. Об уравнениях нелинейной анизотропной фильтрации // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1980. – №5. – С.158-160.
74. КОСТИЦЫНА Л.И. Динамические процессы в средах с тремя и более параллельными границами раздела зон однородности // Гидромеханика. – М.: МОПИ им.Н.К.Крупской, 1976. – вып.5. – С.80-90.
75. КОСТИЦЫНА Л.И. К вопросу о движении фильтрационного потока в кусочно – однородной пористой среде // Тр. МОПИ им. Н.К.Крупской. – 1966. – Т.164. – вып.6. – С.67-82.

76. КОЧИН Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука, 1965. – 426 с.
77. КОЧИНА И.Н., МИХАЙЛОВ Н.Н. Фильтрация через глинистые корки // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1976. – №6. – С.70-75.
78. ЛАВРЕНТЬЕВ М.А., ШАБАТ Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
79. ЛЕЙБЕНЗОН Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. – М.-Л., 1947. – 244 с.
80. ЛЕЙБЕНЗОН Л.С. Нефтепромысловая механика. Ч.2. Подземная гидравлика воды, нефти и газа. – М.-Грозный-Л.-Новосиб.: Горногеолнефтеиздат, 1934. – 352 с.
81. ЛЕОНОВ Е.Г., ИСАЕВ В.И. Гидроаэромеханика в бурении. – М.: Недра, 1987.
82. ЛОВЕЦКИЙ Е.Е., СЕЛЯКОВ В.И. Перколяционные модели фильтрационных свойств среды // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1984. – № 3. – С.81-86.
83. ЛУКОМСКАЯ М.А. Решение некоторых задач о притоке жидкости к скважинам // ПММ. – 1947. – Т. XI. – вып. 6.
84. МАКОВЕЙ Н. Гидравлика бурения. – М.: Недра, 1986. – 536 с.
85. МАСКЕТ М. Течение однородных жидкостей в пористых средах. – М.-Л.: ГНТИ, 1949. – 628 с.
86. МИЛН-ТОМСОН Л.Н. Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир, 1964. – 655 с.
87. МИРЗАДЖАНЗАДЕ А.Х., АМЕТОВ И.М., БАСНИЕВ К.С. Подземная гидрогазодинамика. – М.: ГАНГ, 1992. – 88 с.
88. МИХАЙЛОВ Г.К. К задаче о фильтрации в анизотропных земляных плотинах трапецеидального профиля на горизонтальном водоупоре // ДАН СССР. – 1951. – Т. 80. – №4. – С. 553-556.

89. МИХАЙЛОВ Г.К. Применение модели предельно анизотропных грунтов для оценки решений некоторых краевых задач о движении потока грунтовых вод по водоупору // Инж. сб. АН СССР. – 1953. – Т. XV. – С. 159-168.
90. МИХАЙЛОВ Г.К. Упрощение способа расчета фильтрации в однородно-анизотропном грунте // Инж. сб. АН СССР – 1954. – Т. XIX. – С. 159-160.
91. МИХАЙЛОВ Г.К., НИКОЛАЕВСКИЙ В.Н. Движение жидкостей и газов в пористых средах // Механика в СССР за 50 лет. – М.: Наука, 1970. – Т.2. – С. 585-648.
92. МИХАЙЛОВ Н.Н. Изменение физических свойств горных пород в околоскважинных зонах. – М.: Недра, 1987. – 152 с.
93. МОЛОКОВИЧ Ю.М. К вопросу нелинейной фильтрации в анизотропных (ортотропных) по проницаемости средах // Гидродинамика и разработка нефтяных месторождений. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1977. – С. 124-128.
94. НАХУШЕВ А.М., СЕРБИНА Л.И., ТОЛПАЕВ В.А. Расчет расхода жидкости на фильтрацию под плотиной в средах с конгруэнтным типом анизотропии // Вестник Кабардино-Балкарского гос. ун-та. Серия: физико-математические науки. – Нальчик, 1996. – вып. 1. – С.96-103.
95. НИКОЛАЕВСКИЙ В.Н. О точном и приближённом решениях одной плоской задачи фильтрации при смешанных граничных условиях // Изв. АН СССР. ОТН. – 1957. – №10. – С. 102-105.
96. НУМЕРОВ С.Н. К вопросу о нелинейной фильтрации газа в анизотропной среде // Изв. ВНИИГ им.Б.Е.Веденеева. – Л., 1974. – Т.104. – С.292-293.
97. ОСТРЕЙКО В.Н. Расчет электромагнитных полей в многослойных средах. – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та. – 1981. – 152 с.
98. ПЕТРОВА В.А. К вопросу об оценке точности метода Хоу / Докл. XXVI научной конференции «Вопросы прикладной математики и геометрического моделирования» ЛИСИ. – Л., 1968. – С. 16-21.
99. ПЕТРОВА В.А. Решение плоской электростатической задачи для двух контуров // Изв. вузов СССР. Математика. – 1969. – №8. – С.52-63.

100. ПИВЕНЬ В.Ф. К теории осесимметричных обобщенных аналитических функций в динамических процессах // Докл. АН СССР. – 1990. – Т.313. – №6. – С.1424-1426.
101. ПИВЕНЬ В.Ф. О теории двумерных процессов в слоях переменной проводимости, характеризуемых степенью гармонической функции // ДАН. – 1995. – Т.344. – №5. – С. 327-629.
102. ПИЛАТОВСКИЙ В.П. Основы гидромеханики тонкого пласта. – М.: Недра, 1966. – 317 с.
103. ПИРВЕРДЯН А.М. Нефтяная подземная гидравлика. – Баку: Азнефтеиздат, 1956. – 332 с.
104. ПОЛОЖИЙ Г.Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. – Киев: Изд-во Киевск. ун-та, 1965. – 442 с.
105. ПОЛОЖИЙ Г.Н. Теория и применение p -аналитических и (p,q) -аналитических функций. – Киев: Наукова думка, 1973. – 424 с.
106. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА П.Я. О фильтрации в анизотропном грунте // ПММ. – 1940. – Т.4. – вып.2. – С.101-104.
107. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА П.Я. Об источниках и стоках на поверхности // ПММ. – 1950. – Т. 14. – вып. 1.
108. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Недра, 1977. – 664 с.
109. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА П.Я., ПРЯЖИНСКАЯ В.Г., ЭМИХ В.Н. Математические методы в вопросах орошения. – М.: Наука, 1969. – 414 с.
110. ПРУСОВ И.А. Двумерные краевые задачи фильтрации. – Минск: Изд. университетское, 1987. – 182 с.
111. ПРУСОВ И.А., ВЕРЕМЧУК И.А. Вывод основных уравнений фильтрации жидкости в анизотропной среде // Изв. АН БССР. Серия физ.-мат. наук. – Минск, 1974. – №1. – С.109-112.
112. ПЫХАЧЕВ Г.Б., ИСАЕВ Р.Г. Подземная гидравлика. – М.: Недра, 1973. – 360 с.

113. РАБИНОВИЧ Н.Р. Инженерные задачи механики сплошной среды в бурении. – М.: Недра, 1989. – 270 с.
114. РАДЫГИН В.М. К вопросу о работе круговой батареи скважин в неоднородном искривленном пласте // Гидромеханика. М.: МОПИ им.Н.К.Крупской, 1973. – вып. 2. – С.62-67.
115. РАДЫГИН В.М. О фильтрации к цепочке совершенных скважин в неоднородном пласте // Гидромеханика. М.: МОПИ им.Н.К.Крупской, 1973. – вып. 2. – С.57-61.
116. РАДЫГИН В.М. Фильтрационная теорема о двух окружностях // Задачи гидродинамики при усложненных моделях среды. МОИП. – М.: Наука, 1985. – С.18-23.
117. РАДЫГИН В.М., ГОЛУБЕВА О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. – М.: Высшая школа, 1983. – 160 с.
118. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР / Под ред. П.Я.Полубариновой-Кочиной и др. – М.: Наука, 1969. – 545 с.
119. РИЗЕНКАМПФ Б.К. Гидравлика грунтовых вод. Ч. 1. Уч. зап. Саратовск. ун-та, сер. физ. - матем. – 1938. – Т. 14. – вып. 1. – С. 89-113.
120. РОММ Е.С. Структурные модели порового пространства горных пород. – Л.: Недра, 1985. – 240 с.
121. РОММ Е.С. Фильтрационные свойства трещиноватых горных пород. – М.: Недра, 1966. – 238 с.
122. РОММ Е.С., ПОЗИНЕНКО Б.В. О проницаемости анизотропных трещиноватых горных пород // Инженерный журнал. – 1963. – Т. 3. – №2.
123. СВЕШНИКОВ А.Г., ТИХОНОВ А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1970. – 304 с.
124. СЕДОВ Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. – М.: Наука, 1983. – 528 с.
125. СЕДОВ Л.И., ЛОХИН В.В. Описание с помощью тензоров точечных групп симметрии // ДАН СССР. – 1963. – Т. 149. – №2. – С. 796-797.
126. СЕРБИНА Л.И., ТОЛПАЕВ В.А. О построении комплексных потенциалов плоскопараллельных фильтрационных течений в средах с криволинейной

- анизотропией // Северо-Кавказский научный центр высшей школы. Ставропольский гос. технич. ун-т. – Ставрополь, 1995. – С.14-15.
127. СЕРБИНА Л.И., ТОЛПАЕВ В.А. О построении общих решений уравнений и систем уравнений эллиптического типа методом формул перехода // Тр. ун-та / Ставропольский гос. технич. ун-т. – Ставрополь, 1996. – С.120-132.
128. СИРОТИН Ю.И. Построение тензоров заданной симметрии // Кристаллография. – 1961. – Т.6. – вып.3. – С.331-340.
129. СИРОТИН Ю.И., ШАСКОЛЬСКАЯ М.П. Основы кристаллофизики. – М.: Наука, 1979. – 640 с.
130. СОЛОМКО Ю.Л. О моделировании работы скважины в анизотропном грунте // МОИП. Избранные задачи гидродинамики. – М.: Наука. – 1977. – С.92-96.
131. Справочник по специальным функциям. / Под ред. Абрамовица М. и Стигана И. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
132. СТАРШИНОВА Л.В. Об определении функции давления в макронеоднородном пласте методом коллокации // Тр. по теории фильтрации и гидродинамике нефтяного пласта. Казан.гос.ун-т. – Казань, 1961. – Т.121. – С.103-110.
133. СТАРШИНОВА Л.В. Применение метода конечных разностей для определения давления в неоднородных пластах // Изв. КФАН СССР. Серия физ.-мат. и техн. наук. – 1959. – №13. – С.27-36.
134. ТИМАШЕВ Г.В., АТАКУЛОВ Т., КАЛНИН О.Ж., ГОРОШКО А.А. Скважинные фильтры (по патентным материалам зарубежных стран) // ВНИИЭГАЗПРОМ. НТО. Серия “Разработка и эксплуатация газовых и газоконденсатных месторождений”. – М., 1977. – вып. 13. – С.45.
135. ТИХОНОВ А.Н., САМАРСКИЙ А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
136. ТОЛПАЕВ В.А. Математическое моделирование нелинейной фильтрации в анизотропных средах обобщённым методом С.Н. Нумерова // Изв.

- вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. Приложение. – 2003. – № 12. – С.3-11.
137. ТОЛПАЕВ В.А. Влияние некоторых типов криволинейной анизотропии грунтов на расход жидкости под плоским флотбетом // МОИП. Избранные задачи гидродинамики. – М.: Наука, 1977. – С.101-105.
138. ТОЛПАЕВ В.А. Влияние неопределенности в критериях существования линейного режима фильтрации на погрешность в расчетах дебитов скважин // Тр. ун-та. – Серия «Нефть и газ». – Ставрополь, СевКавГТУ, 2000. – вып.3. – С.137-143.
139. ТОЛПАЕВ В.А. Влияние скачка проницаемости призабойной зоны на дебит скважины // Сб. научн. тр. 3-го Всероссийского симпозиума “Математическое моделирование и компьютерные технологии”. – Кисловодск, 1999. – Т.3. – С.32-33.
140. ТОЛПАЕВ В.А. Двусторонние оценки дебитов скважин в анизотропно-неоднородных средах // Мат. XXIX научно-технической конференции СтГТУ. – Ставрополь, 1999. – Т. 1. – С.3-4.
141. ТОЛПАЕВ В.А. Исследование плоскопараллельного течения жидкости от источника в упруго – деформируемых анизотропных средах // Сб. научн. тр. МОИП «Новые вопросы гидродинамики». – М.: Наука, 1974. – С.78-82.
142. ТОЛПАЕВ В.А. К вопросу о построении плоскопараллельных течений жидкости в упруго-деформируемых анизотропных грунтах // Гидромеханика. М.: МОПИ им. Н.К. Крупской, 1975. – вып. 4. – С.17-26.
143. ТОЛПАЕВ В.А. К теории двумерной стационарной фильтрации жидкости в анизотропных средах / Автореферат дисс. ... к.ф.-м.н. ИПМ АН СССР. – М., 1976. – 19 с.
144. ТОЛПАЕВ В.А. Квазиконформная ковариантность уравнений плоскопараллельной фильтрации в анизотропно-неоднородных средах // Гидромеханика. М.: МОПИ им. Н.К. Крупской, 1976. – вып. 5. – С.30-32.

145. ТОЛПАЕВ В.А. Математическая модель горизонтального гидроразрыва пласта // Сб. научн. тр. СевКавГТУ. Серия "Естественнонаучная". – Ставрополь, 2001. – вып.4. – С.83-88.
146. ТОЛПАЕВ В.А. Математические модели для фильтрационного расчета гидротехнических сооружений // Изв. ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. – Санкт-Петербург, 2001. – Т.239. – С. 98-109.
147. ТОЛПАЕВ В.А. Математические модели нелинейной фильтрации в анизотропных средах // Сб. тр. III региональной научной конференции «Математическое моделирование и информационные технологии в технических, естественных и гуманитарных науках» СевКавГТУ. – Ставрополь, 2003. – С. 19-23.
148. ТОЛПАЕВ В.А. Математические модели нелинейной фильтрации в грунтах с обобщенной анизотропией // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. – 2000. – № 2. – С.33-36.
149. ТОЛПАЕВ В.А. Метод аппроксимации эпюр скорости фильтрации в расчетах гидротехнических сооружений // Сб. научн. тр. СевКавГТУ. Серия «Естественнонаучная». – Ставрополь, 2000. – вып.3. – С.54-64.
150. ТОЛПАЕВ В.А. О построении точных решений задач напорной фильтрации в некоторой серии анизотропных сред // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. – 1979. – №4. – С. 33-36.
151. ТОЛПАЕВ В.А. О расчетах потенциальных полей в многослойных средах с циклически изменяющимися характеристиками // Мат. 6 Международной конференции "Циклы природы и общества". Часть 2. – Ставрополь, 1998. – С.11-19.
152. ТОЛПАЕВ В.А. О точности аппроксимации граничных условий передаточными функциями 1-го рода // Вестник Ставропольского ун-та. – Ставрополь, 1998. – вып. 3-4. – С.153-158.
153. ТОЛПАЕВ В.А. Обобщение уравнения Буссинеска для анизотропно-неоднородных сред // Сб. научн. тр. СевКавГТУ. Серия "Физико-химическая". – Ставрополь, 1999. – вып.3. – С.135-138.

154. ТОЛПАЕВ В.А. Обобщение фильтрационных теорем об окружности и прямой для анизотропных сред // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. –1984. – №3. – С.32-35.
155. ТОЛПАЕВ В.А. Построение плоско-параллельных фильтрационных течений несжимаемой жидкости методом перехода // Гидромеханика. – М.: МОПИ им. Н.К.Крупской, 1974. – вып. 3. – С.27-37.
156. ТОЛПАЕВ В.А. Применение вариационных методов для расчета двусторонних оценок дебитов скважин // Мат. XLIV научно-методической конференции Ставропольского государственного университета. – Ставрополь, 1999. – С.45-52.
157. ТОЛПАЕВ В.А. Применение p -аналитических функций для описания плоско – параллельной фильтрации в анизотропно – неоднородных грунтах // Гидромеханика. – М.: МОПИ им. Н.К.Крупской, 1974. – вып.3. – С.18-26.
158. ТОЛПАЕВ В.А. Расчет двусторонних оценок дебитов скважин при нелинейных режимах фильтрации // Мат. Первой Международной Конференции “Циклы”. Часть 2. – Ставрополь, 1999. – С.89-95.
159. ТОЛПАЕВ В.А. Расчет дебита центральной скважины, работающей в круговом пласте с прямолинейной анизотропией // Теория гидродинамических моделей технических задач. Сб. научн. тр. – Свердловск, 1988. – С.41-46.
160. ТОЛПАЕВ В.А. Расчет дебитов скважин при сосуществовании линейного и нелинейного режимов фильтрации // Сб. научн. тр. IV Всероссийского симпозиума “Математическое моделирование и компьютерные технологии” – Кисловодск, 2000. – Т.2. – Ч. 2. – С.62-64.
161. ТОЛПАЕВ В.А. Расчет напорных фильтрационных течений методом виртуальных трубок тока // Сб. мат. Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование в научных исследованиях». СГУ. – Ставрополь, 27-30 сентября 2000. – Ч.1. – С.160-164.
162. ТОЛПАЕВ В.А. Расчет статических полей в прямоугольной многослойной области // Изв. вузов СССР. Электромеханика. – 1990. – № 7. – С.5-14.

163. ТОЛПАЕВ В.А. Расчет температурного поля в однородной полуплоскости с прямолинейной анизотропией // Сб. тр. «Избранные задачи гидродинамики». МОИП. – М.: Наука, 1977. – С.58-59.
164. ТОЛПАЕВ В.А. Решение внутренне-краевой задачи Дирихле для неоднородного уравнения эллиптического типа с кусочно-непрерывными коэффициентами в областях прямоугольной, полосообразной и полуполосообразной формы // Мат. XXVII научно-технической конференции СтГТУ. – Ставрополь, 1997. – Т.1. – С.14.
165. ТОЛПАЕВ В.А. Решение задач фильтрации в кусочно-неоднородных средах методом моделирования границ раздела эквипотенциалами течения // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. – 1999. – № 4. – С.39-43.
166. ТОЛПАЕВ В.А. Решение краевых задач напорной фильтрации в некоторых сериях неоднородных сред // Современные методы теории функций и смежные проблемы. – Воронеж, 1999. – С.188-189.
167. ТОЛПАЕВ В.А. Решение краевых задач со смешанными краевыми условиями в прямоугольной многослойной области // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. – 1998. – № 4. – С.47-55.
168. ТОЛПАЕВ В.А. Связь плоскопараллельных течений в изотропных и анизотропных грунтах // Гидромеханика. – М.: МОПИ им. Н.К. Крупской, 1975. – вып. 4. – С.11-16.
169. ТОЛПАЕВ В.А. Уравнения гидродинамики для течений жидкости в крупноячеистых средах // «Современные методы в теории краевых задач». Воронежская весенняя математическая школа. – Воронеж, 1996. – С.176.
170. ТОЛПАЕВ В.А. Уравнения линейной напорной плоскопараллельной фильтрации в анизотропных средах // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. – 1984. – № 2. – С.45-49.
171. ТОЛПАЕВ В.А. Уравнения нелинейной фильтрации в анизотропных средах // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. Приложение. – 2003. – №7. – С. 7-18.

172. ТОЛПАЕВ В.А. Уравнения осесимметричных винтовых течений идеальной несжимаемой жидкости // Мат. V региональной научно-технической конференции. Серия «Естественные и точные науки». – Ставрополь: СевКавГТУ, 2001. – Ч.1. – С.7-9.
173. ТОЛПАЕВ В.А. Фильтрация жидкости в анизотропных и неоднородных грунтах: Учеб. пособие. – Ставрополь: СевКавГТУ, 2000. – 196 с.
174. ТОЛПАЕВ В.А. Численно-аналитические методы расчета дебитов одиночных и групповых скважин в неоднородных средах // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. – 2000. – №1. – С.53-57.
175. ТОЛПАЕВ В.А. Эффект минимизации потока потенциального векторного поля в многослойных средах // Сб. научн. тр. СтГТУ. Серия “Физико-химическая”. – Ставрополь, 1998. – вып.1. – С.71-76.
176. ТОЛПАЕВ В.А., ВАРЯГОВ С.А., ЕРЕМИНА Н.В., КУРСА В.В. Решения задач о продвижении газо-водяного контакта для лабораторной проверки модели нулевой вязкости газа // Вестник СевКавГТИ. – Ставрополь, 2001. – вып. 1. – С.87-93.
177. ТОЛПАЕВ В.А., ЖЕРНОВОЙ А.Д. Решение краевой задачи Дюпюи для среды с прямолинейной анизотропией // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. – 1988. – № 4. – С.80-87.
178. ТОЛПАЕВ В.А., ЖЕРНОВОЙ А.Д., ПЕТРЕНКО В.И. Численный расчет емкости цилиндрического конденсатора с анизотропным диэлектриком // Изв. вузов СССР. Электромеханика. – 1989. – №6. – С.5-12.
179. ТОЛПАЕВ В.А., ЗАХАРОВ В.В. Гидродинамические особенности течения жидкости в призабойной зоне скважины // Вестник СевКавГТУ. Серия «Физико-химическая». – Ставрополь, 2003. – №1(7). – С. 120-127.
180. ТОЛПАЕВ В.А., ЗАХАРОВ В.В. Уравнения нелинейной фильтрации в среде с прямолинейной анизотропией, имеющей особые свойства вдоль одного из её главных направлений // Сб. тр. III региональной научной конференции «Математическое моделирование и информационные технологии в

- технических, естественных и гуманитарных науках» СевКавГТУ. – Ставрополь, 2003. – С. 40-45.
181. ТОЛПАЕВ В.А., ЗАХАРОВ В.В., ПЕТУХОВ А.А. Комплексные потенциалы фильтрационных течений в прямолинейно анизотропных средах с произвольной ориентацией осей тензора проницаемости // Мат. IV Международной научно-практической конференции «Методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике». ЮРГТУ (НПИ) – Новочеркасск, 23 января 2004 г. – Ч.2. – С.39-42.
182. ТОЛПАЕВ В.А., ИВАНОВА Е.Ф. Интегрирование систем дифференциальных уравнений модифицированным методом исключения // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. – 1998. – № 3. – С.107-110.
183. ТОЛПАЕВ В.А., КИРИЛЛОВ В.С. Исследование эффективности вертикального гидроразрыва нефтяного пласта // Мат. II международной конференции «Циклы». – СевКавГТУ. – Ставрополь, 2000. – Ч.2. – С.49-53.
184. ТОЛПАЕВ В.А., КИРИЛЛОВ В.С., ХАРЧЕНКО Ю.В. Влияние скачка проницаемости в призабойной зоне скважин на суммарный дебит круговой батареи // Мат. III региональной научно-технической конференции СевКавГТУ. – Ставрополь, 1999. – С.35-36.
185. ТОЛПАЕВ В.А., КРЫМИН Л.Г. О приближенном расчете электротехнических характеристик плоскопараллельного поля плотности постоянного тока в неоднородном изотропном проводнике // Изв. вузов. Электромеханика. – 1987. – № 4. – С.11-17.
186. ТОЛПАЕВ В.А., КУРСА В.В. Теория Голубевой О.В. течений идеальной жидкости в искривленных слоях переменной толщины и ее приложения к задачам фильтрации // Циклы. СевКавГТУ. – Ставрополь, 2000. – вып.5. – С.14-50.
187. ТОЛПАЕВ В.А., КУТОВОЙ А.С. Закон Дарси для фильтрации в средах с обобщенной анизотропией // Деп. в ВИНТИ. 23.09.87. № 6837 – В87. –19 с.

188. ТОЛПАЕВ В.А., ЛЕДОВСКОЙ В.И. Аналитические способы задания законов распределения главных направлений анизотропии в средах с циклическими структурами // Циклы. Мат. междисциплинарного научного семинара вузов Северо-Кавказского региона. СевКавГТУ. – Ставрополь, 2002. – Ч.2. – С.20-23.
189. ТОЛПАЕВ В.А., ЛЕДОВСКОЙ В.И. Применение теории триортогональных поверхностей для задания законов распределения главных направлений анизотропии // Сб. научн. тр. СевКавГТУ. Серия «Физико-химическая». – Ставрополь, 2002. – вып.6. – С.93-98.
190. ТОЛПАЕВ В.А., ЛЕДОВСКОЙ В.И. Расчёт коэффициентов проводимости для изотропных пластов вращения постоянной толщины // Мат. IV Международной научно-практической конференции «Методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике». ЮРГТУ (НПИ) – Новочеркасск, 23 января 2004 г. – Ч.2. – С.43-46.
191. ТОЛПАЕВ В.А., ЛЕДОВСКОЙ В.И. Расчёты фильтрационных течений в пластах со сферическими подошвой и кровлей // Сб. тр. III региональной научной конференции «Математическое моделирование и информационные технологии в технических, естественных и гуманитарных науках» СевКавГТУ. – Ставрополь, 2003. – С. 37-39.
192. ТОЛПАЕВ В.А., ЛЕДОВСКОЙ В.И. Уравнения двумерной ламинарной фильтрации несжимаемой жидкости в искривлённых слоях переменной толщины // 1). Мат. IX всероссийской научно-технической конференции «Информационные технологии в науке, проектировании и производстве». – Нижний Новгород, 2003. – С. 46-48. 2). Мат. XXXII научно-технической конференции СевКавГТУ. «Естественные и точные науки». – Ставрополь. – 2003. – Т.1. – С.3-5.
193. ТОЛПАЕВ В.А., МАТВЕЕВ Ю.Т. Построение решений некоторых уравнений гиперболического типа методом перехода // Сб. научно-методических статей по математике. – М.: Высшая школа, 1983. – вып.11. – С.98-107.

194. ТОЛПАЕВ В.А., СЕРБИНА Л.И. Оптимизация расчета статических полей в многослойных средах с циклически изменяющимися характеристиками // СКНЦ ВШ, СтГТУ. – Сб. научн. статей «Методологические проблемы научного исследования». – Ставрополь. – 1994. – С.41-51.
195. ТОЛПАЕВ В.А., СЕРБИНА Л.И. Расчет дебитов скважин с кусочно-однородной призабойной зоной // Сб. научн. тр. СтГТУ. Серия “Физико-химическая”. – Ставрополь, 1999. – вып.2. – С.116-119.
196. ТОЛПАЕВ В.А., СЕРБИНА Л.И. Расчет тензора проницаемости для сред с цилиндрическими законами распределения главных направлений анизотропии // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. – 1997. – № 2. – С.41-42.
197. ТОЛПАЕВ В.А., СИЛАНТЬЕВ А.Н. Применение метода Howe к приближенному решению краевых задач теории фильтрации // Мат. III региональной научно-технической конференции СевКавГТУ. – Ставрополь, 1999. – С.11.
198. ТОЛПАЕВ В.А., ХАРЧЕНКО Ю.В. Вывод приближённой формулы для дебита сферического точечного стока, работающего в плоскопараллельном пласте с круговым контуром питания // Мат. XXXII научно-технической конференции СевКавГТУ. – «Естественные и точные науки». – Ставрополь, 2003. – Т.1. – С. 6-8.
199. ТОЛПАЕВ В.А., ХАРЧЕНКО Ю.В. Построение серий точных решений полуобратных граничных задач о дебите круговой скважины в постановке для двухсвязных областей. // Мат. V региональной научно-технической конференции СевКавГТУ. – Серия «Естественные и точные науки». – Ставрополь, 2001. – Ч.1. – С.5-7.
200. ТОЛПАЕВ В.А., ХАРЧЕНКО Ю.В. Построение точных решений задач фильтрации жидкости к скважине методом характеристических функций // Сб. научн. тр. СевКавГТУ. Серия «Естественнонаучная». – Ставрополь, 2002. – вып.5. – С.98-101.

201. ТОЛПАЕВ В.А., ХАРЧЕНКО Ю.В. Потенциалы фильтрационных течений от источников и стоков в областях круговой формы, полуплоскости, квадранта // Вестник СевКавГТУ. Серия «Физико-химическая». – Ставрополь. – 2003. – №1(7). – С. 150-158.
202. ТОЛПАЕВ В.А., ХАРЧЕНКО Ю.В. Расчёт дебита несовершенной скважины при линейном режиме фильтрации // Мат. IX всероссийской научно-технической конференции «Информационные технологии в науке, проектировании и производстве». – Нижний Новгород. – 2003. – С. 19-20.
203. ТОЛПАЕВ В.А., ХАРЧЕНКО Ю.В. Учет скачка проницаемости призабойной зоны скважины с помощью метода ЭГДА // Мат. III региональной научно-технической конференции СевКавГТУ. – Ставрополь. – 1999. – С.34-35.
204. ТОЛПАЕВ В.А., ХАРЧЕНКО Ю.В., ЗАХАРОВ В.В. Влияние проницаемости гравийного фильтра на дебит буровой скважины при линейном законе Дарси // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. – 2003. – № 3 – С. 36-41.
205. ТОЛПАЕВ В.А., ХАРЧЕНКО Ю.В., ЗАХАРОВ В.В. Уточнённое решение задачи о дебите с учётом движения флюида в стволе скважины // Сб. тр. III региональной научной конференции «Математическое моделирование и информационные технологии в технических, естественных и гуманитарных науках» СевКавГТУ. – Ставрополь, 2003. – С. 33-37.
206. ТОЛПАЕВ В.А., ХАРЧЕНКО Ю.В., КИРИЛЛОВ В.С. Вычислительные эксперименты по оптимизации размещения нефтедобывающих скважин в круговом пласте // Сб. научн. тр. СевКавГТУ. Серия «Нефть и газ». – Ставрополь, 2000. – вып. 3. – С.131-136.
207. ТОЛПАЕВ В.А., ХАРЧЕНКО Ю.В., КИРИЛЛОВ В.С. Математическая модель циклического взаимодействия скважин с индивидуальными фильтрационными свойствами призабойных зон // «Цикль». – Ставрополь, СевКавГТУ, 2000. – вып. 2. – С.57-62.

208. ТОЛПАЕВ В.А., ШАХНАБАТОВА Л. О точности моделирования в статических расчетах мелкослойчатых сред анизотропными // Изв. вузов СССР. Электромеханика. – 1988. – № 6. – С.13-18.
209. ТОЛПАЕВ В.А., ШАХНАБАТОВА Л.Б. Комплексные потенциалы плоско-параллельных электрических и магнитных полей в анизотропных средах // Изв. вузов. Электромеханика. – 1984. – №3. – С. 5-9.
210. ТОЛПАЕВ В.А., ШАХНАБАТОВА Л.Б., КРЫМИН Л.Г. Об аппроксимации в электротехнических расчетах мелкослойчатых сред анизотропными // Изв. вузов. Электромеханика. – 1985. – № 11. – С.23-32.
211. УМОВ Н.А. О стационарном движении электричества на проводящих поверхностях произвольного вида. – Математический сборник. – 1878. – Т.9. – С. 121-127.
212. ФИХМАНАС Р.Ф., ФРИДБЕРГ П.Ш. Метод Хоу расчёта ёмкости тел и его связь с вариационными принципами // ЖТФ. – 1970. – Т.40. – вып.6. – С.1327-1328.
213. ФИХТЕНГОЛЬЦ Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука. – 1970. – Т.2-3. – 800 с.+656 с.
214. ХМЕЛЬНИК М.И. Исследование некоторых течений в двусвязной области и их применение в теории фильтрации // Тр. ун-та / МОПИ им. Н.К.Крупской. – 1968. – Т.200. – вып.7. – С.100-113.
215. ХМЕЛЬНИК М.И. Математическая модель течения на многосвязных и многолистных поверхностях // Некоторые проблемы математики в задачах физики и механики. – М.: Изд-во МФТИ, 1988. – С. 95-100.
216. ХОЛОДОВСКИЙ С.Е. Линейная фильтрация жидкости в анизотропных средах // Задачи динамических процессов в сплошных средах. Свердлов. гос. пед. ин-т. – Свердловск, 1991. – С.15-19.
217. ХОЛОДОВСКИЙ С.Е. О гидродинамическом осреднении сильно неоднородных пористых сред при линейной фильтрации // Изв. РАН. МЖГ. – 1993. – № 5. – С.190-192.

218. ХОЛОДОВСКИЙ С.Е. О фильтрации в неоднородных средах с криволинейной анизотропией // Проблемы математики в задачах физики и техники. Моск. физико – технич. ин-т. – М., 1992. – С.153-155.
219. ХОЛОДОВСКИЙ С.Е. О фильтрации в пластах с кольцевыми неоднородными анизотропными зонами, трещинами и завесами // Докл. АН СССР. – 1991. – Т.317. – № 3. – С.606-608.
220. ХОЛОДОВСКИЙ С.Е. О фильтрации в слоистых средах с пересекающимися трещинами и завесами // Докл. РАН. – 1994. – Т. 338. – № 5. – С.622-624.
221. ХОЛОДОВСКИЙ С.Е. О фильтрационных течениях с экранированным шаровым включением // Изв. РАН. МЖГ. – 2002. – № 4. – С.98-104.
222. ХОЛОДОВСКИЙ С.Е. Об анизотропной модели слоисто – анизотропных трещиноватых сред при линейной фильтрации // Вычислительная математика и математическая физика. Моск. гос. пед. ин-т. – М., 1988. – С.14-17.
223. ХОЛОДОВСКИЙ С.Е. Тензор эффективной проницаемости сильно неоднородных грунтов // Инженерно – физический журнал БАН и РАН. – 1992. – Т.63. – № 1. – С.18-22.
224. ХОРЬКОВ В.А. Некоторые краевые задачи установившейся фильтрации жидкости в слоях переменной толщины // Задачи динамических процессов в сплошных средах: Межвуз. сб. / Свердлов. гос. пед. ин-т. – Свердловск, 1991. – С.52-56.
225. ЧЕРНЯЕВ А.П. Фильтрация в искривленных неоднородных пластах с проводимостью некоторого класса // ПММ. – 1983. – Т.47. – вып. 6. – С.1047-1049.
226. ШЕЙДЕГГЕР А.Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. – М.: Гостоптехиздат, 1960. – 250 с.
227. ШЕШУКОВ Е.Г. О нелинейной фильтрации в анизотропной среде // Гидродинамика и разработка нефтяных месторождений. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1977. – С. 183-194.

228. ЩЕЛКАЧЕВ В.Н. Критический анализ исследований, посвященных определению верхней границы закона фильтрации Дарси // Упругий режим фильтрации и термодинамика пласта. – М.: Недра, 1972. – С. 3-12.
229. ЩЕЛКАЧЕВ В.Н., ЛАПУК Б.Б. Подземная гидравлика. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 736 с.
230. ЯНКЕ Е., ЭМДЕ Ф., ЛЁШ Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 342 с.
231. ЯРМИЦКИЙ А.Г. Фильтрационная теорема о двух окружностях // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1986. – № 4. – С.76-82.
232. ALLEN A.J.C. On some problems in the conduction of electricity // Quarterly Journal of pure and applied mathematics, 1881, vol. 17, p. 65-86.
233. BELTRAMI E. Intorno ad un caso di moto a due coordinate // Rendiconti d. Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, 1878, vol. 11, p. 199-210.
234. BERS L. Theory of pseudo-analytic functions. Lecture notes (mimeographed). New York University, 1953.
235. BERS L., GELBART A. On the class of functions defined by partial differential equations. Transactions of the American Mathematical Society, v. 56, № 1, 1944.
236. DACHLER R. Uber Stekerwasserstromungen in geschichtetem Material. // Wasserwirtschaft, 1933, №2, p.15-20.
237. FERRANDON J. Les lois de lécoulement defiltration. Genie Civil, 125, no 24, 1948.
238. HILL M.J. The steady motion of electricity in spherical current sheets. – Quarterly Journal of pure and applied mathematics, 1879, vol. 16, p. 306-323.
239. IRMEY B. Darcys low for nonisotropicsoils. Proc. Ass. Gen. Bruxelless Ass. Int. Hydrol. (UGGI), 2, 179, 1951.
240. JONSON W.E., HUGHES R.V. Directional permeability measurements and their significance. Producers monthly, 1948, 13, p. 17-25.
241. LEVY T. Filtration in a porous fissured rock: influence of the fissures connexity // Eur. J. Mech. 1990. V.9. № 4. С.309-327.

242. LITWINISZIN J. Stationary flows in heterogeneously anisotropic mediums. Ann. Polon. Math. 1950. 22. 185p.
243. MAAS C. Groundwater flows to a well in a layered porous medium // Water resources research. 1987. V.23. № 8. C.1675-1681.
244. MARCUS H. The permeability of sample of an anisotropy medium // J. Geophys. Res. 1962. V. 67. №13, p. 5215-5225.
245. MARCYS H., EVENSON D.E. Directional permeability in anisotropy porous media // Univ. Calif. Bercely. Water Resources Center contrib. 1961, 31. oct, p. 105.
246. MEEGODA N.J., KING I.P., ARULANDAN K. An expression for the permeability of anisotropy granular media // Int. J. number. anal. methods in geomechanics. 1989. V. 13. p. 575-598.
247. MUSKAT M. Physical principles of oil production. New York. McGraw-Hill. 1949. 922 p.
248. MUSKAT M. The flow of homogenous fluids through porous media. Ann. Arbour. Mich. Edwards. 1946. 736 p.
249. NIKOLAEVSKIJ V.N. Mechanics of Porous and Fractured Media. Singapore: World Scientific. 1990. 472p.
250. NUMEROV S.N. Non-linear seepage in anisotropy media // Proceedings 15 congress IAHR. 1973. Vol.3. p.39.
251. ODA M. Permeability tensor for discontinuous rock masses // Geotechnique. 1985. V.35. № 4. C.483-495.
252. OLENDORFF F. Potentialfelder der Elektrotechnik. Berlin, 1932. 395 s.
253. PETERSEN J.S., ROCHWER C., ALBERTSON M.L. Effect of well screens on flow into wells // Proc. Amer. Soc. Civil Engrs. 1953, 79, № 365.
254. PIVEN' V.F. The theory of two-dimensional processes in inhomogeneous layers with power law of their conductivity variation // J. Appl. Maths. Mechs. 1997, Vol. 61, №4, P. 577-586.
255. PRATS M. Effect of vertical fractures on reservoir behaviour in compressible fluid case // Soc. Petrol. Eng. Journal. 1961. V.1. № 2. C.105-118.

256. SCHAFFERNAK F. Erforschung der physikalischen Gesetze, nach welchem die Durchsickerung des Wassers eine durch Talsperre oder den Untergrund stattfindet. Wasserwirtschaft. 1933. №30. s. 10-20.
257. SCHEIDEGGER A. On directional permeability // Geophys. Pura Appl. 1956. V. 33. P. 111.
258. SCHEIDEGGER A.E. The physics of flow through porous media. Univ. of Toronto Press. 1974, 3d edition. 353 p.
259. SNOW D.T. Anisotropy permeability of fractured media // Water Resour. Research. 1969. V.5. № 6. C.1273-1284.
260. ZIJL W., STAM J.M. Modelling permeability in imperfectly layered porous media // Math. Geol. 1992. V.24. № 8. C.865-883.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ЗАКОНЫ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БАЗИСОВ, КООРДИНАТ ВЕКТОРОВ И ТЕНЗОРОВ

В расчётах тензоров проницаемостей для линейной фильтрации и тензоров фильтрационных свойств для нелинейной фильтрации в анизотропных средах применяются законы ортогонального преобразования базисов, координат векторов и тензоров. Поэтому перечислим все относящиеся к названным законам необходимые сведения из линейной алгебры и тензорного исчисления [19, 60, 72, 76]. Кроме того в П1.4 этого приложения приведём векторно-матричную форму представления уравнений квадратичной и кубической связи одного векторного поля \vec{F} от другого векторного поля \vec{v} . Такая форма записи уравнений связи физических полей более наглядна по сравнению с тензорной формой. Кроме того, она позволяет представить законы преобразования тензоров 3-го и 4-го рангов в новой наглядной матричной форме.

П1.1 Закон преобразования базисов

Пусть в области фильтрации выбраны две ортогональные криволинейные системы координат (ξ, η, ζ) и (ξ', η', ζ') , которые с декартовыми координатами (x, y, z) связаны равенствами

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(x, y, z) \\ \eta &= \eta(x, y, z) \\ \zeta &= \zeta(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{aligned} \xi' &= \xi'(x, y, z) \\ \eta' &= \eta'(x, y, z) \\ \zeta' &= \zeta'(x, y, z) \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

а друг с другом равенствами

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(\xi', \eta', \zeta') \\ \eta &= \eta(\xi', \eta', \zeta') \\ \zeta &= \zeta(\xi', \eta', \zeta') \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Последние получаются из (1) путем исключения координат x, y, z . Для того, чтобы координаты (ξ, η, ζ) были ортогональными требуется, как известно, обращение в нуль скалярных произведений

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial \eta} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial \zeta} = 0, \quad (3)$$

где $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ - радиус-вектор текущей точки $M(x, y, z)$. Аналогично, чтобы координаты (ξ', η', ζ') были ортогональными, должны обращаться в нуль скалярные произведения

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi'} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \eta'} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi'} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \zeta'} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \eta'} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \zeta'} = 0 \quad (4)$$

Всюду ниже считаем, что равенства (1) удовлетворяют в каждой точке $M(x, y, z)$ условиям (3) и (4). Вектора, образующие локальный декартовый базис в криволинейной системе координат (ξ, η, ζ) будут, как известно, определяться по формулам

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi}; \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \eta}; \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{H_3} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \zeta}, \quad (5)$$

где

$$H_1 = \left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2}; \quad H_2 = \left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial \eta} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2}; \quad (6)$$

$$H_3 = \left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial \zeta} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^2}$$

параметры Ламе системы (ξ, η, ζ) . Совершенно аналогично определяется локальный декартовый базис в системе координат ξ', η', ζ' :

$$\vec{e}'_1 = \frac{1}{H'_1} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi'}; \quad \vec{e}'_2 = \frac{1}{H'_2} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \eta'}; \quad \vec{e}'_3 = \frac{1}{H'_3} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \zeta'}, \quad (7)$$

где

$$H'_1 = \left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi'} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi'} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi'} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi'} \right)^2}; \quad H'_2 = \left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial \eta'} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta'} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta'} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta'} \right)^2}; \quad (8)$$

$$H'_3 = \left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial \zeta'} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta'} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta'} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta'} \right)^2}$$

Вектора локальных декартовых базисов в силу равенств (3) и (4) будут удовлетворять условиям $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$ и $(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} - символ Кронекера ($\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$ и $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$).

С целью установления связи между векторами «старого» $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и «нового» $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ базисов выполним дифференцирование в формулах (7) с учё-

том равенств (2):

$$\begin{aligned}\bar{e}'_1 &= \frac{1}{H'_1} \cdot \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \xi'} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \xi'} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi'} \right) = \\ &= \frac{1}{H'_1} \cdot \left(H_1 \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \xi'} \cdot \bar{e}_1 + H_2 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \xi'} \cdot \bar{e}_2 + H_3 \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi'} \cdot \bar{e}_3 \right).\end{aligned}$$

Аналогично получаются два других равенства для векторов \bar{e}'_2 и \bar{e}'_3 . В матричной форме все три равенства для векторов \bar{e}'_1, \bar{e}'_2 и \bar{e}'_3 нового базиса можно записать в виде

$$E' = \Pi \cdot E, \quad (9)$$

где

$$E = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix}, \quad E' = \begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \bar{e}'_2 \\ \bar{e}'_3 \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} \frac{H_1}{H'_1} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \xi'} & \frac{H_2}{H'_1} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \xi'} & \frac{H_3}{H'_1} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi'} \\ \frac{H_1}{H'_2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \eta'} & \frac{H_2}{H'_2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \eta'} & \frac{H_3}{H'_2} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \eta'} \\ \frac{H_1}{H'_3} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \zeta'} & \frac{H_2}{H'_3} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \zeta'} & \frac{H_3}{H'_3} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta'} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Элементы матрицы перехода Π из старого базиса E в новый базис E' можно найти не только по формуле (10), но и через скалярные произведения базисных векторов по формуле

$$\Pi = \begin{pmatrix} (\bar{e}'_1, \bar{e}_1) & (\bar{e}'_1, \bar{e}_2) & (\bar{e}'_1, \bar{e}_3) \\ (\bar{e}'_2, \bar{e}_1) & (\bar{e}'_2, \bar{e}_2) & (\bar{e}'_2, \bar{e}_3) \\ (\bar{e}'_3, \bar{e}_1) & (\bar{e}'_3, \bar{e}_2) & (\bar{e}'_3, \bar{e}_3) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Такой вид (11) матрицы ортогонального преобразования базисов устанавливается известными методами линейной алгебры [60]. Далее с целью сокращения объёма записей элементы матрицы Π будем обозначать через α_{ij} т.е. $\{\Pi\}_{ij} = \alpha_{ij}$.

В силу равноправия базисов E и E' матрица обратного перехода Π^{-1} из E' в E будет, в соответствии с (10), иметь вид:

$$E = \Pi^{-1} \cdot E', \quad (12)$$

где

$$\Pi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{H'_1}{H_1} \frac{\partial \xi'}{\partial \xi}; & \frac{H'_2}{H_1} \frac{\partial \eta'}{\partial \xi}; & \frac{H'_3}{H_1} \frac{\partial \zeta'}{\partial \xi} \\ \frac{H'_1}{H_2} \frac{\partial \xi'}{\partial \eta}; & \frac{H'_2}{H_2} \frac{\partial \eta'}{\partial \eta}; & \frac{H'_3}{H_2} \frac{\partial \zeta'}{\partial \eta} \\ \frac{H'_1}{H_3} \frac{\partial \xi'}{\partial \zeta}; & \frac{H'_2}{H_3} \frac{\partial \eta'}{\partial \zeta}; & \frac{H'_3}{H_3} \frac{\partial \zeta'}{\partial \zeta} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Матрица в формуле (13) действительно обратная к Π , так как непосредственное перемножение матриц (10) и (13), как легко проверить, дает единичную матрицу I . Через скалярные произведения базисных векторов матрица перехода из E' в E будет, по аналогии с формулой (11), записываться в виде

$$\Pi^{-1} = \begin{pmatrix} (\bar{e}_1, \bar{e}'_1); & (\bar{e}_1, \bar{e}'_2); & (\bar{e}_1, \bar{e}'_3) \\ (\bar{e}_2, \bar{e}'_1); & (\bar{e}_2, \bar{e}'_2); & (\bar{e}_2, \bar{e}'_3) \\ (\bar{e}_3, \bar{e}'_1); & (\bar{e}_3, \bar{e}'_2); & (\bar{e}_3, \bar{e}'_3) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Сопоставление формул (11) и (14) показывает, что матрицы Π и Π^{-1} получаются одна из другой с помощью транспонирования, т.е. $\Pi^{-1} = \Pi^T$. Последнее означает, что матрица преобразования базисов ортогональная, что соответствует известному правилу преобразования ортогональных координат в евклидовых пространствах [60].

П1.2 Закон преобразования координат векторов

Если в области фильтрации выбраны две криволинейных ортонормированных системы координат (ξ, η, ζ) и (ξ', η', ζ') , то вектор \bar{v} (вектор скорости фильтрации) может быть разложен как по базису первой системы, так и по базису второй системы координат:

$$\bar{v} = v_1 \bar{e}_1 + v_2 \bar{e}_2 + v_3 \bar{e}_3 = v'_1 \bar{e}'_1 + v'_2 \bar{e}'_2 + v'_3 \bar{e}'_3. \quad (1)$$

В формуле (1) через v_1, v_2, v_3 (v'_1, v'_2, v'_3) обозначены проекции вектора \bar{v} на оси векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ ($\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$). Чтобы установить связь между координатами вектора \bar{v} , запишем разложение (1) в матричном виде:

$$\bar{v} = V^T \cdot E = (V')^T \cdot E', \quad (2)$$

где $V^T = (v_1, v_2, v_3)$ и $(V')^T = (v'_1, v'_2, v'_3)$, а E и E' - ранее введенные в П1.1 одно-столбцовые матрицы из базисных векторов

$$E = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix}, \quad E' = \begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \bar{e}'_2 \\ \bar{e}'_3 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

С учётом формулы (1.9), равенство (2) можно переписать в виде $V^T \cdot E = (V')^T \cdot \Pi \cdot E$, откуда получаем: $V^T = (V')^T \cdot \Pi$. После применения к обеим частям последнего равенства операции транспонирования, найдем, что

$$V = \Pi^T \cdot V'. \quad (4)$$

Формула (4) позволяет вычислить координаты V вектора \bar{v} в старой системе через его координаты V' в новой. Умножая слева обе части равенства (4) на матрицу Π , получим

$$V' = \Pi \cdot V. \quad (5)$$

Формула (5) позволяет вычислить координаты V' вектора \bar{v} в новой системе через его координаты V в старой системе координат.

П1.3 Закон ортогонального преобразования координат тензора 2-го ранга

Пусть в области фильтрации имеются два векторных поля \bar{v} и \bar{V} , которые в старой системе координат (ξ, η, ζ) связаны друг с другом линейными равенствами

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= k_{11}B_1 + k_{12}B_2 + k_{13}B_3 \\ v_2 &= k_{21}B_1 + k_{22}B_2 + k_{23}B_3 \\ v_3 &= k_{31}B_1 + k_{32}B_2 + k_{33}B_3 \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

или в матричном виде

$$V = K \cdot B, \quad (2)$$

где V и B - одностробцовые матрицы $V^T = (v_1, v_2, v_3)$; $B^T = (B_1, B_2, B_3)$, а K - матрица (3×3) вида

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Совокупность 9 элементов матрицы K называют тензором 2-го ранга \hat{K} , а

сами элементы k_{ij} - координатами (компонентами) тензора \hat{K} в системе ξ, η, ζ . В новой системе координат равенство (2) имеет аналогичный вид

$$V' = K' \cdot V', \quad (4)$$

но, конечно, координаты K' тензора в системе (ξ', η', ζ') будут другими. Для того, чтобы установить связь между старыми и новыми координатами K и K' тензора 2-го ранга подставим в формулу (2) координаты V , выраженные с помощью (2.4) через новые координаты V' . Получим $V = K \cdot (\Pi^T V') = (K \cdot \Pi^T) \cdot V'$. Если теперь старые координаты V пересчитать в новые координаты V' по формуле (2.5), то придем к равенству $V' = \Pi V = \Pi \cdot (K \Pi^T) \cdot V' = (\Pi \cdot K \cdot \Pi^T) V'$. Сравнивая последнее равенство с формулой (4), для новых координат K' тензора второго ранга \hat{K} получим выражение

$$K' = \Pi \cdot K \cdot \Pi^T. \quad (5)$$

В покомпонентной форме записи закон (5) ортогонального преобразования тензора второго ранга принимает вид

$$k'_{ij} = \alpha_{is} \alpha_{jm} k_{sm}, \quad (5')$$

где по повторяющимся индексам s и m идёт суммирование от 1 до 3. Совершенно аналогично устанавливается закон обратного преобразования координат тензора \hat{K} :

$$K = \Pi^T \cdot K' \cdot \Pi, \quad (6)$$

или в покомпонентной форме записи

$$k_{ij} = \alpha_{si} \alpha_{mj} k'_{sm}, \quad (6')$$

где снова по повторяющимся индексам s и m идёт суммирование от 1 до 3.

Отметим для дальнейшего некоторые хорошо известные в линейной и тензорной алгебре важные *следствия*, вытекающие из формул (5) и (6). *Первое* – из (5) следует, что $(K')^T = (\Pi K \Pi^T)^T = \Pi K^T \Pi^T = \Pi K \Pi^T = K'$, если $K^T = K$. Таким образом, если тензор \hat{K} симметричен в некоторой одной ортогональной системе координат, то он будет симметричен и в любой другой ортогональной системе. *Второе* – т.к. Π - ортогональная матрица, то

$\det(\Pi^T) \cdot \det(\Pi) = \det(\Pi^T \Pi) = \det(I) = 1$ и, поэтому, $\det(K) = \det(\Pi^T K \Pi) = \det(K')$. Таким образом, определитель матрицы из координат тензора \hat{K} является инвариантом преобразования координат. В тензорной алгебре этот инвариант принято обозначать [19] символом $I_3 = \det(K) = \text{inv}$. Третье – прямым вычислением с помощью формулы (5) можно убедиться, что сумма диагональных элементов тензора \hat{K} тоже инвариант преобразования координат. В тензорной алгебре [19] этот инвариант обозначают символом $I_1 = \text{sp}(K) = k_{11} + k_{22} + k_{33} = \text{inv}$. Четвертое – ещё одним инвариантом преобразования координат для тензора \hat{K} служит величина, которую принято обозначать [19] как $I_2 = \begin{vmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_{11} & k_{31} \\ k_{13} & k_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & k_{22} \end{vmatrix} = \text{inv}$.

П1.4. Законы ортогонального преобразования координат тензоров третьего и четвёртого рангов

Линейная связь между двумя векторными полями в некоторой материальной среде описывается с помощью тензора второго ранга. Нелинейные связи между двумя векторными полями описываются при помощи тензоров 3-го, 4-го и более высоких рангов. Так тензоры третьего ранга устанавливают квадратичную зависимость первого векторного поля \vec{F} от второго векторного поля \vec{v} , тензоры четвёртого ранга – кубичную зависимость \vec{F} от \vec{v} и т.д. Перейдём к рассмотрению такого рода зависимостей \vec{F} от \vec{v} . С целью наглядности представления уравнений линейной, квадратичной и кубичной связей полей \vec{F} и \vec{v} применим векторно-матричный способ записи. В выбранном ортонормированном базисе $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)^T$ линейная связь будет задаваться уравнением вида

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_1(\vec{v}) = & (a_{11} \cdot v_1 + a_{12} \cdot v_2 + a_{13} \cdot v_3) \cdot \vec{e}_1 + \\
 & + (a_{21} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + a_{23} \cdot v_3) \cdot \vec{e}_2 + \\
 & + (a_{31} \cdot v_1 + a_{32} \cdot v_2 + a_{33} \cdot v_3) \cdot \vec{e}_3
 \end{aligned} \quad (1)$$

квадратичная связь – задаётся уравнением вида

$$\vec{F}_2(\vec{v}) = (v^T \cdot B_1 \cdot v) \cdot \vec{e}_1 + (v^T \cdot B_2 \cdot v) \cdot \vec{e}_2 + (v^T \cdot B_3 \cdot v) \cdot \vec{e}_3; \quad (2)$$

и кубичная связь – в виде уравнения

$$\begin{aligned} \bar{F}_3(\bar{v}) = & [v_1(v^T \cdot C_{11} \cdot v) + v_2(v^T \cdot C_{12} \cdot v) + v_3 \cdot (v^T \cdot C_{13} \cdot v)] \cdot \bar{e}_1 + \\ & + [v_1(v^T \cdot C_{21} \cdot v) + v_2(v^T \cdot C_{22} \cdot v) + v_3 \cdot (v^T \cdot C_{23} \cdot v)] \cdot \bar{e}_2 + \\ & + [v_1(v^T \cdot C_{31} \cdot v) + v_2(v^T \cdot C_{32} \cdot v) + v_3 \cdot (v^T \cdot C_{33} \cdot v)] \cdot \bar{e}_3 \end{aligned} \quad (3)$$

В формулах (1) - (3) через v_1, v_2, v_3 обозначены координаты вектора $\bar{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \bar{e}_i$.

Через f_{ki} обозначены координаты векторов $\bar{F}_k(\bar{v}) = \sum_{i=1}^3 f_{ki} \cdot \bar{e}_i$ (где $k = 1, 2, 3$). Для

матриц-столбиков из координат векторов \bar{v} и \bar{F}_k используются обозначения $V^T = (v_1, v_2, v_3)$ и $F_k^T = (f_{1k}, f_{2k}, f_{3k})$.

Через a_{ij} в формуле (1) обозначены 9 числовых коэффициентов, образующих тензор 2-го ранга, который принято записывать в виде квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3$.

Через $B_k = (b_{ijk})_{i,j=1}^3$; $k = 1, 2, 3$, в формуле (2) обозначены три квадратных матрицы (3×3) с элементами b_{ijk} . Совокупность из 27 элементов матриц B_k образует тензор третьего ранга, который удобно записывать в виде трехмерной [72] матрицы B , представляющей собой столбец из матриц B_k , т.е. $V^T = (B_1, B_2, B_3)$.

Через C_{ij} в формуле (3) обозначены девять квадратных матриц (3×3) с элементами $C_{ij} = (c_{kmij})_{k,m=1}^3$. Совокупность 81 элементов c_{kmij} образует тензор четвертого ранга, который в развернутой форме записи удобно представлять в виде четырехмерной [72] матрицы $C = (C_{ij})_{i,j=1}^3$.

Известные [19, 72, 76] покомпонентные законы преобразования тензоров 2, 3 и 4 рангов в практических расчётах удобно также представлять в матричной форме. Поэтому специально осуществим вывод *матричной формы законов преобразования тензоров 3-го и 4-го рангов* (для тензоров 2-го ранга такая форма хорошо известна и приведена в П1.3). Эти законы ортого-

нального преобразования тензоров 3 и 4 рангов можно получить из инвариантности формы уравнений связи (2) и (3).

Для того, чтобы получить компоненты тензора 3-го ранга в новом базисе, вектор \bar{F}_2 в формуле (2) разложим по базису E' . В результате после алгебраических преобразований для разложения \bar{F}_2 в новом базисе получим:

$$\bar{F}_2 = \sum_{i=1}^3 (v'^T \cdot B'_i \cdot v') \cdot \bar{e}'_i. \quad (4)$$

В (4) компоненты $V' = (B'_1, B'_2, B'_3)^T$ тензора 3-го ранга в новом базисе будут вычисляться по формуле

$$\begin{pmatrix} B'_1 \\ B'_2 \\ B'_3 \end{pmatrix} = \Pi * \begin{pmatrix} \Pi \cdot B_1 \cdot \Pi^T \\ \Pi \cdot B_2 \cdot \Pi^T \\ \Pi \cdot B_3 \cdot \Pi^T \end{pmatrix}, \quad (5)$$

которая и представляет собой матричную форму записи закона преобразования тензора 3-го ранга при переходе из ортогонального базиса E в новый ортогональный базис E' . В (5) точка « \cdot » обозначает произведение числовых квадратных матриц 3-го порядка, а умножение, отмеченное знаком «звездочка» *, - это произведение числовой матрицы Π на расположенную в (5) справа от * матрицу-столбик, три элемента которой - числовые квадратные матрицы 3-го порядка. Подчеркнем, что в покомпонентной форме записи формула (5) принимает вид

$$b'_{ijk} = \alpha_{ip} \cdot \alpha_{js} \cdot \alpha_{km} \cdot b_{psm} \quad (5')$$

(где по повторяющимся индексам p, s, m идет суммирование от 1 до 3), совпадающий с известным [19] законом ортогонального преобразования координат тензоров 3-го ранга. Совершенно аналогично устанавливаем, что обратное преобразование тензора B третьего ранга в матричной форме записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \Pi^T * \begin{pmatrix} \Pi^T \cdot B'_1 \cdot \Pi \\ \Pi^T \cdot B'_2 \cdot \Pi \\ \Pi^T \cdot B'_3 \cdot \Pi \end{pmatrix}, \quad (6)$$

а в покомпонентной форме записи в виде

$$b_{ijk} = \alpha_{pi} \cdot \alpha_{sj} \cdot \alpha_{mk} \cdot b'_{psm}, \quad (6')$$

где снова по повторяющимся индексам p, s, m идет суммирование от 1 до 3.

Для того чтобы получить компоненты тензора 4-го ранга C в новом базисе, перейдем в (3) к разложению вектора \bar{F}_3 по векторам \bar{e}'_i . В результате после алгебраических преобразований для новых координат f'_{3m} вектора $\bar{F}_3(\bar{v})$ найдем следующее выражение

$$f'_{3m} = v'_1 \cdot (v'^T \cdot C'_{m1} \cdot v') + v'_2 \cdot (v'^T \cdot C'_{m2} \cdot v') + v'_3 \cdot (v'^T \cdot C'_{m3} \cdot v'), \quad (7)$$

в котором C'_{m1} , C'_{m2} и C'_{m3} определяются по формулам

$$\begin{pmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} \\ C'_{21} & C'_{22} & C'_{23} \\ C'_{31} & C'_{32} & C'_{33} \end{pmatrix} = \Pi * \begin{pmatrix} \Pi \cdot C_{11} \cdot \Pi^T & \Pi \cdot C_{12} \cdot \Pi^T & \Pi \cdot C_{13} \cdot \Pi^T \\ \Pi \cdot C_{21} \cdot \Pi^T & \Pi \cdot C_{22} \cdot \Pi^T & \Pi \cdot C_{23} \cdot \Pi^T \\ \Pi \cdot C_{31} \cdot \Pi^T & \Pi \cdot C_{32} \cdot \Pi^T & \Pi \cdot C_{33} \cdot \Pi^T \end{pmatrix} * \Pi^T. \quad (8)$$

Формула (8) и представляет развернутый вид записи матричной формы закона ортогонального преобразования тензора C четвертого ранга. Аналогично выводится формула обратного преобразования компонентов тензора C четвертого ранга при переходе из базиса E' в базис E :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \Pi^T * \begin{pmatrix} \Pi^T \cdot C'_{11} \cdot \Pi & \Pi^T \cdot C'_{12} \cdot \Pi & \Pi^T \cdot C'_{13} \cdot \Pi \\ \Pi^T \cdot C'_{21} \cdot \Pi & \Pi^T \cdot C'_{22} \cdot \Pi & \Pi^T \cdot C'_{23} \cdot \Pi \\ \Pi^T \cdot C'_{31} \cdot \Pi & \Pi^T \cdot C'_{32} \cdot \Pi & \Pi^T \cdot C'_{33} \cdot \Pi \end{pmatrix} * \Pi. \quad (9)$$

В покомпонентной форме записи формулы (8) и (9) принимают вид

$$c'_{ijkl} = \alpha_{im} \cdot \alpha_{jn} \cdot \alpha_{kp} \cdot \alpha_{lr} \cdot c_{mnp r} \quad (8')$$

и

$$c_{ijkl} = \alpha_{mi} \cdot \alpha_{nj} \cdot \alpha_{pk} \cdot \alpha_{rl} \cdot c'_{mnp r}, \quad (9')$$

(где по повторяющимся индексам m, n, p, r идет суммирование от 1 до 3), совпадающий с известным [19] классическим законом ортогонального преобразования компонентов тензора 4 ранга.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. КАТАЛОГ ТЕНЗОРОВ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В СРЕДАХ С КОНКРЕТНЫМИ ЗАКОНАМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГНА

В этом приложении автор 1) кратко описывает разработанные им в [150, 168, 170, 171, 173, 177, 178, 188, 189, 196, 209] методы задания конкретных серий законов распределения ГНА и 2), приводит примеры расчётов тензоров проницаемостей для рассматриваемых законов распределения ГНА. В качестве основной расчётной формулы для определения компонент тензора проницаемости в линейном законе Дарси (1.3.9) выступает формула (1.3.6), обоснование которой с позиций линейной алгебры приведено в П1.3 и она представлена в виде (П1.3.6).

П2.1 Тензор проницаемости для среды с прямолинейным законом распределения ГНА

Прямолинейным законом распределения ГНА назовем закон, задаваемый с помощью семейства триортогональных плоскостей $p = const$, $q = const$ и $r = const$, где

$$p = (\vec{h}_1, \vec{R}), \quad q = (\vec{h}_2, \vec{R}), \quad r = (\vec{h}_3, \vec{R}). \quad (1)$$

Здесь $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ - радиус-вектор точки $M(x, y, z)$ в декартовой системе координат x, y, z , а $\vec{h}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{h}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, $\vec{h}_3 = (a_3, b_3, c_3)$ - три заданных попарно ортогональных единичных вектора; $|\vec{h}_1| = |\vec{h}_2| = |\vec{h}_3| = 1$; $(\vec{h}_1, \vec{h}_2) = (\vec{h}_1, \vec{h}_3) = (\vec{h}_2, \vec{h}_3) = 0$. Векторы $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3$ задают поле ГНА, которое естественно называть прямолинейным законом распределения ГНА.

Приступим теперь к расчёту тензора проницаемости. Пусть расчётной системой координат является декартовая: $\xi \equiv x, \eta \equiv y, \zeta \equiv z$. Систему же координат ξ', η', ζ' совместим с полем ГНА, т.е. $\xi' \equiv p, \eta' \equiv q, \zeta' \equiv r$. Тогда базисными векторами системы ГНА будут:

$$\vec{e}'_1 = \frac{\nabla p}{|\nabla p|} = \vec{h}_1; \quad \vec{e}'_2 = \frac{\nabla q}{|\nabla q|} = \vec{h}_2; \quad \vec{e}'_3 = \frac{\nabla r}{|\nabla r|} = \vec{h}_3. \quad (2)$$

Базисные векторы расчетной системы x, y, z совпадают с ортами декартового базиса: $\vec{e}_1 = \vec{i}, \vec{e}_2 = \vec{j}, \vec{e}_3 = \vec{k}$. Поэтому матрица Π перехода базиса из E в базис E' в соответствии с формулой (П1.1.11) будет иметь вид:

$$\Pi = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Тензор проницаемости в декартовых координатах для прямолинейного закона распределения ГНА будет, в соответствии с (1.3.6) и (П1.3.6), вычисляться по формуле

$$K = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где λ_1, λ_2 и λ_3 - главные проницаемости вдоль направлений \vec{h}_1, \vec{h}_2 и \vec{h}_3 соответственно.

В частности, если $\vec{h}_3 = \vec{k}$, а $\vec{h}_1 = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$ и $\vec{h}_2 = -\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}$, то матрица преобразования базисов примет вид $\Pi = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, и,

поэтому, из (4) получим:

$$\left. \begin{aligned} k_{11} &= \lambda_1 \cos^2 \alpha + \lambda_2 \sin^2 \alpha; & k_{13} &= 0; \\ k_{12} &= k_{21} = (\lambda_1 - \lambda_2) \cos \alpha \sin \alpha; & k_{23} &= 0; \\ k_{22} &= \lambda_1 \sin^2 \alpha + \lambda_2 \cos^2 \alpha; & k_{31} &= k_{32} = 0; \\ & & k_{33} &= \lambda_3 \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

С помощью формул (5) ещё раз убеждаемся, что тензор проницаемости в ортогональных расчетных координатах симметричен, а его компоненты k_{ij} удовлетворяют уравнениям (1.3.7), и (1.3.8) для инвариантов I_1, I_2 и I_3 .

П2.2 Тензор проницаемости для среды с круговым цилиндрическим законом распределения ГНА

Рассмотрим теперь закон распределения ГНА, задаваемый координатными поверхностями ортогональной цилиндрической системы

координат: 1) круговыми цилиндрами с общей осью ℓ ; 2) пучком плоскостей с осью ℓ , и 3) семейством параллельных плоскостей, перпендикулярных к оси ℓ .

Ось симметрии ℓ семейства круговых цилиндров зададим как линию пересечения двух ортогональных плоскостей π_1 и π_2 :

$$(\pi_1): \vec{n}_1 \cdot (\vec{R} - \vec{R}_0) = 0, \quad (1)$$

$$(\pi_2): \vec{n}_2 \cdot (\vec{R} - \vec{R}_0) = 0. \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) $\vec{R}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}$ - радиус-вектор некоторой зафиксированной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ оси ℓ , а $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ и $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ - единичные и ортогональные друг к другу вектора нормалей плоскостей π_1 и π_2 :

$$|\vec{n}_1| = |\vec{n}_2| = 1; \quad \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0. \quad (3)$$

Единичный направляющий вектор \vec{n}_3 оси ℓ , очевидно, равен векторному произведению $\vec{n}_3 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Первое ГНА будет задаваться единичным вектором

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{H}_1}{|\vec{H}_1|}, \quad \text{где } \vec{H}_1 = \vec{n}_1 \cdot (\vec{R} - \vec{R}_0, \vec{n}_1) + \vec{n}_2 \cdot (\vec{R} - \vec{R}_0, \vec{n}_2). \quad (4)$$

Второе ГНА будет задаваться вектором

$$\vec{h}_2 = \frac{\vec{H}_2}{|\vec{H}_2|}, \quad \text{где } \vec{H}_2 = \vec{n}_2 \cdot (\vec{R} - \vec{R}_0, \vec{n}_1) - \vec{n}_1 \cdot (\vec{R} - \vec{R}_0, \vec{n}_2). \quad (5)$$

Третье ГНА всюду параллельно оси ℓ и, следовательно,

$$\vec{h}_3 = \vec{n}_3. \quad (6)$$

Поле направлений $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3$, определяемых формулами (4), (5), (6) и будем называть круговым цилиндрическим законом распределения ГНА.

Матрица Π перехода из базиса ГНА $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3$ в базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ расчетной декартовой системы координат в соответствии с формулой (П1.1.11) будет иметь вид:

$$\Pi = \begin{pmatrix} (\bar{h}_1, \bar{i}) & (\bar{h}_1, \bar{j}) & (\bar{h}_1, \bar{k}) \\ (\bar{h}_2, \bar{i}) & (\bar{h}_2, \bar{j}) & (\bar{h}_2, \bar{k}) \\ (\bar{h}_3, \bar{i}) & (\bar{h}_3, \bar{j}) & (\bar{h}_3, \bar{k}) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

После того как матрица (7) будет найдена, тензор проницаемости в декартовых координатах вычислим по формуле (П1.3.6), в которой $K' = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ имеет диагональный вид.

П2.3 Тензор проницаемости для среды со сферическим законом распределения ГНА

Теперь рассмотрим закон распределения ГНА, задаваемый координатными поверхностями ортогональной сферической системы координат, центр которой находится в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Как известно, координатными поверхностями в сферической системе служат: 1) сферы с центром в M_0 ; 2) круговые конусы с вершиной в M_0 и с общей осью ℓ , проходящей через M_0 ; 3) пучок плоскостей с осью пучка ℓ . Вектора нормалей к перечисленным поверхностям в каждой точке $M(x, y, z)$ будут задавать ГНА. Первое из трех главных направлений анизотропии определим по векторам нормалей к сферам с центром в M_0 . Ясно, что этими векторами служат радиус-векторы, выходящие из M_0 . Поэтому единичный вектор \bar{h}_1 первого ГНА будет равен

$$\bar{h}_1 = \frac{\bar{R} - \bar{R}_0}{|\bar{R} - \bar{R}_0|} = \frac{(x-x_0)\bar{i} + (y-y_0)\bar{j} + (z-z_0)\bar{k}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}, \quad (1)$$

где $\bar{R} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ и $\bar{R}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k}$ - радиус-вектора точек M и M_0 в декартовой системе x, y, z .

Для определения двух других ГНА предварительно зададим ось ℓ семейства круговых конусов с вершинной в M_0 . Ось ℓ удобнее всего задать как линию пересечения ортогональных друг к другу плоскостей π_1 и π_2 :

$$(\pi_1): a_1(x-x_0) + b_1(y-y_0) + c_1(z-z_0) = 0; \quad (2)$$

$$(\pi_2): a_2(x-x_0) + b_2(y-y_0) + c_2(z-z_0) = 0. \quad (3)$$

Векторы нормалей $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ и $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ ортогональных плоскостей π_1 и π_2 считаем единичными, поэтому

$$|\vec{n}_1| = |\vec{n}_2| = 1; \quad (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0. \quad (4)$$

Направляющий вектор \vec{n}_3 оси ℓ будет, очевидно, задаваться векторным произведением

$$\vec{n}_3 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2. \quad (5)$$

Второе ГНА \vec{h}_2 в точке $M(x, y, z)$ указывает вектор нормали плоскости π_3 , проходящей через точку M и ось пучка ℓ . Совершенно очевидно, что этот вектор будет перпендикулярен к векторам \vec{n}_3 и $\vec{R} - \vec{R}_0$, которые лежат в названной плоскости. Поэтому

$$\vec{h}_2 = \frac{\vec{n}_3 \times (\vec{R} - \vec{R}_0)}{|\vec{n}_3 \times (\vec{R} - \vec{R}_0)|} = \frac{\vec{n}_2 \cdot (\vec{n}_1, \vec{R} - \vec{R}_0) - \vec{n}_1 \cdot (\vec{n}_2, \vec{R} - \vec{R}_0)}{|\vec{n}_3 \times (\vec{R} - \vec{R}_0)|}. \quad (6)$$

Третье ГНА \vec{h}_3 в точке M задается вектором, перпендикулярным к $\vec{R} - \vec{R}_0$ (т.к. это вектор на образующей кругового конуса) и к \vec{h}_2 (т.к. \vec{h}_3 будет располагаться в плоскости π_3 , у которой вектор нормали \vec{h}_2). Поэтому

$$\vec{h}_3 = \frac{\vec{h}_2 \times (\vec{R} - \vec{R}_0)}{|\vec{h}_2 \times (\vec{R} - \vec{R}_0)|}. \quad \text{Подставляя в последнюю формулу выражение вектора } \vec{h}_2 \text{ и}$$

осуществляя преобразования, окончательно для третьего ГНА \vec{h}_3 получим выражение

$$\vec{h}_3 = \frac{\vec{H}_3}{|\vec{H}_3|}, \quad \text{где } \vec{H}_3 = [\vec{n}_2, \vec{R} - \vec{R}_0] \cdot (\vec{n}_1, \vec{R} - \vec{R}_0) - [\vec{n}_1, \vec{R} - \vec{R}_0] \cdot (\vec{n}_2, \vec{R} - \vec{R}_0). \quad (7)$$

Таким образом, если известен центр $M_0(x_0, y_0, z_0)$ семейства сфер и ось ℓ (задаваемая уравнениями (2) и (3)) круговых конусов с вершинами в точке M_0 , то вектора \vec{h}_1, \vec{h}_2 и \vec{h}_3 , вычисляемые по формулам (1), (6) и (7), зададут в точке $M(x, y, z)$ главные направления анизотропии. Закон распределения ГНА, задаваемый векторами $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3$, назовем сферическим законом.

Для расчета тензора проницаемости среды со сферическим законом распределения ГНА вновь потребуется рассчитать матрицу Π перехода от базиса $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3$ к базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\Pi = \begin{pmatrix} (\vec{h}_1, \vec{i}) & (\vec{h}_1, \vec{j}) & (\vec{h}_1, \vec{k}) \\ (\vec{h}_2, \vec{i}) & (\vec{h}_2, \vec{j}) & (\vec{h}_2, \vec{k}) \\ (\vec{h}_3, \vec{i}) & (\vec{h}_3, \vec{j}) & (\vec{h}_3, \vec{k}) \end{pmatrix} \quad (8)$$

и применить затем формулу (П1.3.6).

П2.4 Тензор проницаемости для сред с цилиндрическими законами распределения ГНА

В качестве следующего закона распределения ГНА рассмотрим тот случай, когда два семейства поверхностей $p(x, y, z) = \text{const}$ и $q(x, y, z) = \text{const}$ представляют собой цилиндрические поверхности, ортогональные друг к другу, а третье семейство поверхностей $r(x, y, z) = \text{const}$, ортогональное к первым двум – семейство параллельных между собой плоскостей, перпендикулярных к образующим цилиндрических поверхностей. Распределения ГНА, определяемые описанной системой триортогональных поверхностей, назовем цилиндрическими законами. В П2.3 рассматривался частный случай цилиндрического закона распределения ГНА – круговой цилиндрический закон. Сейчас рассмотрим общий случай задания цилиндрических законов распределения ГНА.

П2.4.1 Общий случай задания цилиндрических законов распределения ГНА

Пусть относительно некоторой зафиксированной декартовой системы координат (x, y, z) образующие цилиндрических поверхностей $p(x, y, z) = \text{const}$ и $q(x, y, z) = \text{const}$ параллельны заданному вектору $\vec{s} = \{l, m, n\}; |\vec{s}| = 1$ (т.е. $l^2 + m^2 + n^2 = 1$). Семейства направляющих кривых для цилиндрических поверхностей в плоскости xOy зададим как линии уровня функций $p_0 = p_0(x, y)$ и $q_0 = q_0(x, y)$ (рис.69). Если функции $p_0(x, y)$ и $q_0(x, y)$ будут

найденны, то, как известно¹, уравнения самих цилиндрических поверхностей будут определяться как поверхности уровня функций

$$\left. \begin{aligned} p &= p_0 \left(x - \frac{lz}{n}, y - \frac{mz}{n} \right) \\ q &= q_0 \left(x - \frac{lz}{n}, y - \frac{mz}{n} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Первые два ГНА, как следует из (1), будут задаваться векторами

$$\vec{h}_1 = \frac{\nabla p}{|\nabla p|} \text{ и } \vec{h}_2 = \frac{\nabla q}{|\nabla q|}, \text{ где } \nabla p = \frac{\partial p_0}{\partial u} \vec{i} + \frac{\partial p_0}{\partial v} \vec{j} - \left(\frac{\partial p_0}{\partial u} \cdot \frac{l}{n} + \frac{\partial p_0}{\partial v} \cdot \frac{m}{n} \right) \vec{k}; \quad (2)$$

$$\nabla q = \frac{\partial q_0}{\partial u} \vec{i} + \frac{\partial q_0}{\partial v} \vec{j} - \left(\frac{\partial q_0}{\partial u} \cdot \frac{l}{n} + \frac{\partial q_0}{\partial v} \cdot \frac{m}{n} \right) \vec{k}; \quad (3)$$

$$u = x - \frac{lz}{n}, \quad v = y - \frac{mz}{n}. \quad (4)$$

Для того чтобы векторы \vec{h}_1 и \vec{h}_2 удовлетворяли условию ортогональности, потребуем выполнение равенства $(\nabla p, \nabla q) = 0$. В развернутой форме записи

оно принимает вид $\frac{\partial p_0}{\partial u} \cdot \frac{\partial q_0}{\partial u} + \frac{\partial p_0}{\partial v} \cdot \frac{\partial q_0}{\partial v} + \left(\frac{\partial p_0}{\partial u} \cdot \frac{l}{n} + \frac{\partial p_0}{\partial v} \cdot \frac{m}{n} \right) \left(\frac{\partial q_0}{\partial u} \cdot \frac{l}{n} + \frac{\partial q_0}{\partial v} \cdot \frac{m}{n} \right) = 0$, или,

что одно и то же, $\left[\frac{\partial p_0}{\partial u} \left(1 + \frac{l^2}{n^2} \right) + \frac{lm}{n^2} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial v} \right] \frac{\partial q_0}{\partial u} + \left[\frac{\partial p_0}{\partial u} \cdot \frac{lm}{n^2} + \left(1 + \frac{m^2}{n^2} \right) \frac{\partial p_0}{\partial v} \right] \frac{\partial q_0}{\partial v} = 0$. Если

последнее равенство переписать в виде пропорции

$$\frac{\frac{\partial p_0}{\partial u} \left(1 + \frac{l^2}{n^2} \right) + \frac{lm}{n^2} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial v}}{\frac{\partial q_0}{\partial v}} = - \frac{\frac{\partial p_0}{\partial u} \cdot \frac{lm}{n^2} + \left(1 + \frac{m^2}{n^2} \right) \frac{\partial p_0}{\partial v}}{\frac{\partial q_0}{\partial u}} = H(u, v), \text{ и общее частное двух}$$

дробей обозначить как некоторую безразмерную непрерывную не равную нулю функцию $H(u, v)$, то относительно функций $p_0(u, v)$ и $q_0(u, v)$ получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{l^2}{n^2} \right) \frac{\partial p_0}{\partial u} + \frac{lm}{n^2} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial v} &= H(u, v) \frac{\partial q_0}{\partial v}; \\ \frac{lm}{n^2} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial u} + \left(1 + \frac{m^2}{n^2} \right) \frac{\partial p_0}{\partial v} &= -H(u, v) \cdot \frac{\partial q_0}{\partial u} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

¹ Сборник задач по математике для втузов. 1 том. /Под ред. Ефимова А.В. и Демидовича Б.П./- М., Наука, 1981.

В соответствии с формулами (4) промежуточные переменные u и v при $z = 0$ равны соответственно x и y . Поэтому система уравнений (5) определяет уравнения $p_0 = p_0(x, y)$ и $q_0 = q_0(x, y)$ семейств направляющих (в плоскости xOy) кривых для рассматриваемых цилиндрических поверхностей:

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{l^2}{n^2}\right) \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{lm}{n^2} \frac{\partial p_0}{\partial y} &= H(x, y) \cdot \frac{\partial q_0}{\partial y}; \\ \frac{lm}{n^2} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \left(1 + \frac{m^2}{n^2}\right) \frac{\partial p_0}{\partial y} &= -H(x, y) \cdot \frac{\partial q_0}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

С помощью любого частного решения $p_0 = p_0(x, y), q_0 = q_0(x, y)$ системы уравнений (5'), по формулам (1) будут задаваться ортогональные друг к другу семейства цилиндрических поверхностей $p(x, y, z) = const$ и $q(x, y, z) = const$, образующие которых параллельны вектору $\vec{s} = \{l, m, n\}$. Третье семейство поверхностей, ортогональное цилиндрическим поверхностям, как уже сказано, представляет собой семейство параллельных между собой плоскостей $r(x, y, z) = const$, где

$$r(x, y, z) = (\vec{R}, \vec{s}) = lx + my + nz. \quad (6)$$

Для того чтобы вычислить компоненты тензора проницаемости пористой среды с рассматриваемыми законами распределения ГНА требуется предварительно вычислить координаты векторов $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3$, задающих поле ГНА. Эти векторы направлены по градиентам функций $p(x, y, z), q(x, y, z)$ и $r(x, y, z)$ соответственно. С учетом формул (2), (3), (5') и (6) получаем:

$$\vec{h}_1 = \frac{\nabla p}{|\nabla p|} = \frac{1}{\sqrt{D_1}} [np_{0x} \vec{i} + np_{0y} \vec{j} - (lp_{0x} + mp_{0y}) \vec{k}]; \quad (7)$$

$$\vec{h}_2 = \frac{\nabla q}{|\nabla q|} = \frac{1}{\sqrt{D_2}} [nq_{0x} \vec{i} + nq_{0y} \vec{j} - (lq_{0x} + mq_{0y}) \vec{k}]; \quad (8)$$

$$\vec{h}_3 = \frac{\nabla r}{|\nabla r|} = \vec{s} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}, \quad (9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= (l^2 + n^2)p_{0x}^2 + 2lmp_{0x}p_{0y} + (m^2 + n^2)p_{0y}^2, \\ D_2 &= (l^2 + n^2)q_{0x}^2 + 2lmq_{0x}q_{0y} + (m^2 + n^2)q_{0y}^2, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

а через p_{0x} обозначено $p_{0x} = \frac{\partial p_0}{\partial x}$ и т.д. С учетом того, что функции $p_0(x, y)$ и $q_0(x, y)$ связаны друг с другом системой уравнений (5'), между коэффициентами D_1 и D_2 есть взаимозависимость, выражаемая, как легко проверить, формулой

$$D_2 = \frac{D_1}{n^2 \cdot H^2(x, y)}. \quad (11)$$

Далее, для расчета тензора проницаемости в декартовых координатах, вычисляем матрицу перехода от базиса ГНА к базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Эта матрица Π имеет вид (П1.1.11). С помощью формул (7), (8) и (9) найдем, что

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{np_{0x}}{\sqrt{D_1}}; & \frac{np_{0y}}{\sqrt{D_1}}; & -\frac{lp_{0x} + mp_{0y}}{\sqrt{D_1}} \\ \frac{nq_{0x}}{\sqrt{D_2}}; & \frac{nq_{0y}}{\sqrt{D_2}}; & -\frac{lq_{0x} + mq_{0y}}{\sqrt{D_2}} \\ l; & m; & n \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Наконец, по формуле (П1.3.6), в которой K' имеет диагональный вид, а Π подставляем из (12), получим:

$$\left. \begin{aligned} k_{11} &= \frac{\lambda_1 n^2 p_{0x}^2}{D_1} + \frac{\lambda_2 n^2 q_{0x}^2}{D_2} + \lambda_3 l^2 \\ k_{12} = k_{21} &= \frac{\lambda_1 n^2 p_{0x} p_{0y}}{D_1} + \frac{\lambda_2 n^2 q_{0x} q_{0y}}{D_2} + \lambda_3 lm \\ k_{13} = k_{31} &= -\frac{\lambda_1 n p_{0x} (lp_{0x} + mp_{0y})}{D_1} - \frac{\lambda_2 n q_{0x} (lq_{0x} + mq_{0y})}{D_2} + \lambda_3 l \cdot n \\ k_{22} &= \frac{\lambda_1 n^2 p_{0y}^2}{D_1} + \frac{\lambda_2 n^2 q_{0y}^2}{D_2} + \lambda_3 m^2 \\ k_{23} = k_{32} &= -\frac{\lambda_1 n p_{0y} (lp_{0x} + mp_{0y})}{D_1} - \frac{\lambda_2 n q_{0y} (lq_{0x} + mq_{0y})}{D_2} + \lambda_3 mn \\ k_{33} &= \frac{\lambda_1 (lp_{0x} + mp_{0y})^2}{D_1} + \frac{\lambda_2 (lq_{0x} + mq_{0y})^2}{D_2} + \lambda_3 n^2 \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

Формулы (13), с учетом системы уравнений (5') и формулы (11), можно переписать в виде, содержащем лишь одну из функций $p_0(x, y)$ (или $q_0(x, y)$). В частности, исключив с помощью (5') функцию $q_0(x, y)$, для компонент тензора проницаемости в средах с цилиндрическими законами распределения ГНА получим выражения:

$$\left. \begin{aligned}
k_{11} &= \frac{1}{D_1} [\lambda_1 n^2 p_{0x}^2 + \lambda_2 a^2] + \lambda_3 l^2; \\
k_{12} = k_{21} &= \frac{1}{D_1} [\lambda_1 n^2 p_{0x} p_{0y} - \lambda_2 ab] + \lambda_3 lm; \\
k_{13} = k_{31} &= \frac{1}{D_1} [-\lambda_1 n p_{0x} (l p_{0x} + m p_{0y}) + \lambda_2 n (m p_{0x} - l p_{0y}) a] + \lambda_3 l \cdot n; \\
k_{22} &= \frac{1}{D_1} [\lambda_1 n^2 p_{0y}^2 + \lambda_2 b^2] + \lambda_3 m^2; \\
k_{23} = k_{32} &= \frac{1}{D_1} [-\lambda_1 n p_{0y} (l p_{0x} + m p_{0y}) + \lambda_2 n b (l p_{0y} - m p_{0x})] + \lambda_3 mn; \\
k_{33} &= \frac{1}{D_1} [\lambda_1 (l p_{0x} + m p_{0y})^2 + \lambda_2 n^2 (l p_{0y} - m p_{0x})^2] + \lambda_3 n^2.
\end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где ради краткости записи обозначено:

$$\begin{aligned}
a &= l m p_{0x} + (n^2 + m^2) p_{0y}; \\
b &= (l^2 + n^2) p_{0x} + l m p_{0y}.
\end{aligned}$$

Из рассмотренных законов распределения ГНА выделим важный частный случай, когда образующие цилиндрических поверхностей $p = const$ и $q = const$ параллельны одной из координатных осей (к примеру, оси Oz).

П2.4.2 Случай совпадения одного из ГНА цилиндрических законов с координатной осью (осью Oz)

Итак, пусть семейства двух взаимно ортогональных цилиндрических поверхностей имеют образующие, параллельные оси Oz . В этом случае цилиндрические поверхности, как хорошо известно, задаются уравнениями вида $p(x, y) = const$ и $q(x, y) = const$. Направляющий же вектор \vec{s} образующих этих поверхностей совпадет с ортом оси Oz и, поэтому, $\vec{s} = \vec{k} = (0, 0, 1)$. Система уравнений (5') с указанным вектором \vec{s} для функций $p(x, y)$ и $q(x, y)$ в декартовых координатах примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = H(x, y) \cdot \frac{\partial q}{\partial y}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -H(x, y) \cdot \frac{\partial q}{\partial x}, \quad (15)$$

в которой $H(x, y)$ - непрерывная положительная в области, занятой анизотропной средой, функция. В качестве расчетной системы выберем некоторую ортогональную криволинейную систему координат (ξ, η, z) , связанную с декартовыми равенствами $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, $z = z$. Так как ξ

и η считаются ортогональными, то $(\nabla\xi, \nabla\eta) = 0$. Переходя в (15) к новым переменным ξ и η , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \xi} &= \frac{H(\xi, \eta)}{\Delta} \cdot (\nabla\eta, \nabla\eta) \frac{\partial q}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} &= -\frac{H(\xi, \eta)}{\Delta} \cdot (\nabla\xi, \nabla\xi) \frac{\partial q}{\partial \xi} \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}. \quad (17)$$

С целью упрощения записи системы уравнений (16) отметим, что скалярные

квадраты векторов $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \eta}$ равны следующим выражениям:

$$\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi} \right)^2 = E(\xi, \eta) = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 = \frac{1}{\Delta^2} \cdot (\nabla\eta, \nabla\eta); \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \eta} \right)^2 = G(\xi, \eta) = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 = \frac{1}{\Delta^2} \cdot (\nabla\xi, \nabla\xi). \quad (19)$$

Коэффициенты $E(\xi, \eta)$ и $G(\xi, \eta)$ являются, как известно, коэффициентами 1-ой квадратичной формы, поскольку $ds^2 = (d\vec{R}, d\vec{R}) = Ed\xi^2 + Gd\eta^2$. Пользуясь произволом в выборе положительной непрерывной функции $H(\xi, \eta)$, обозначим её в виде $H(\xi, \eta) = \frac{H_0(\xi, \eta)}{\Delta \cdot \sqrt{EG}}$. Тогда система уравнений (16), с учетом

формул (18) и (19), примет следующий окончательный вид

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{H(\xi, \eta)}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial q}{\partial \eta}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} = -\frac{H(\xi, \eta)}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial q}{\partial \xi}. \quad (20)$$

(Индекс «0» у $H(\xi, \eta)$ в силу произвола в её выборе опущен). Всевозможные частные решения системы (20) с любыми положительными непрерывными функциями $H(\xi, \eta)$ определяют ортогональную сеть направляющих $p(\xi, \eta) = const$ и $q(\xi, \eta) = const$, с помощью которой задаются цилиндрические законы распределения ГНА в системе координат (ξ, η, z) .

Вычислим компоненты тензора проницаемости для всех рассматриваемых законов распределения ГНА в ортогональной системе координат (ξ, η, z) . С этой целью предварительно найдем разложения векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ и $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3$. Имеем:

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{j} \right); \quad (21)$$

$$\bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{j} \right); \quad (22)$$

$$\bar{e}_3 = \frac{\partial \bar{R}}{\partial z} = \bar{k}; \quad (23)$$

$$\bar{h}_1 = \frac{\nabla p}{|\nabla p|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial p}{\partial \xi} \bar{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} \bar{e}_2}{\sqrt{\frac{1}{E} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{G} \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^2}}; \quad (24)$$

с учетом системы уравнений (20):

$$\bar{h}_2 = \frac{\nabla q}{|\nabla q|} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} \bar{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial p}{\partial \xi} \bar{e}_2}{\sqrt{\frac{1}{E} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{G} \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^2}}; \quad (25)$$

$$\bar{h}_3 = \bar{e}_3 = \bar{k}. \quad (26)$$

Теперь по формулам (П1.1.11) и (П1.3.6) для компонент тензора проницаемости в координатах (ξ, η, z) находим следующие значения:

$$\left. \begin{aligned}
 k_{11} &= \frac{G \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)^2 \lambda_1 + E \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^2 \lambda_2}{G \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)^2 + E \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^2}; \\
 k_{12} = k_{21} &= \frac{\sqrt{EG} \cdot \frac{\partial p}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)}{G \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)^2 + E \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^2}; \\
 k_{22} &= \frac{E \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^2 \lambda_1 + G \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)^2 \lambda_2}{G \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)^2 + E \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^2}; \\
 k_{13} = k_{31} = k_{23} = k_{32} &= 0; \quad k_{33} = \lambda_3.
 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

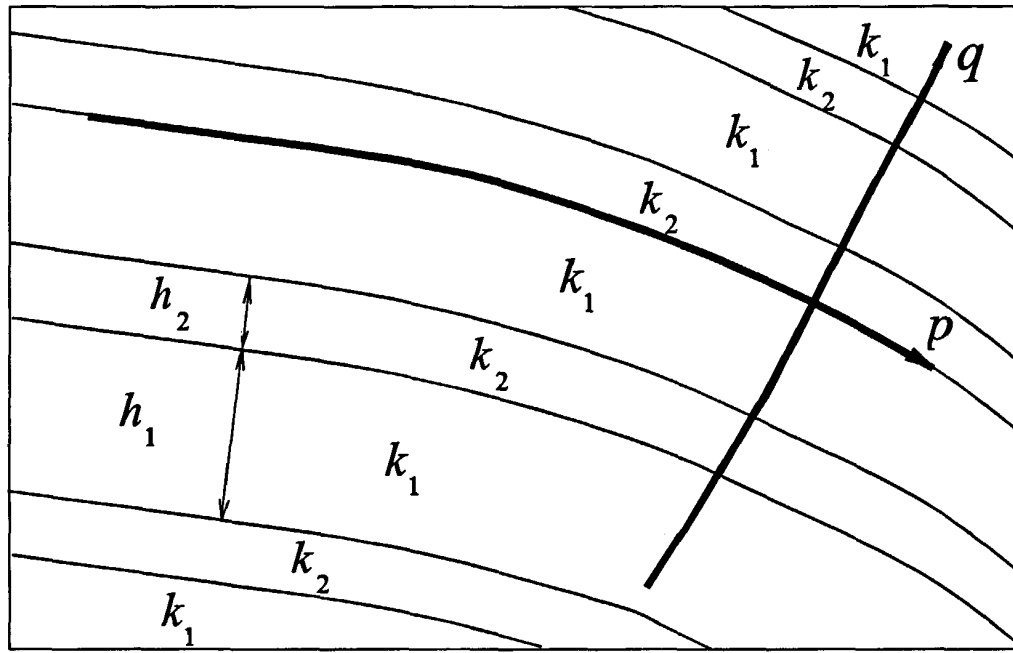


Рис. 1. Пример пористой среды с периодической структурой (многослойная слоистая среда – МС-среда)

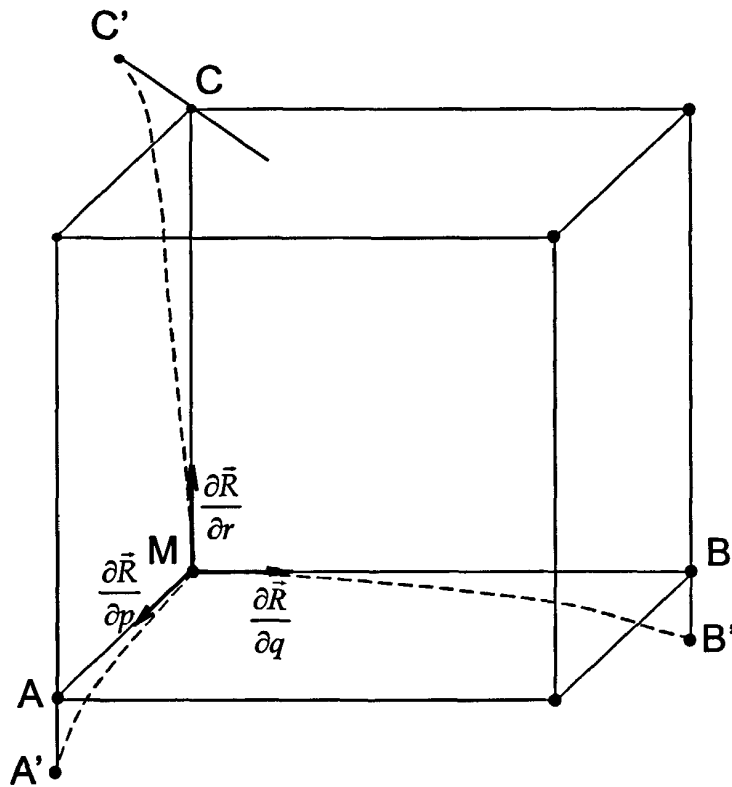


Рис. 2. Элементарный объём усреднения ω . Длина дуги $|MA'| = \ell_p$; $|MB'| = \ell_q$; $|MC'| = \ell_r$. Прямые MA, MB, MC – оси локальной декартовой системы координат $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$.

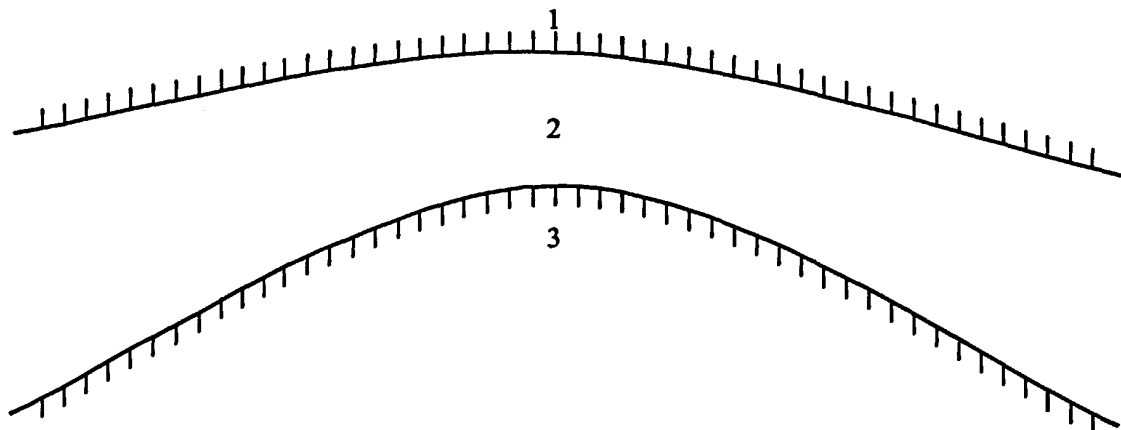


Рис. 3. Типовая схема разреза продуктивного пласта. 1 - непроницаемая кровля пласта (координатная поверхность $\zeta_2 = \text{const}$); 2 - продуктивный пласт; 3 - непроницаемая подошва пласта (координатная поверхность $\zeta_1 = \text{const}$).

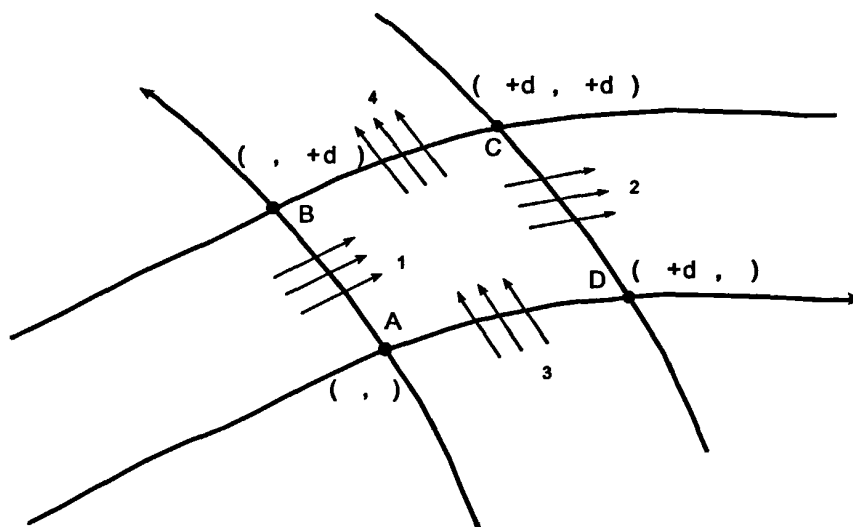


Рис. 4. Сечение ABCD элементарного криволинейного параллелепипеда поверхностью $\zeta = \text{const}$. Основания параллелепипеда расположены на непроницаемых подошве ($\zeta = \zeta_1$) и кровле ($\zeta = \zeta_2$) слоя. Вдоль AD $\eta = \text{const}$; вдоль BC $\eta + d\eta = \text{const}$; вдоль AB $\xi = \text{const}$; вдоль CD $\xi + d\xi = \text{const}$.

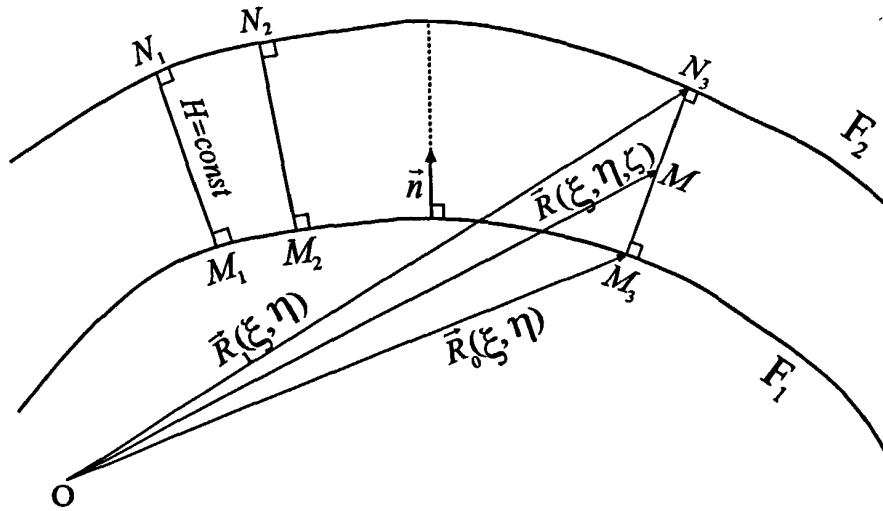


Рис. 5. Криволинейный слой постоянной толщины, $M_1N_1 = M_2N_2 = \dots = H = \text{const}$ - толщина криволинейного слоя

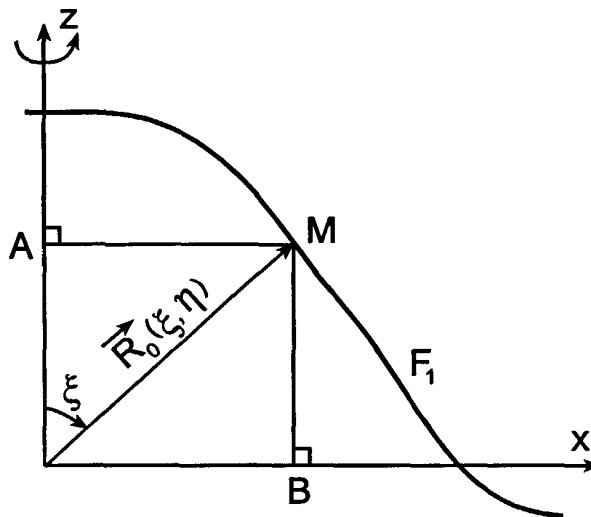


Рис 6. $|AM| = r(\xi)$; $|BM| = z(\xi)$; ξ - угол между \vec{R}_0 и положительным направлением оси z , η - угол между векторной проекцией \vec{R}_0 на плоскость xOy и положительным направлением оси x .

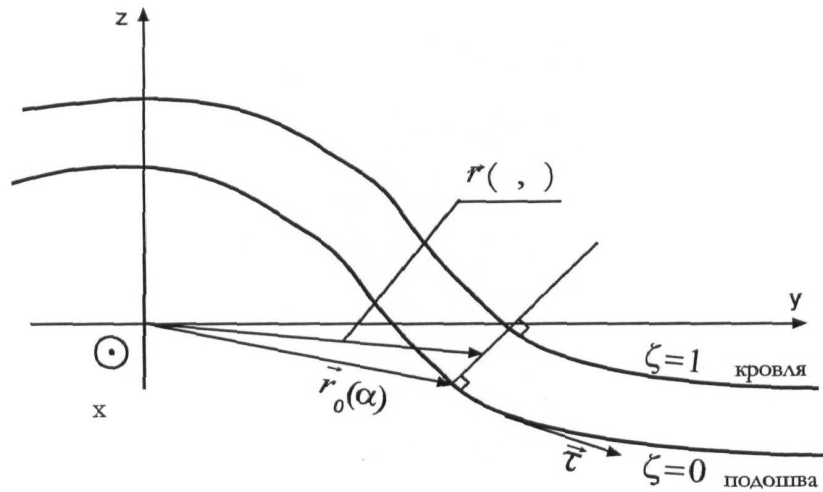


Рис. 7. Сечение цилиндрического слоя постоянной толщины.

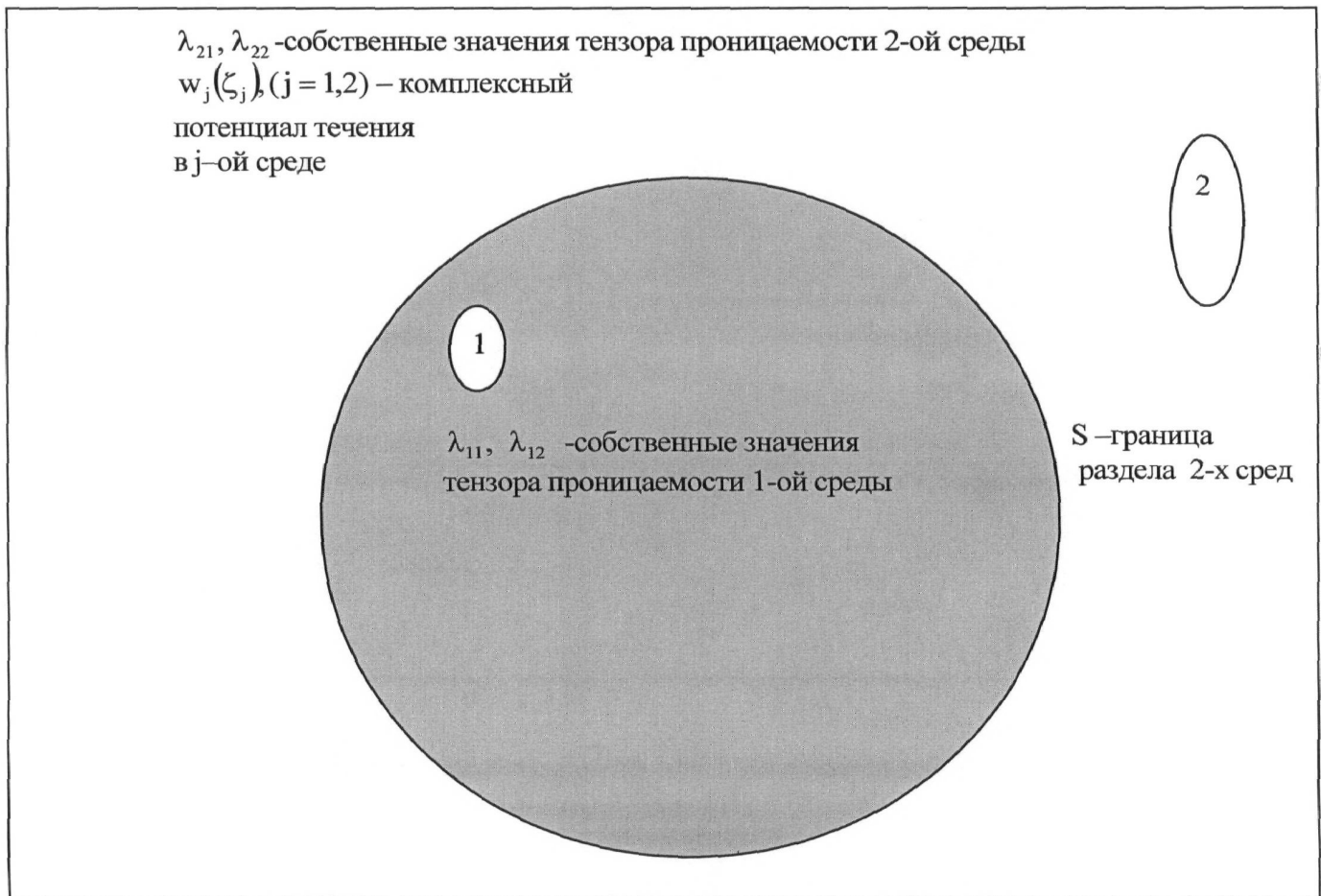


Рис. 8. Две кусочно-однородных анизотропных среды. S – криволинейная граница раздела сред.

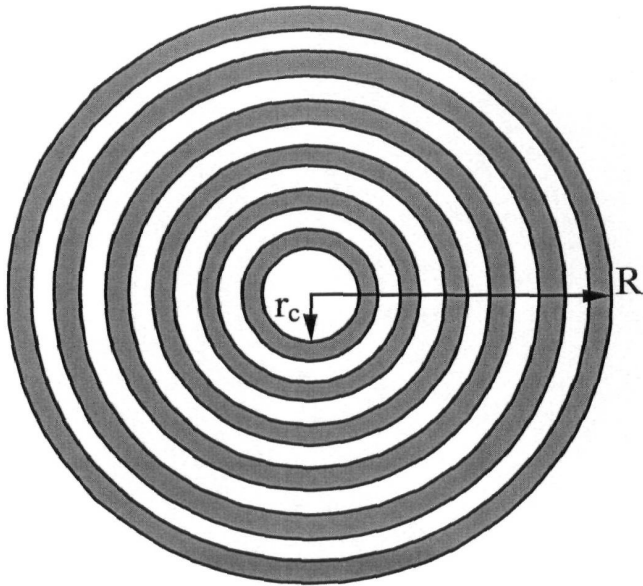


Рис.9. Случай $\alpha = 0$

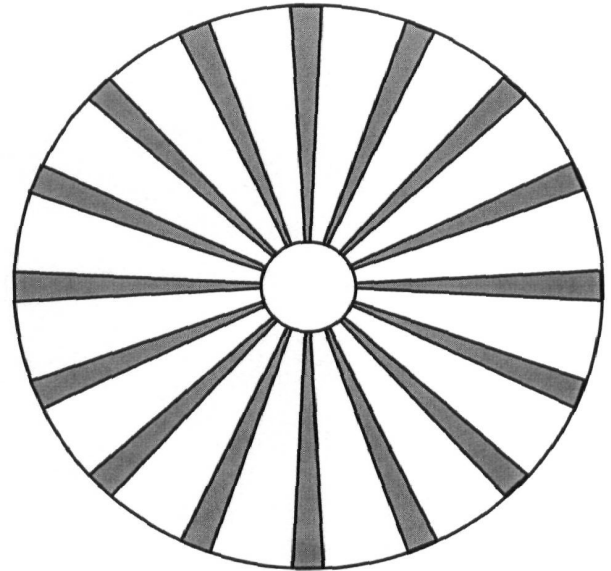


Рис.10. Случай $\beta = 0$

Рис. 9 и 10 Частные случаи центральных законов распределения ГНА – радиальные законы распределения ГНА.

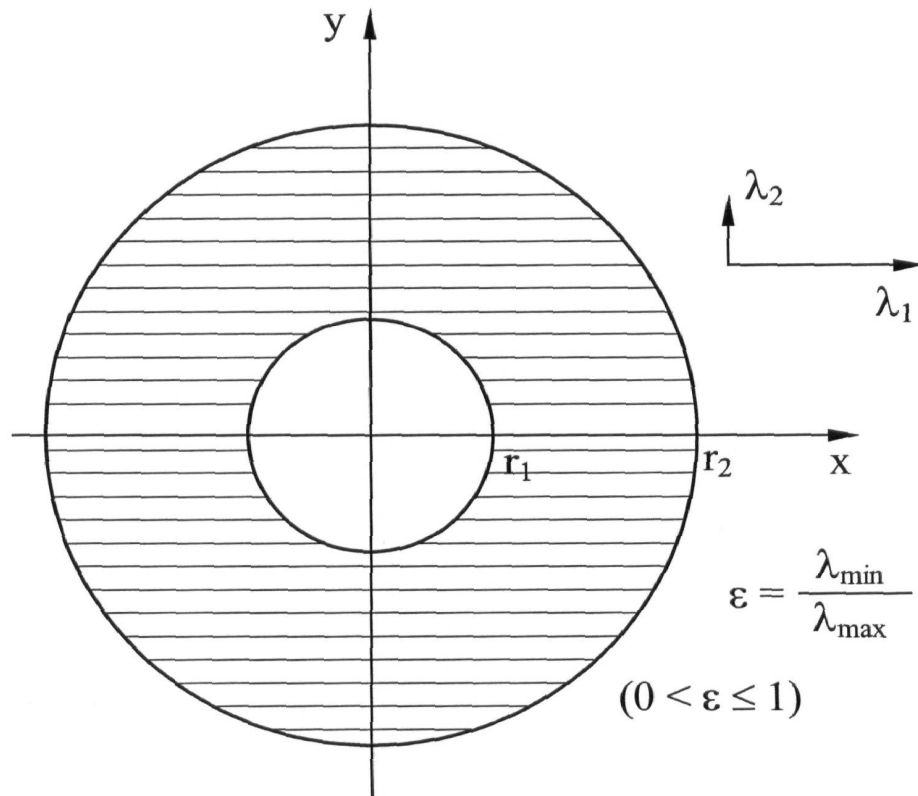


Рис.11. Центральная круговая скважина в среде с прямолинейной анизотропией. (Радиус скважины $r_c = r_1$, радиус контура питания $R_{\Pi} = r_2$).

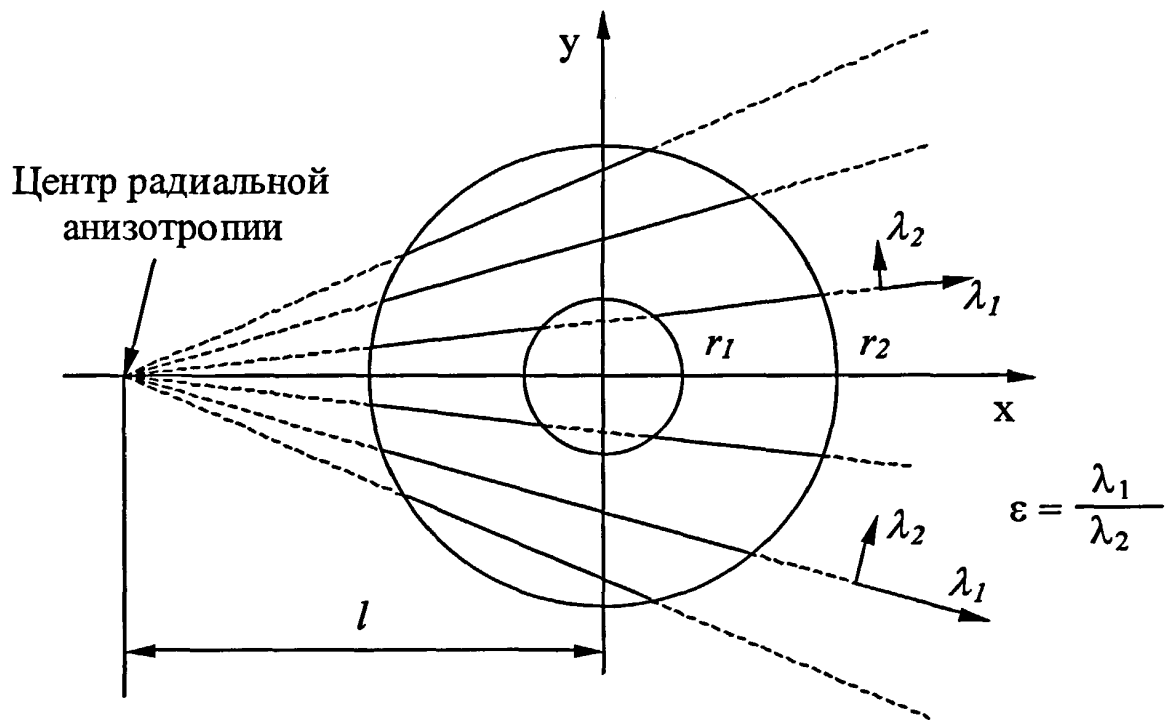


Рис.12 Центральная круговая скважина в среде с радиальной анизотропией. (Радиус скважины $r_c = r_1$, радиус контура питания $R_{\Pi} = r_2$).

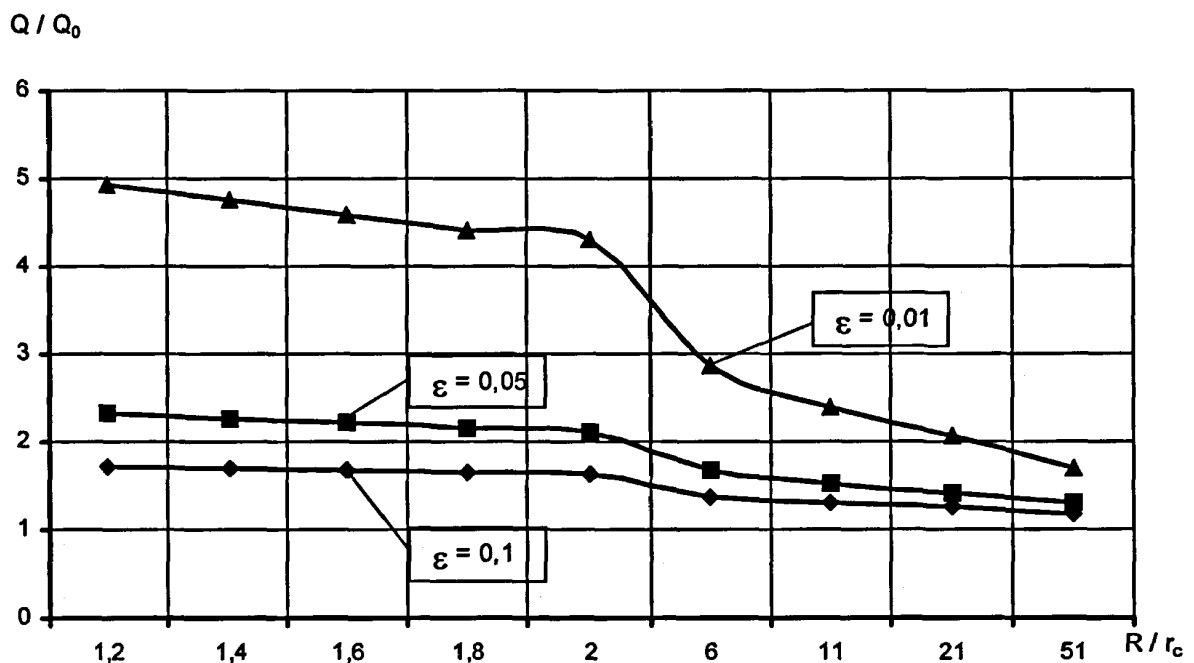


Рис.13 Результаты численного расчёта дебита Q/Q_0 центральной круговой скважины в среде с прямолинейной анизотропией

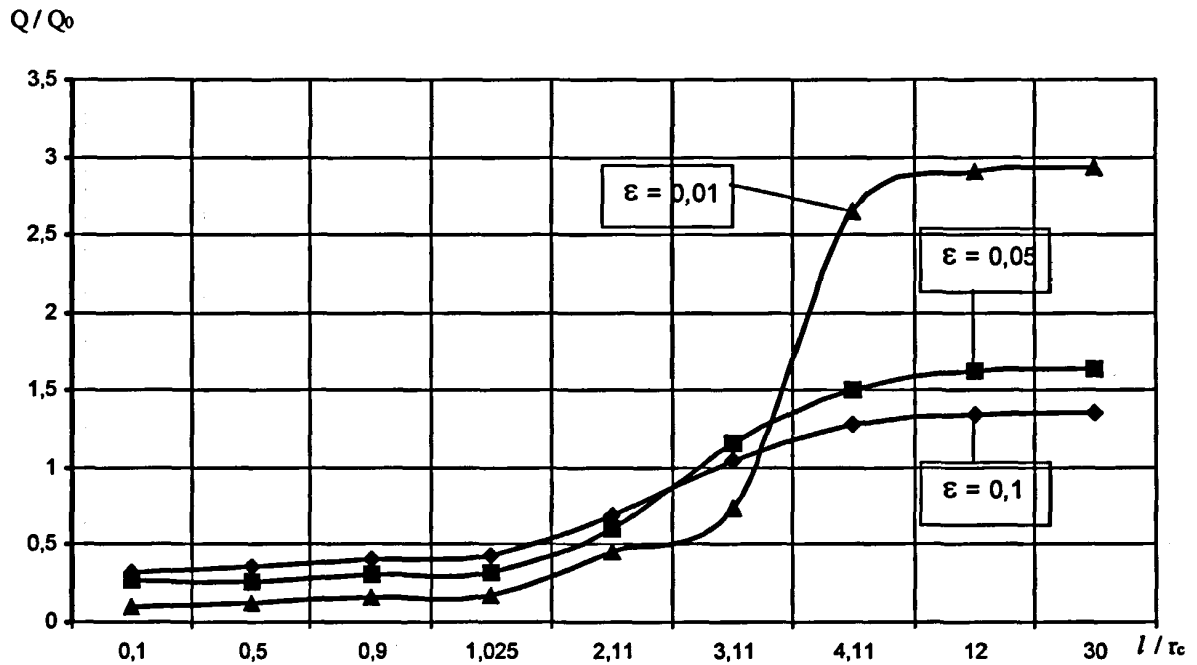


Рис.14 Результаты численного расчёта дебита Q/Q_0 центральной круговой скважины в среде с радиальной анизотропией для $\epsilon < 1$ и $r_2/r_1 = 6$.

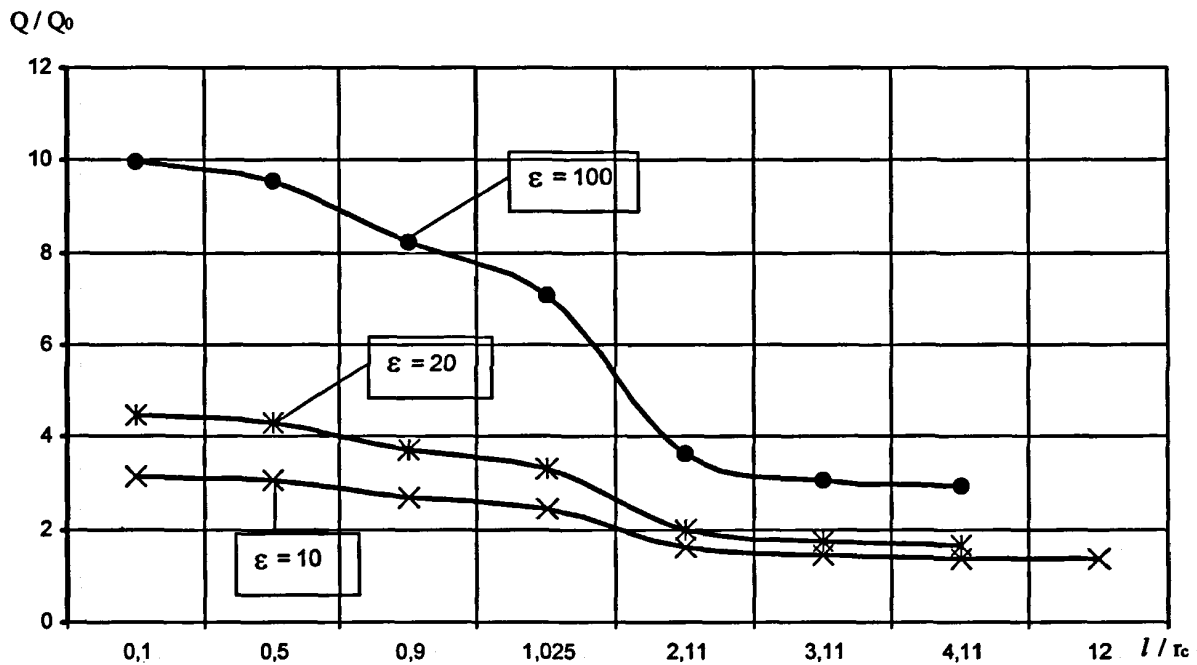


Рис.15 Результаты численного расчёта дебита Q/Q_0 центральной круговой скважины в среде с радиальной анизотропией для $\epsilon > 1$ и $r_2/r_1 = 6$.

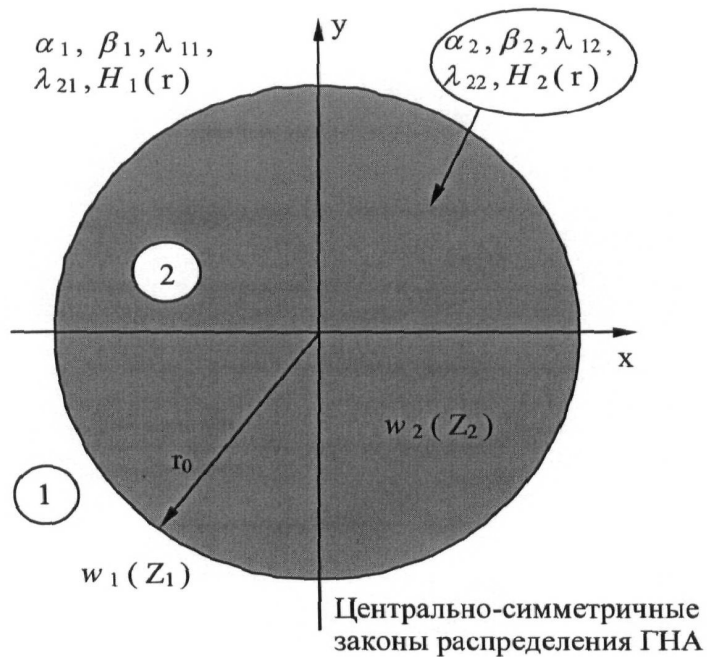


Рис.16 Две кусочно-однородные пористые среды с центрально-симметричными законами распределения ГНА и с круговой границей раздела друг от друга.

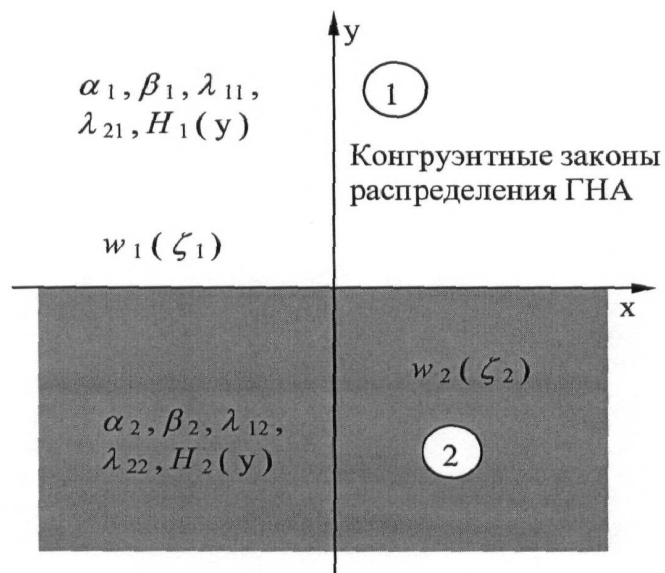


Рис.17 Две кусочно-однородные пористые среды с конгруэнтными законами распределения ГНА и с прямолинейной границей раздела друг от друга.

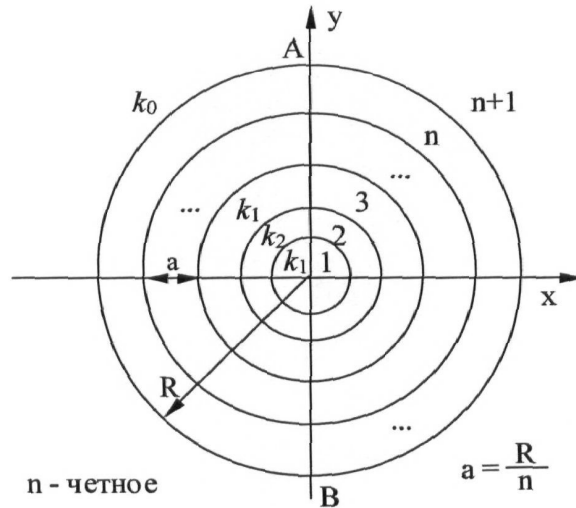


Рис.18 Круглое слоистое включение из чередующихся изотропных слоёв с проницаемостями k_1 и k_2 , помещённое в изотропной среде с проницаемостью k_0 .

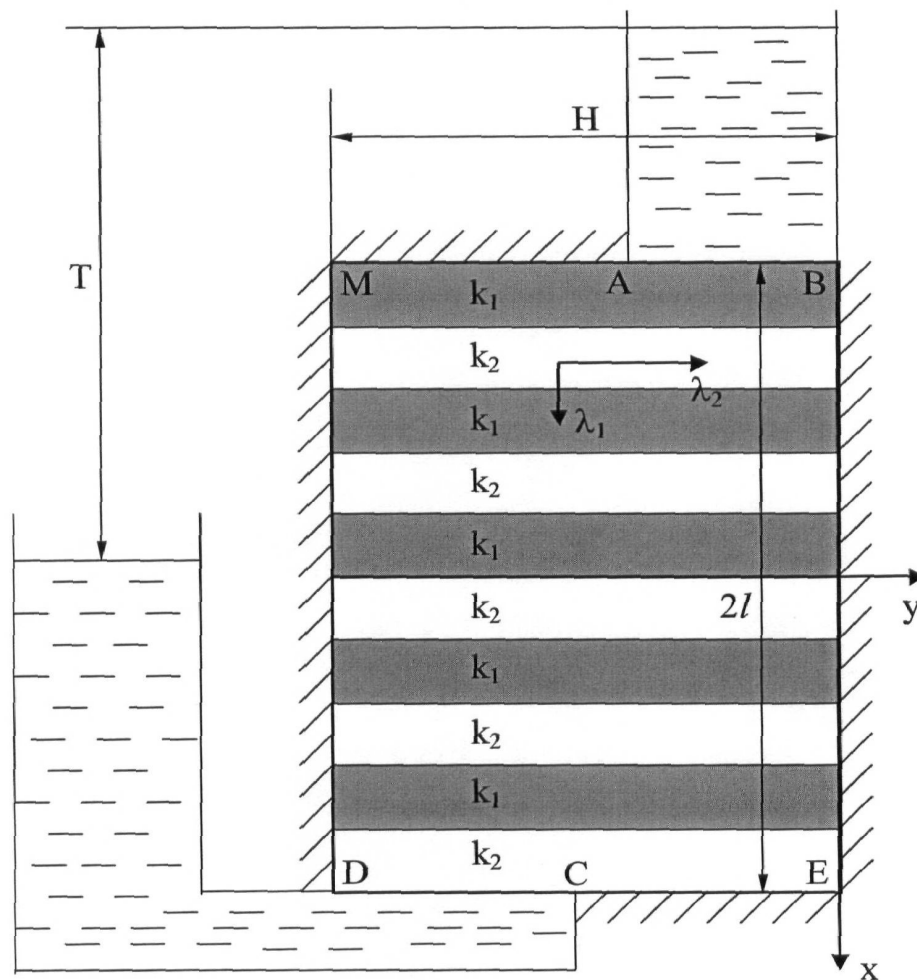


Рис.19 Исследование точности расчёта фильтрационных течений в слоистых средах методом однородно-анизотропного эквивалентирования (на примере сравнения полных фильтрационных потоков в слоистой и анизотропной средах)

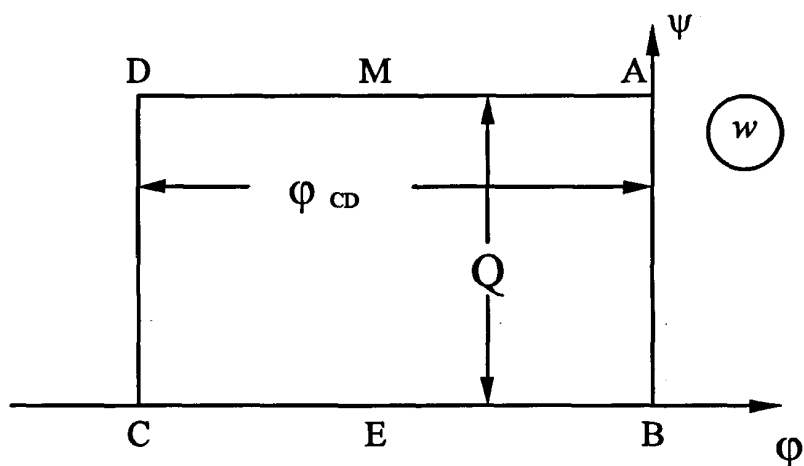


Рис.20 Область значений комплексного потенциала течения жидкости в среде с прямолинейной анизотропией, моделирующей слоистую прямоугольную область на рис.19.

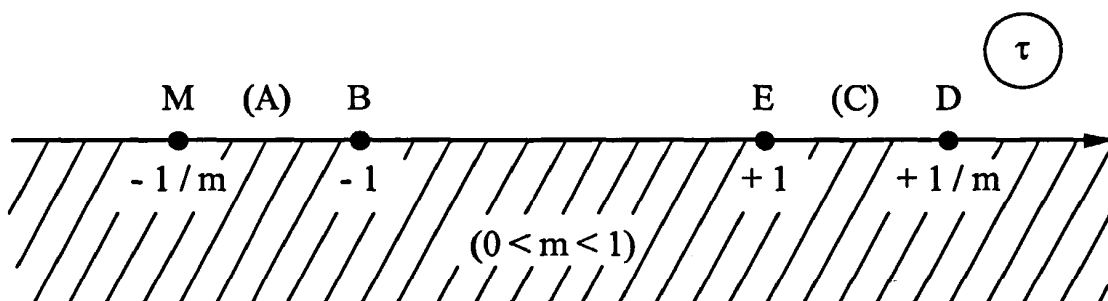


Рис.21 К конформному отображению нижней полуплоскости комплексного переменного τ на прямоугольник MBED (рис.19).

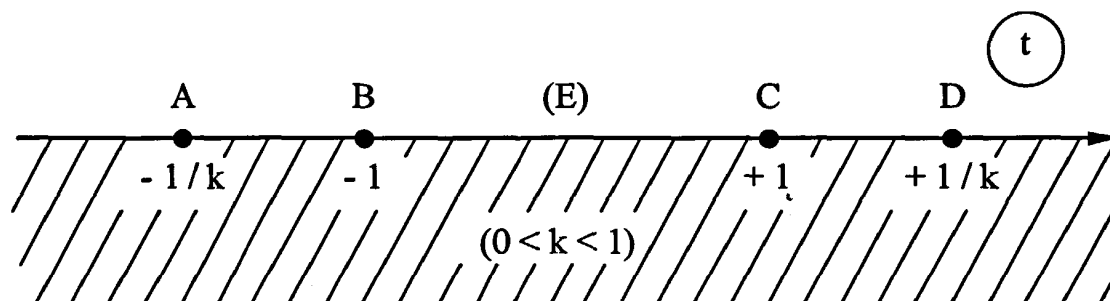


Рис.22 К конформному отображению нижней полуплоскости комплексного переменного τ на нижнюю полуплоскость комплексного переменного t . Затем нижняя полуплоскость t конформно отображается на внутренность прямоугольника CDAB (рис.20).

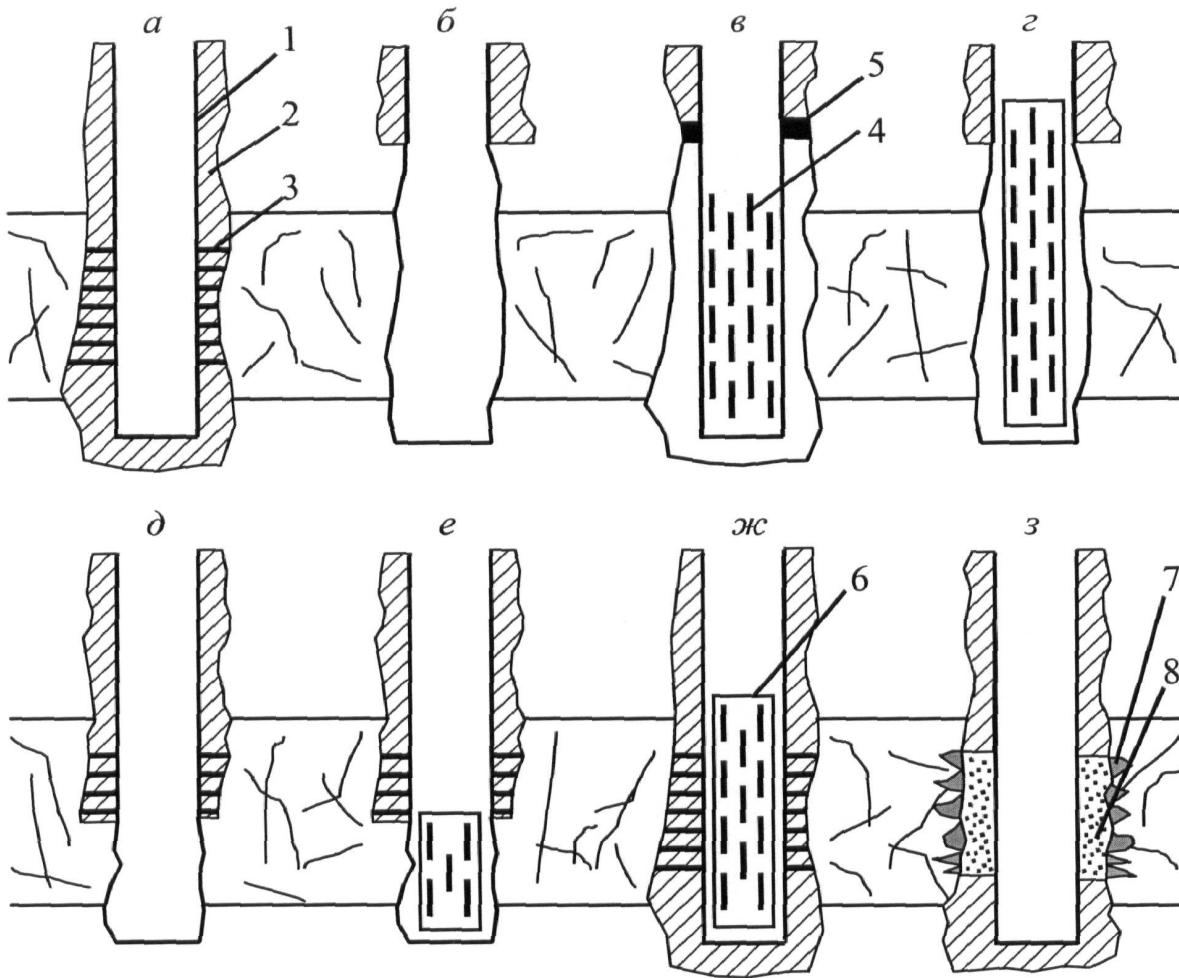


Рис. 23. Типы конструкций забоев скважин

1 – эксплуатационная колонна, 2 – цементное кольцо, 3 – перфорационные отверстия, 4 – перфорированный (на поверхности) фильтр, 5 – пакер, 6 – забойный фильтр, 7 – зона разрушения в слабоцементированном пласте, 8 – проницаемый тампоражный материал /Ю.М.Басарыгин и др. *Заканчивание скважин*/

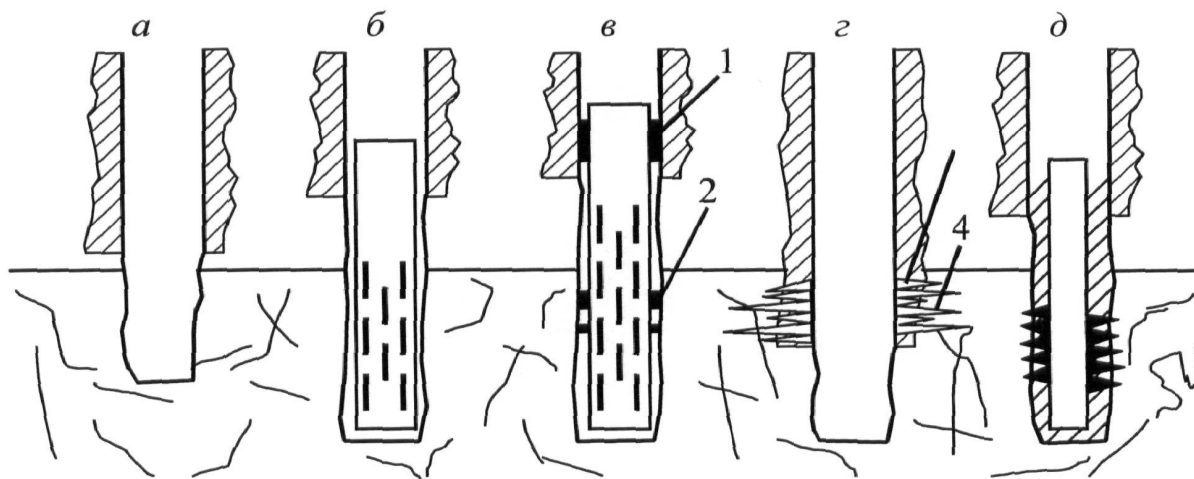


Рис.24. Виды конструкций забоев верхнемеловых скважин месторождения Мурадханлы (Азербайджан) /Ю.М.Басарыгин и др. *Заканчивание скважин*/

Рис.25 Расчёт дебита нефтедобывающей скважины по критериям Щелкачёва, Миллионщикова и Котяхова (Диаграмма №1)

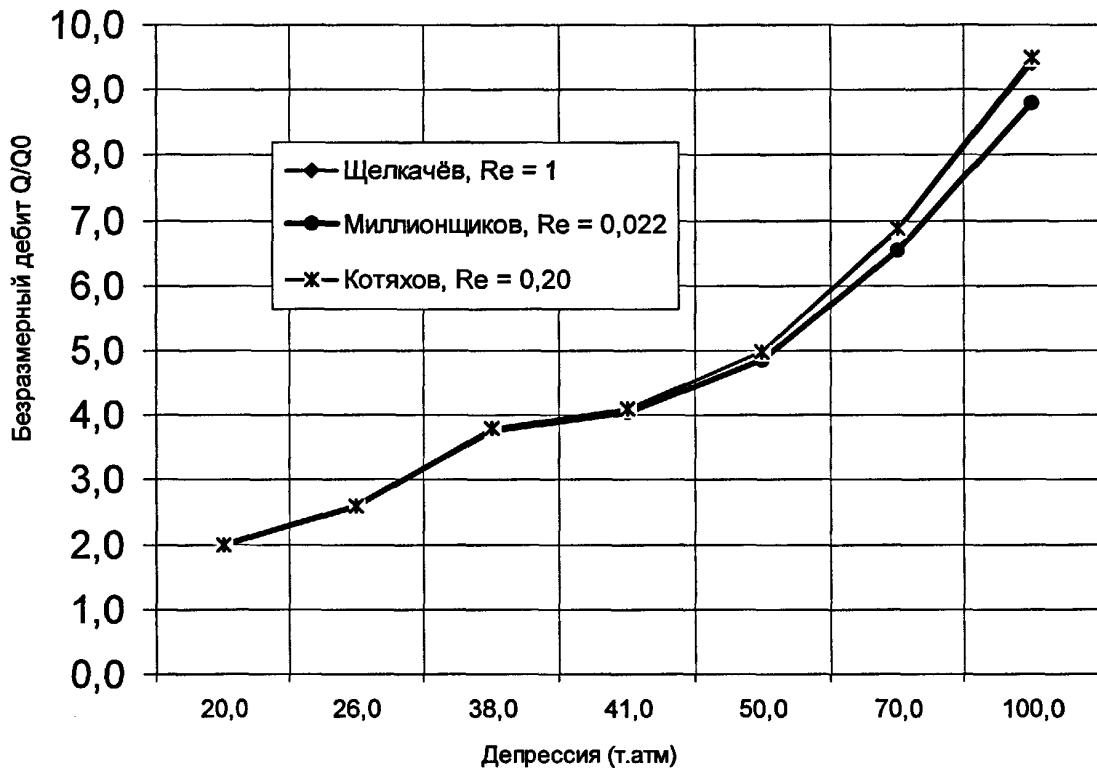


Рис.26 Неустраняемая относительная погрешность (%) в расчёте дебита нефтедобывающей скважины (Диаграмма №2).

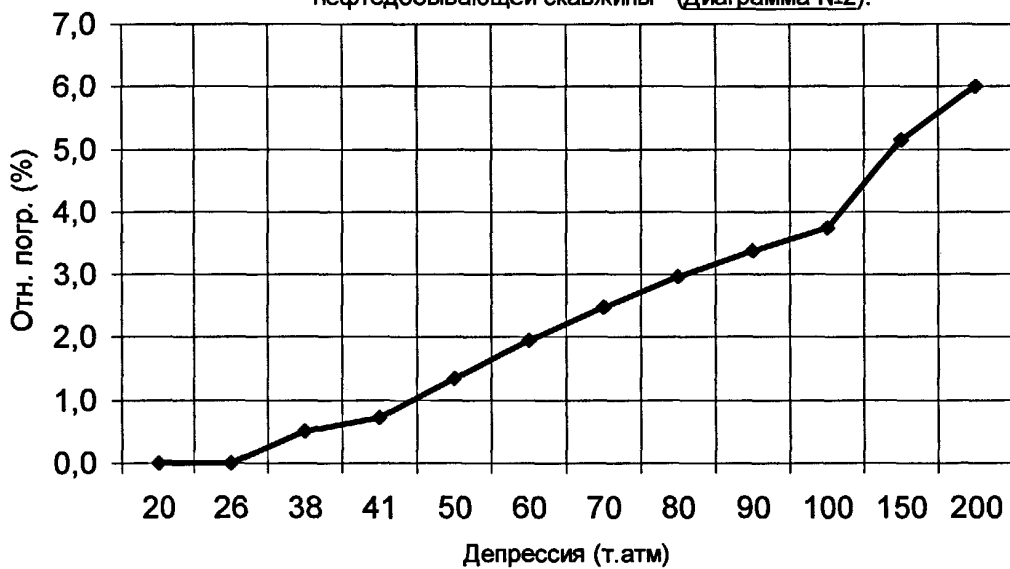


Рис. 27 Погрешности в расчёте дебита нефтедобывающей скважины в случае пренебрежения ПЗС и применения закона Дарси (Диаграмма №3)

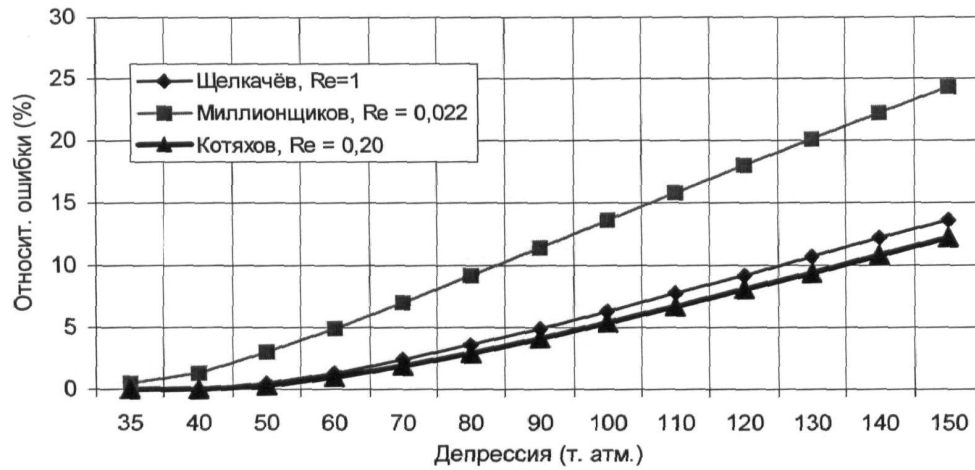


Рис. 28 Радиус призабойной зоны нефтедобывающей скважины (Диаграмма №4)

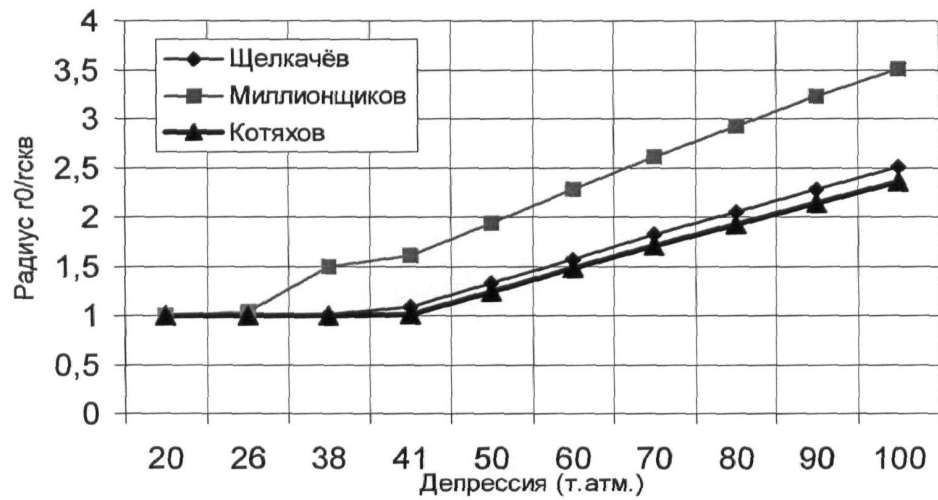


Рис. 29 Расчёт дебита газодобывающей скважины по критериям Щелкачёва, Миллионщикова и Котяхова (Диаграмма №5)

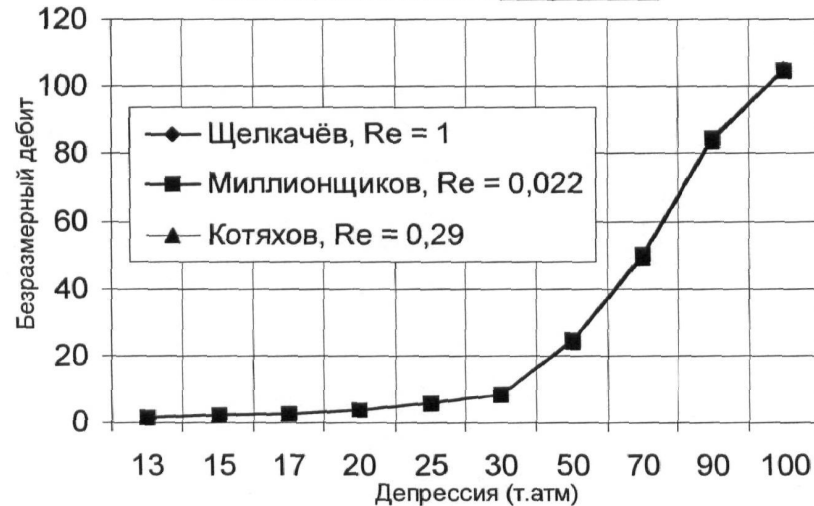


Рис. 30 Неустраиваемая относительная погрешность расчёта дебита газодобывающей скважины (%) (Диаграмма №6)

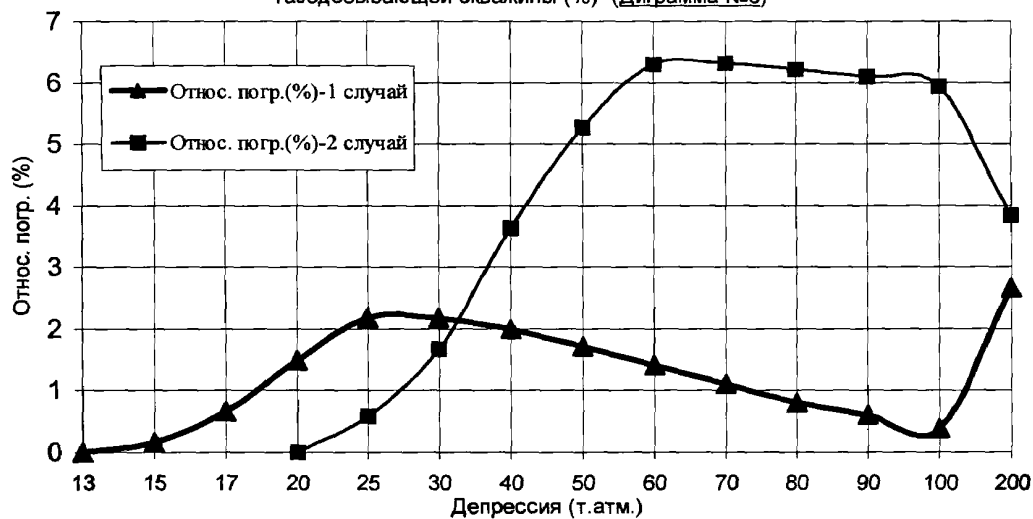


Рис. 31 Погрешность в расчёте дебита газодобывающей скважины, возникающая при пренебрежении нелинейностью в ПЗС и применения закона Дарси ко всей области фильтрации.

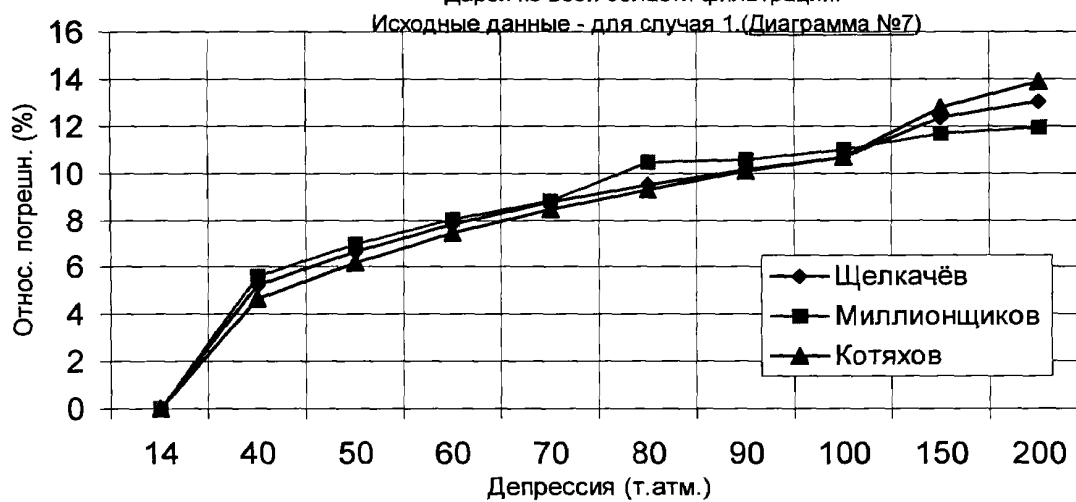
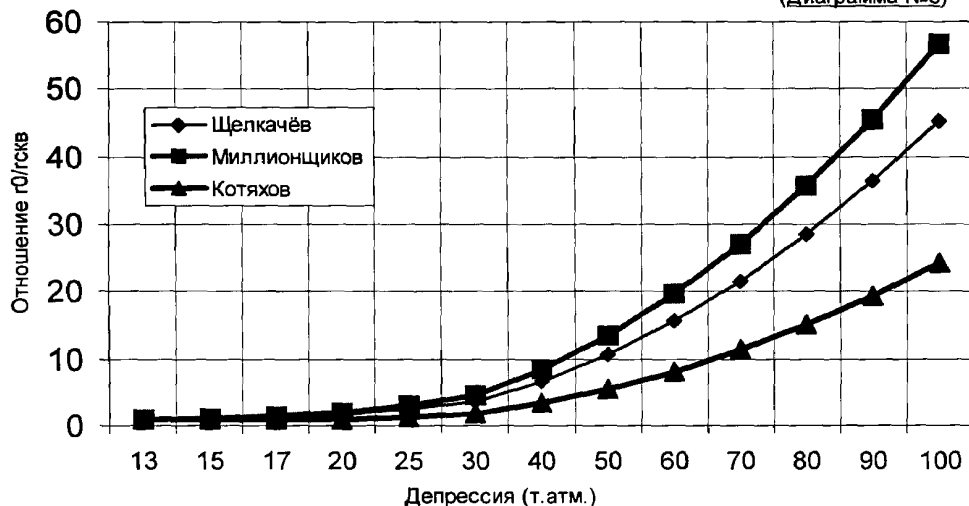
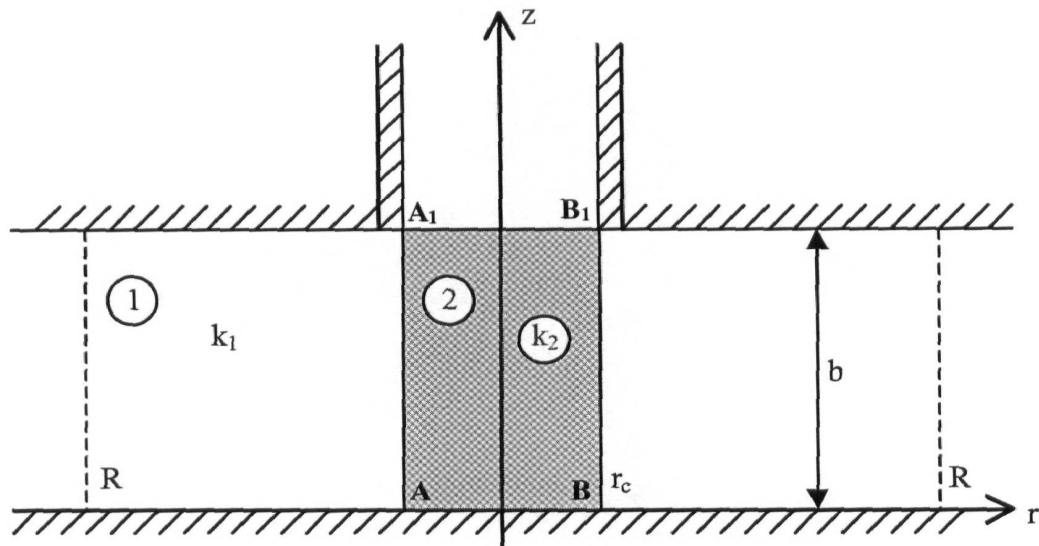


Рис. 32 Радиус призабойной зоны газодобывающей скважины г0/гскв (Диаграмма №8)





1 – призабойная зона скважины (ПЗС) с проницаемостью k_1 . Режим фильтрации в ПЗС линейный.

2 – гравийный фильтр с коэффициентом проницаемости k_2 . Режим фильтрации в скважине с гравийным фильтром может быть как линейным, так и нелинейным. Радиус скважины r_c . Через r и z обозначены цилиндрические координаты, ось z направлена вверх. R – радиус контура питания. $u(z)$ – вертикальная составляющая скорости течения жидкости в фильтре (скважине).

Рис. 33.

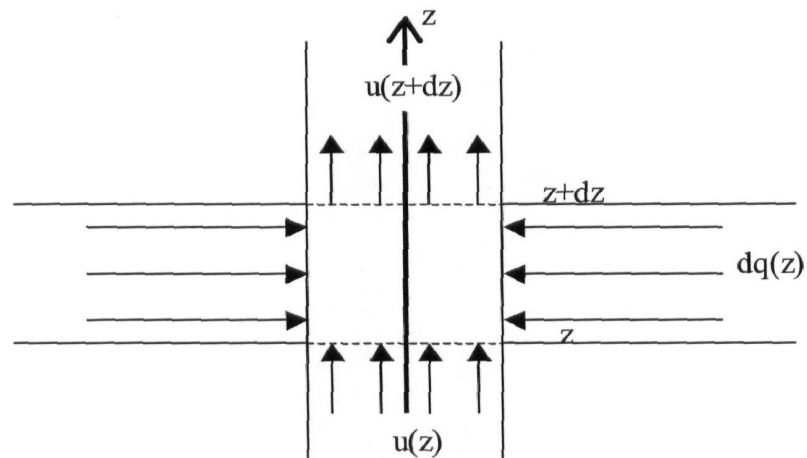


Схема взаимодействия притока жидкости к скважине с течением в её фильтре

Рис. 34.

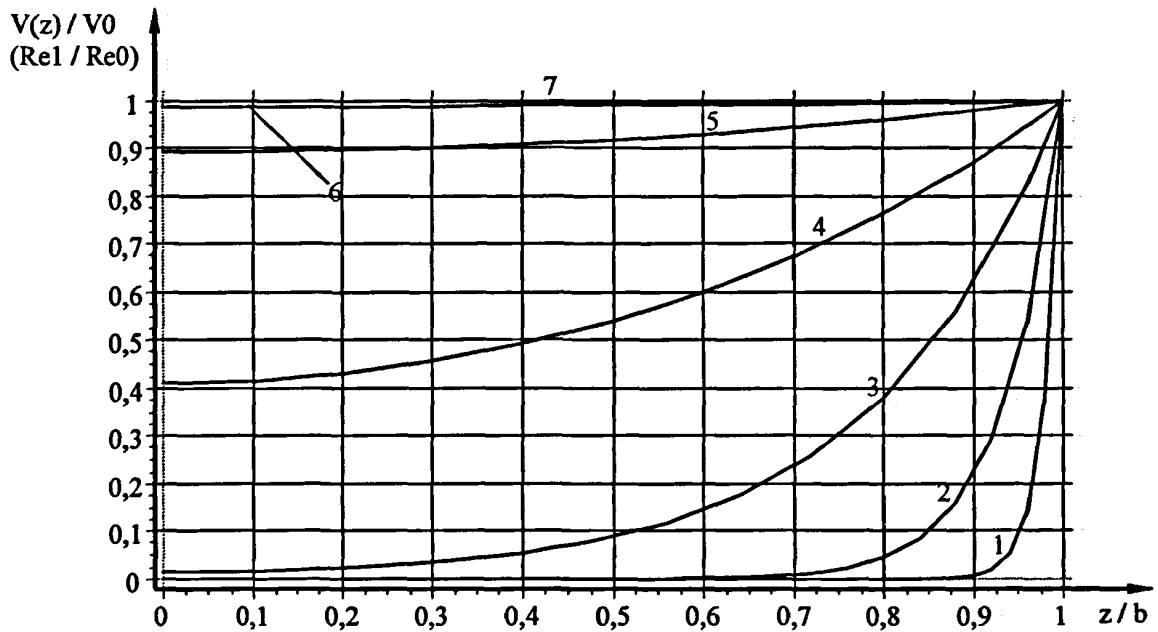


Рис. 35 . Распределение горизонтальной скорости фильтрации $V(z) / V_0$ на поверхности скважины по ее длине z / b . $R / r_c = 5000$, $b / r_c = 100$, отношения проницаемостей k_1 / k_2 равны: 1 – 1,0; 2 – 0,1; 3 – 0,01; 4 – 0,001; 5 – 0,0001; 6 – 0,00001; 7 – 0,000001;

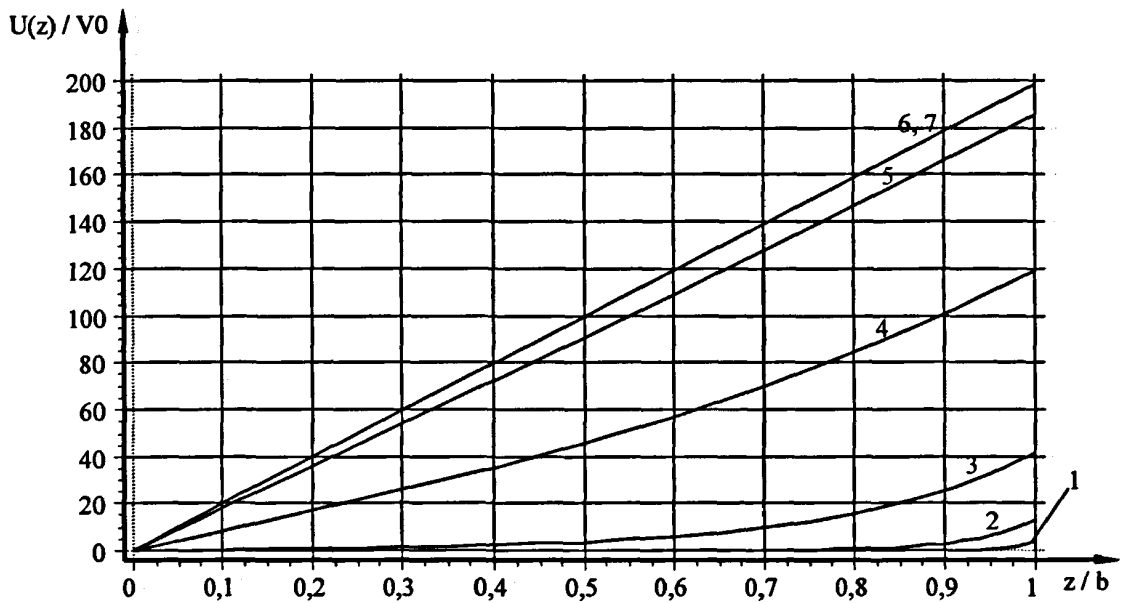


Рис. 36 . Распределение вертикальной скорости фильтрации $U(z) / V_0$ в фильтре скважины по длине ствола z / b . $R / r_c = 5000$, $b / r_c = 100$, отношения проницаемостей k_1 / k_2 равны: 1 – 1,0; 2 – 0,1; 3 – 0,01; 4 – 0,001; 5 – 0,0001; 6 – 0,00001; 7 – 0,000001

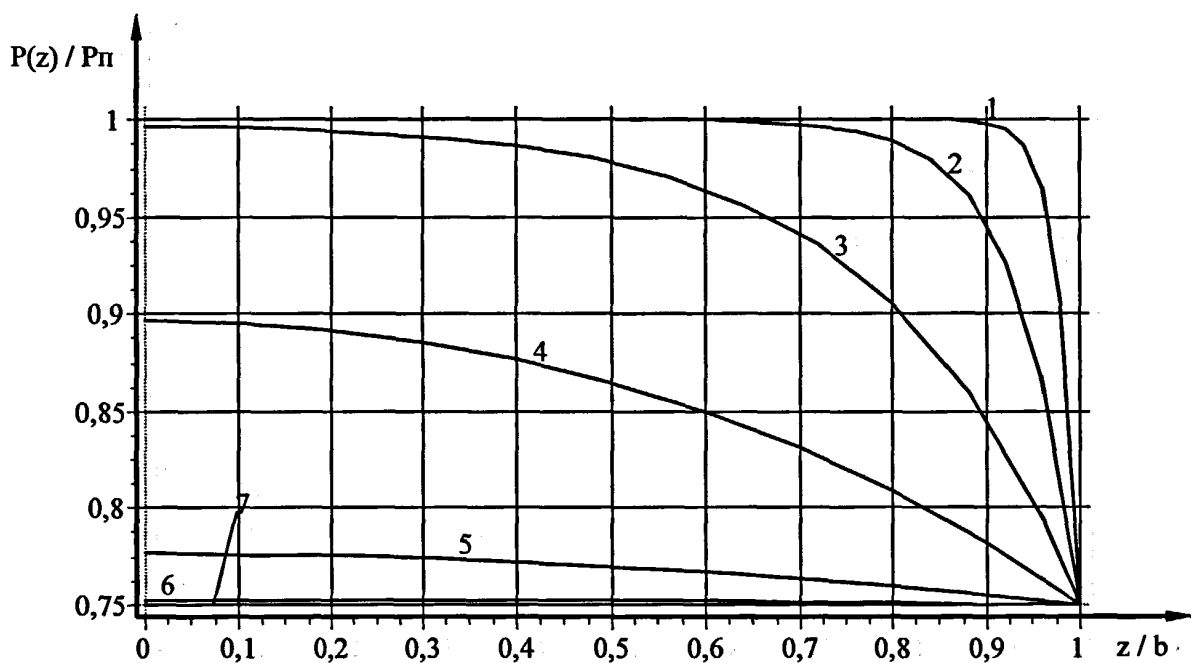


Рис.37. Распределение приведенного давления $P(z)/P_n$ вдоль ствола вертикальной скважины. $R/r_c = 5000$, $b/r_c = 100$, $P(z)/P_n = 0,75$. Отношения проницаемостей k_1/k_2 равны:

1 – 1,0; 2 – 0,1; 3 – 0,01; 4 – 0,001; 5 – 0,0001; 6 – 0,00001; 7 – 0,000001;

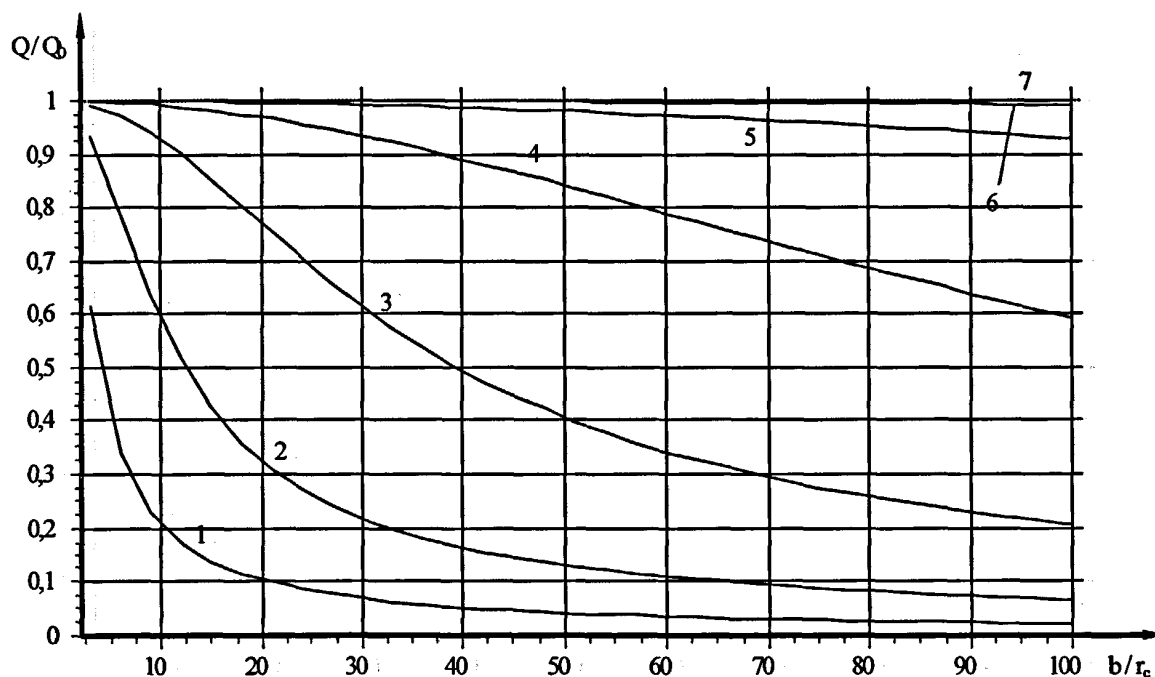


Рис. 38. Зависимость дебита скважины Q/Q_0 от длины b/r_c ее ствола.

$R/r_c = 5000$, отношения проницаемостей k_1/k_2 равны:

1 – 1,0; 2 – 0,1; 3 – 0,01; 4 – 0,001; 5 – 0,0001; 6 – 0,00001; 7 – 0,000001;

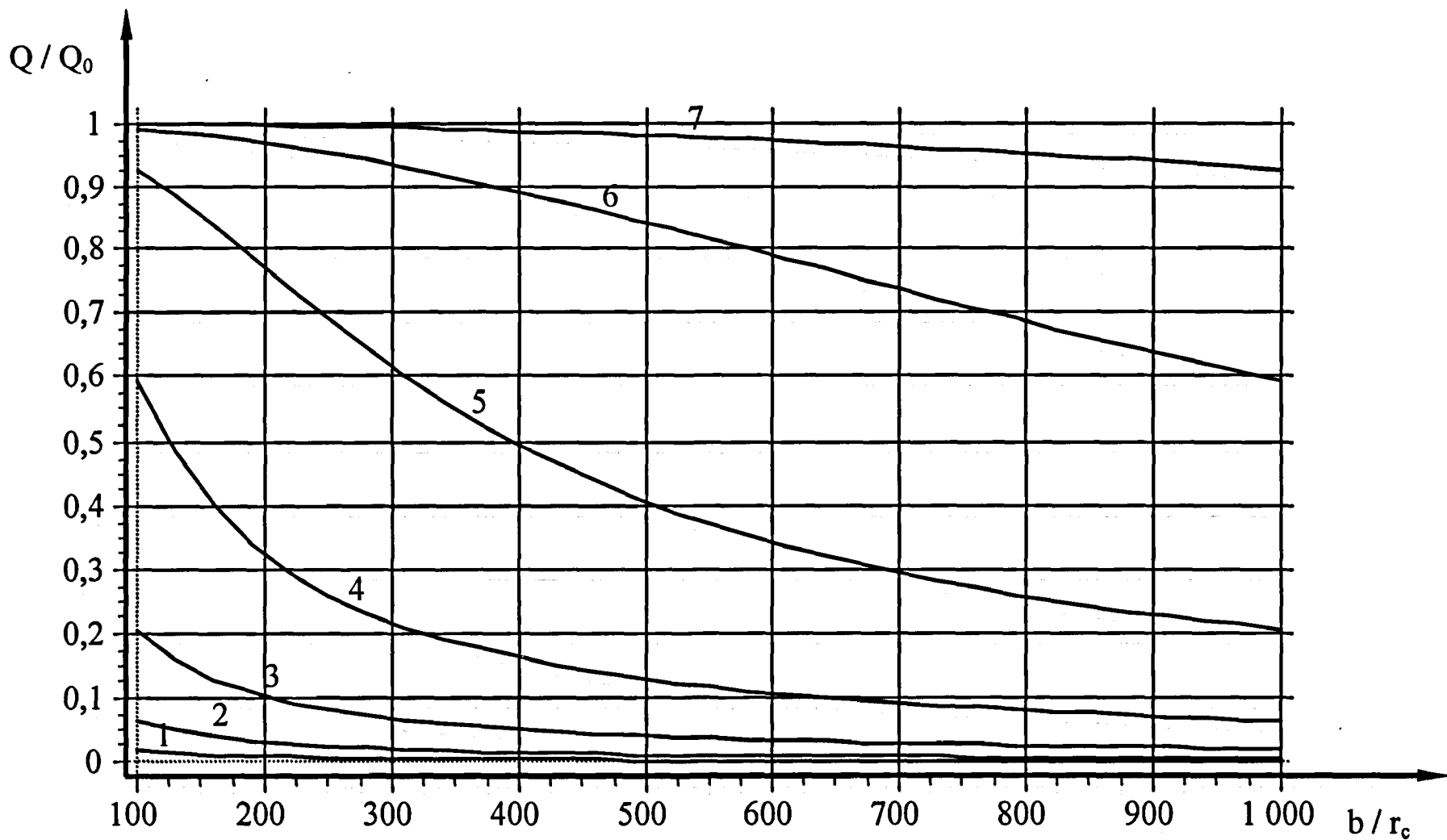


Рис.39. Зависимость дебита скважины Q/Q_0 от длины b/r_c ее ствола. $R/r_c = 5000$, отношения проницаемостей k_1/k_2 равны: 1 – 1,0; 2 – 0,1; 3 – 0,01; 4 – 0,001; 5 – 0,0001; 6 – 0,00001; 7 – 0,000001;

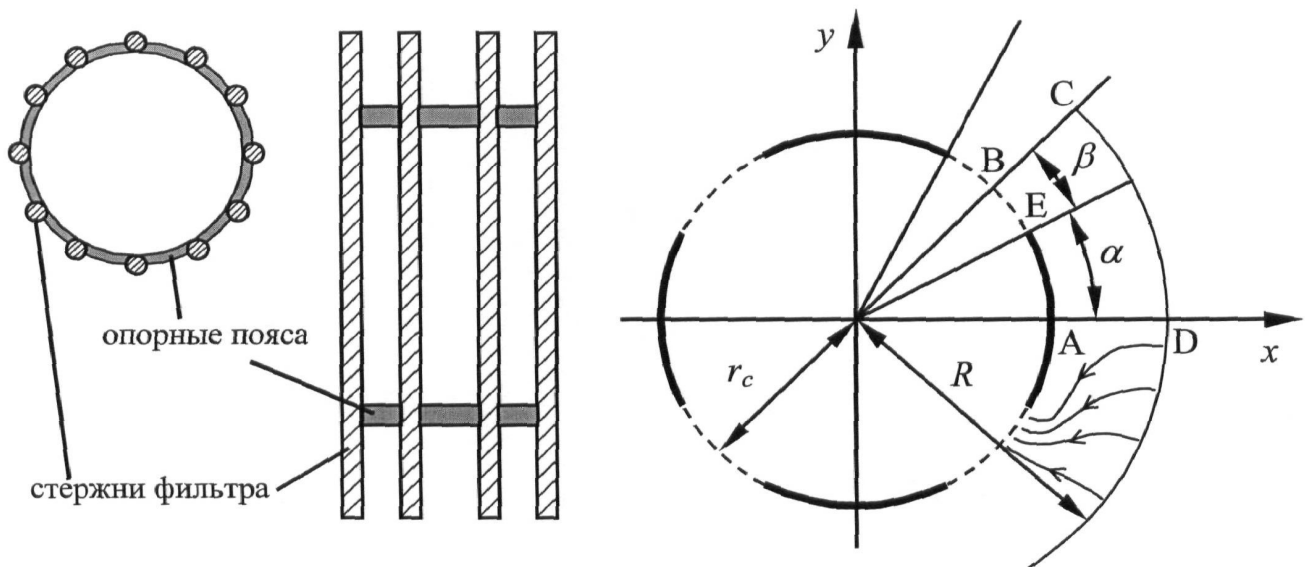


Рис.40. Схема каркасно-стержневого фильтра, используемого в вододобывающих скважинах. r_c - радиус скважины, β - половина раствора угла щели, α - половина раствора угла непроницаемой стенки, R - радиус контура питания (ближайшей невозмущённой эквипотенциали).

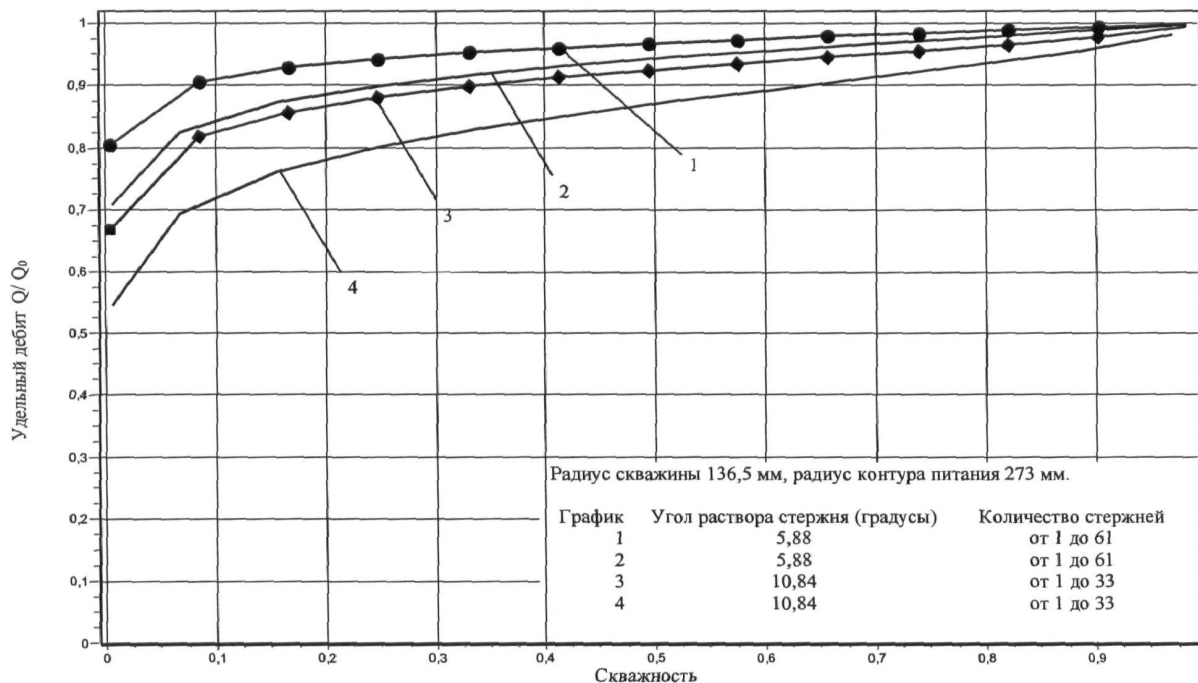


Рис.41. Анализ работы фильтров каркасно-стержневых конструкции по формуле (4.5.10) с коэффициентом λ (4.5.11) (графики 2, 4) и с коэффициентом Пилатовского $\lambda_{Дл}$ (графики 1, 3). Q_0 - базисная величина, дебит совершенной скважины, вычисляемый по формуле Дюпюи.

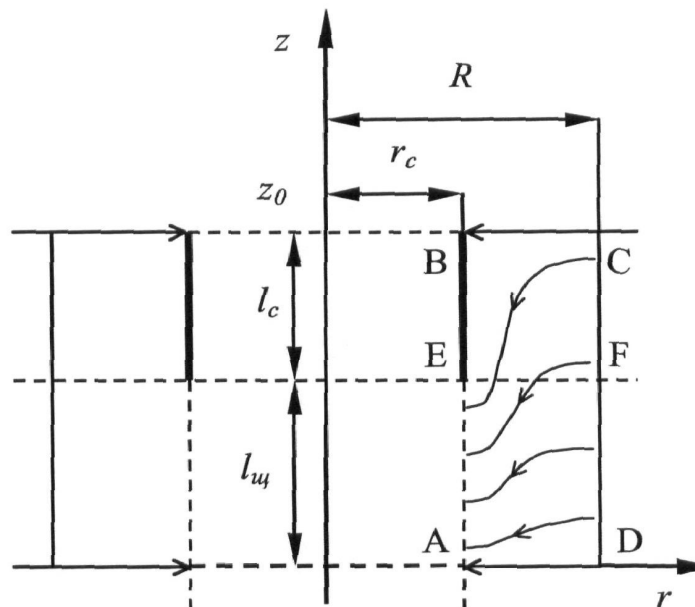
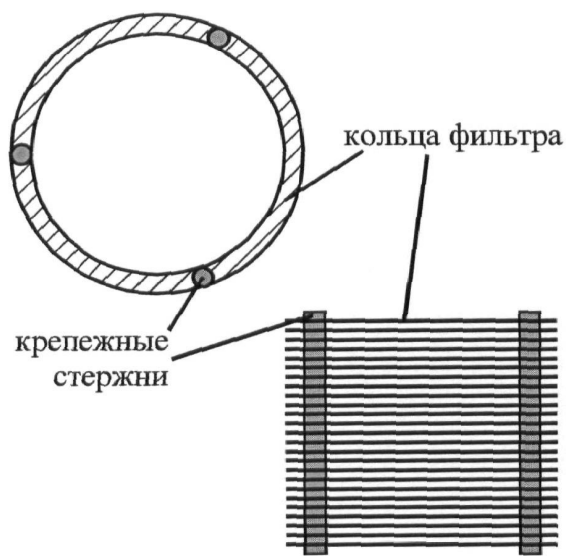


Рис. 42. Схема кольчатого фильтра, используемого в водообывающих скважинах. r_c – радиус скважины; $l_{щ}$ – половина высоты щели; l_c – половина высоты непроницаемой стенки; R – радиус контура питания; $z_0 = l_{щ} + l_c$.

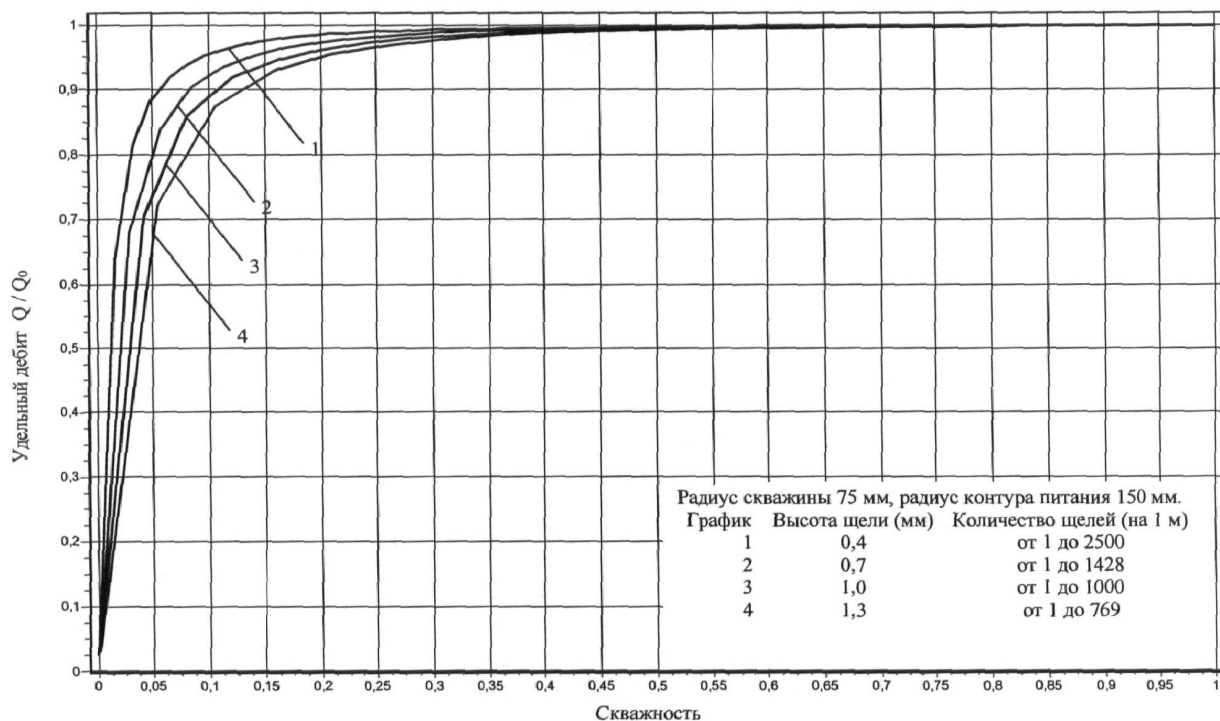
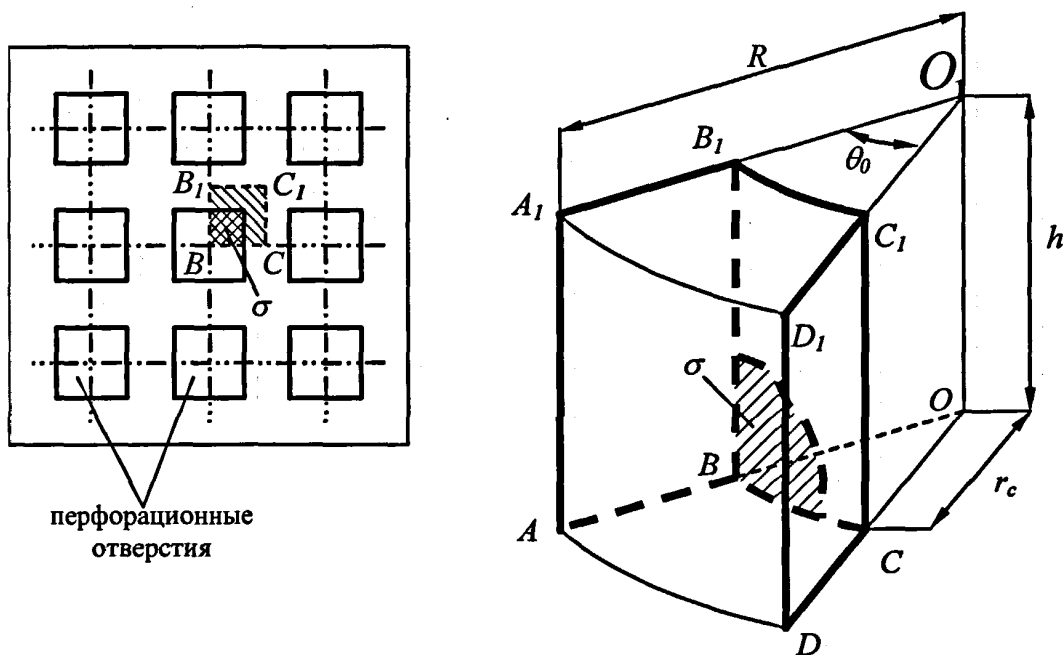


Рис.43. Анализ работы фильтров кольчатой конструкции на основе формул (4.6.10) и (4.6.11). Q_0 – базисная величина, дебит совершенной скважины, вычисляемый по формуле Дюпюи.



перфорационные
отверстия

Рис.44. Схема фрагмента фильтра перфорационной конструкции с рядным расположением перфорационных отверстий. Слева, сегмент фильтра элементарной области притока жидкости, BB_1C_1C - область D поверхности фильтра, OO_1 - ось симметрии ствола скважины, h - высота сегмента, θ_0 - угол раствора сегмента, σ - четвертая часть перфорационного отверстия.

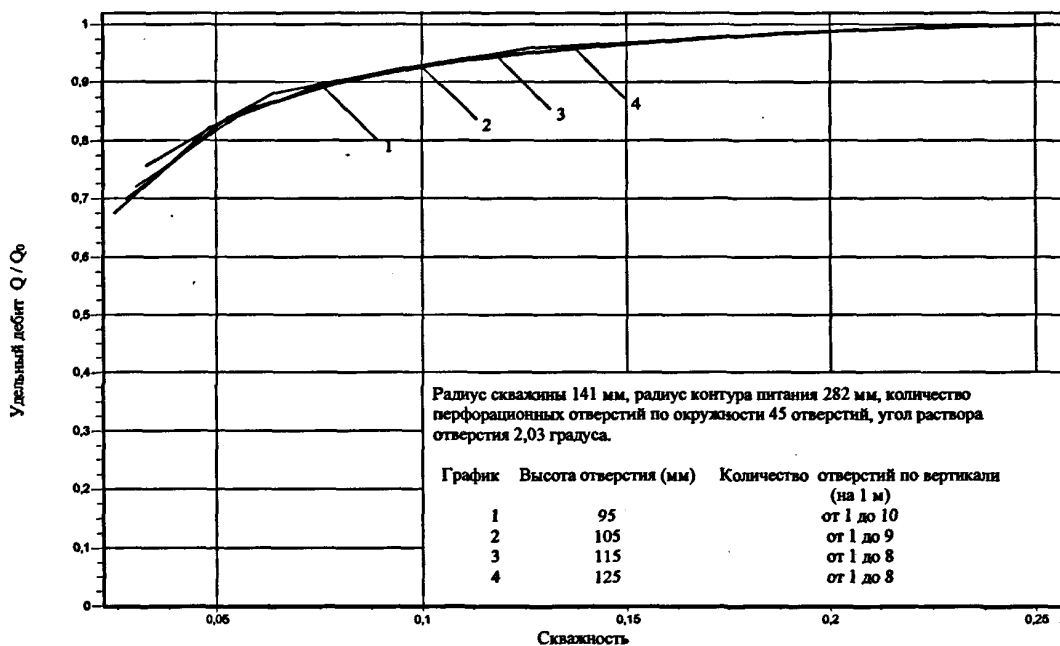


Рис.45. Анализ работы фильтров перфорационной конструкции по формулам (4.7.10) и (4.7.11).

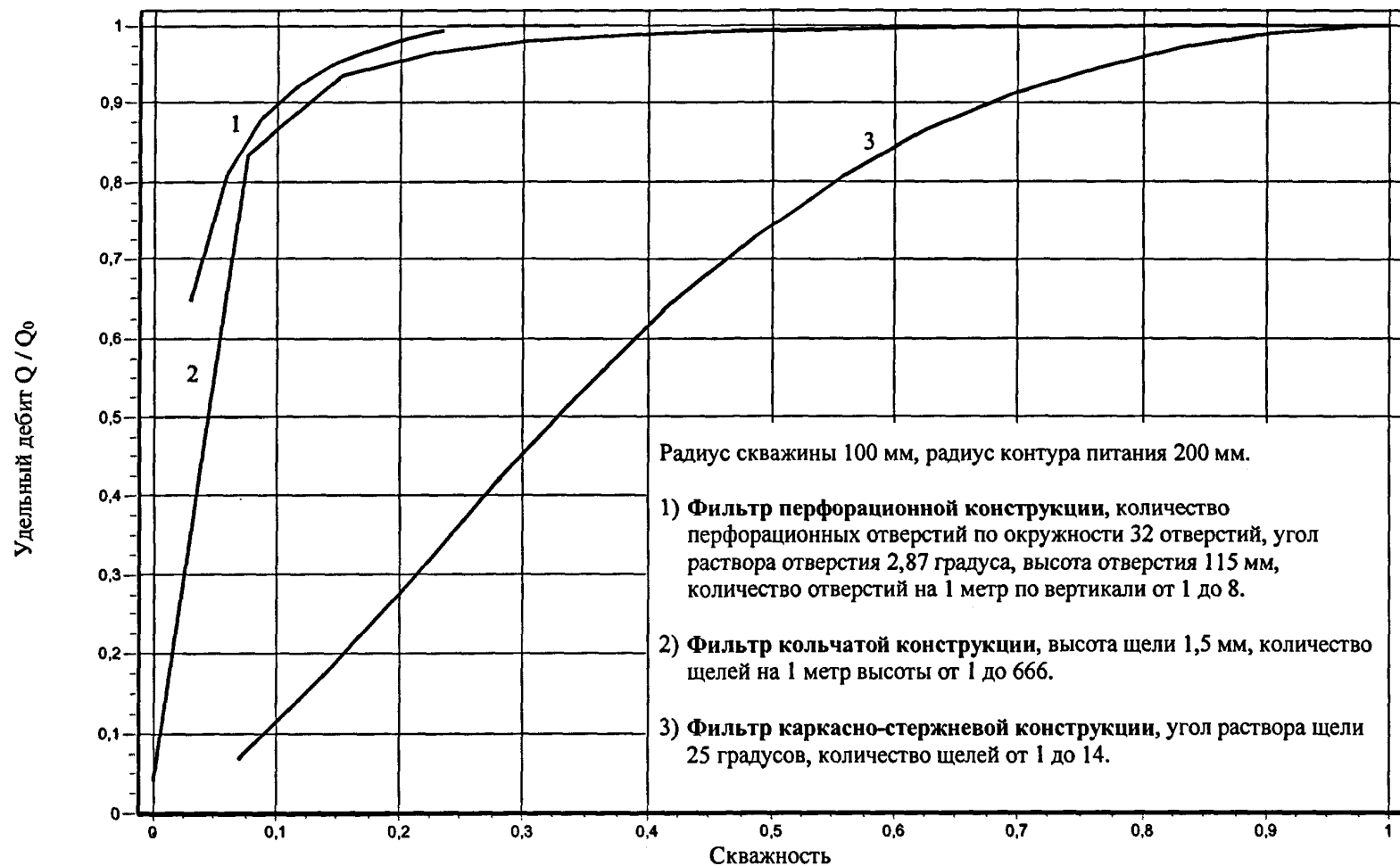


Рис.46. Сопоставление фильтров различных конструкций. Расчеты проводились по формулам (4.7.10) и (4.7.11) для графика 1, (4.6.10) и (4.6.11) для графика 2 и (4.5.10) и (4.5.11) для графика 3.

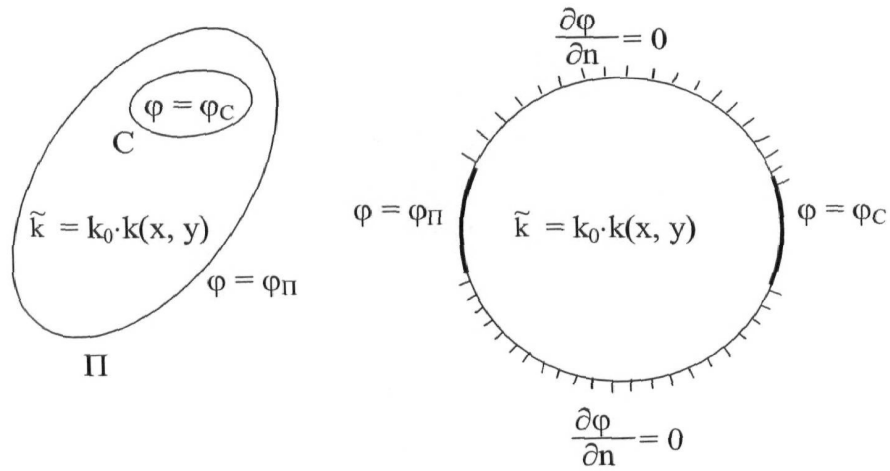


Рис. 47.

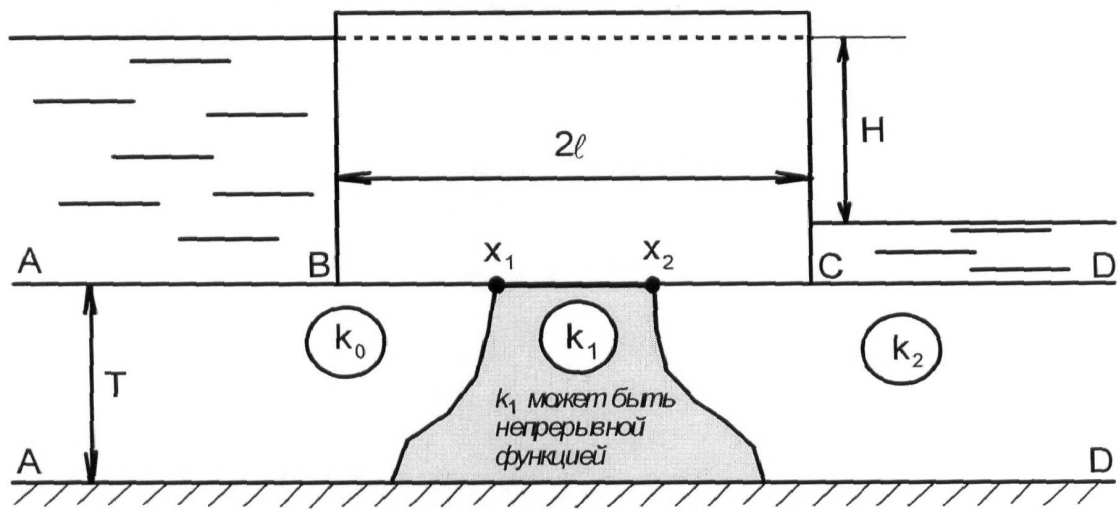


рис. 48

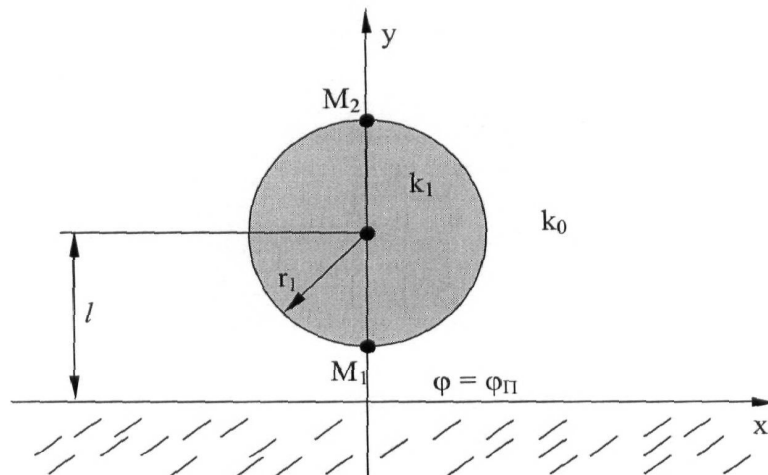


Рис. 49.

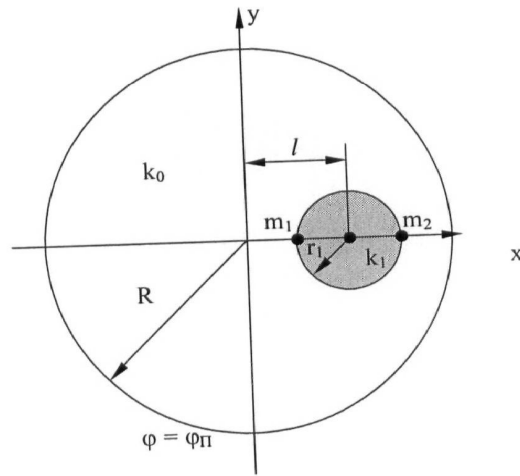


Рис. 50.

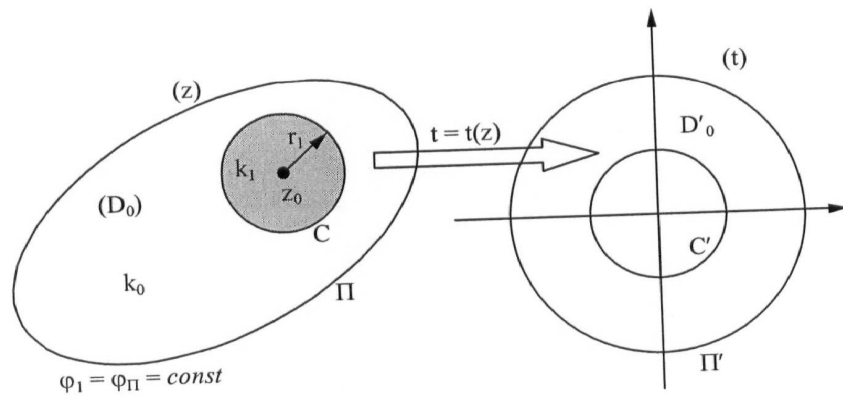


Рис. 51.

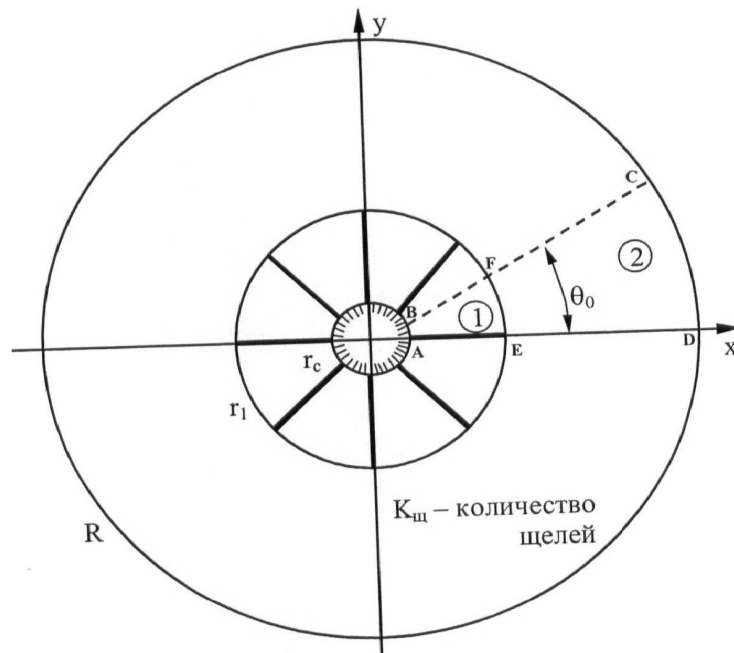


Рис. 52.

Рис.53. График зависимости относительной ошибки расчета дебита по формуле (4.10.13) от радиуса контура питания и от длины щелей. (Число щелей $K_{щ}=2$).

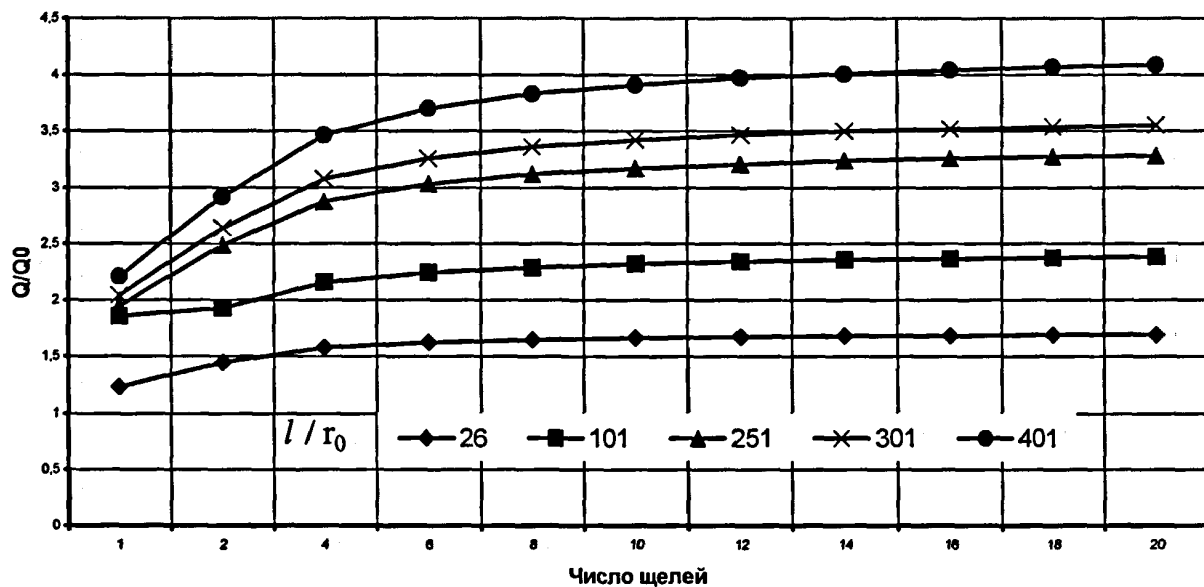
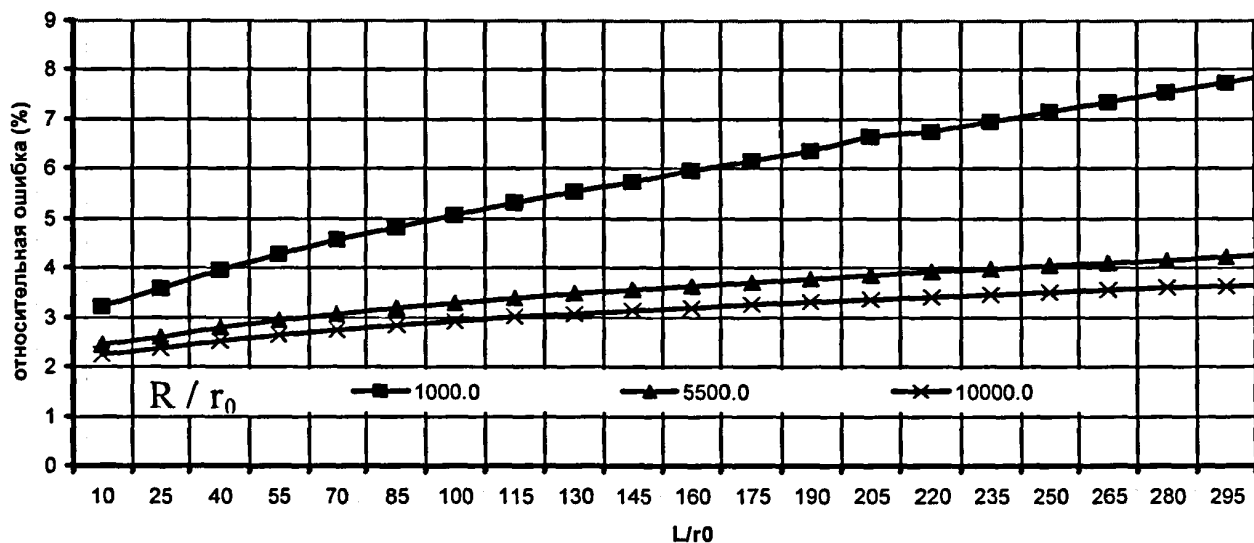


Рис. 54. Зависимость относительного дебита скважины с щелями при $R/r_0=2500$

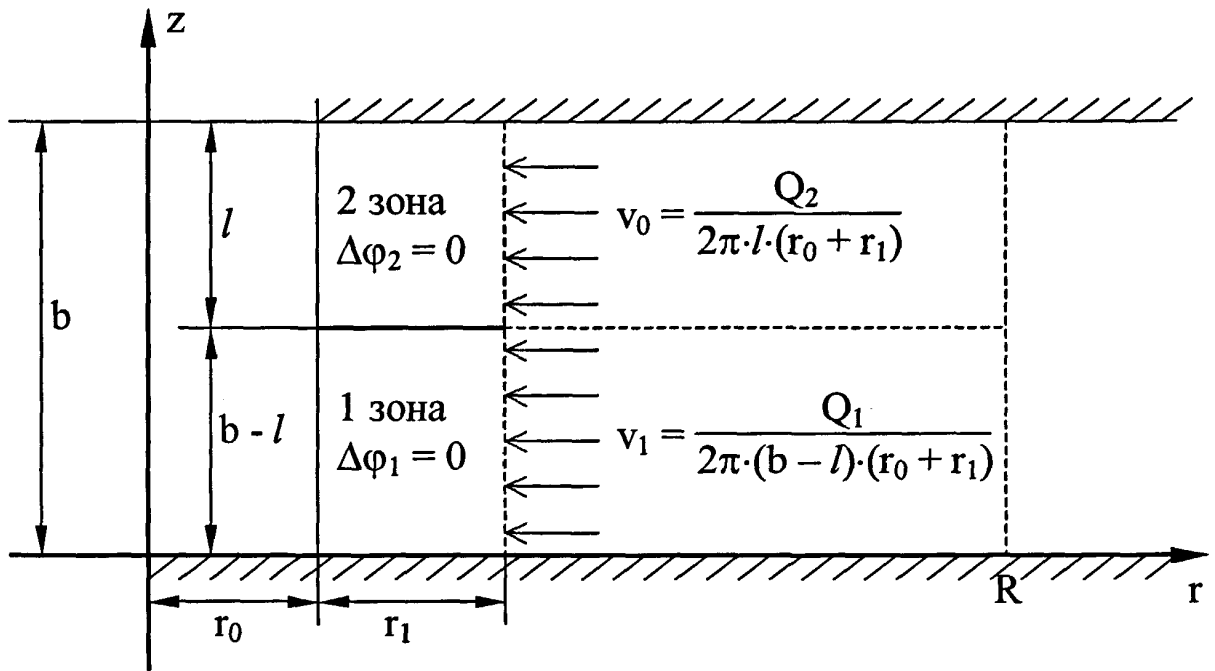


Рис. 55. Расчетная схема течения к горизонтальной трещине
(для модифицированного метода СВГ)

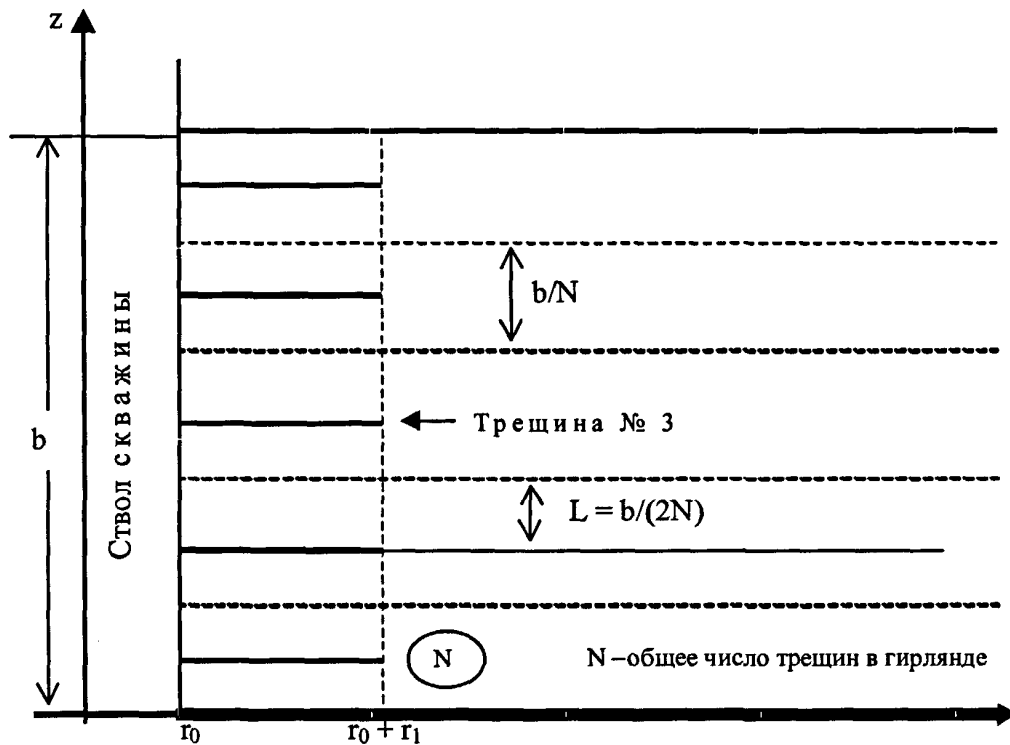


Рис. 56. Гирлянда из ГТ, равномерно распределённых по толщине
пласта

	1	2	3	4	5
τ_0	4	1000	10000	12000	15000
τ_1	2	500	5000	5000	10000
τ_2	1,649	383	3834	3739	8045

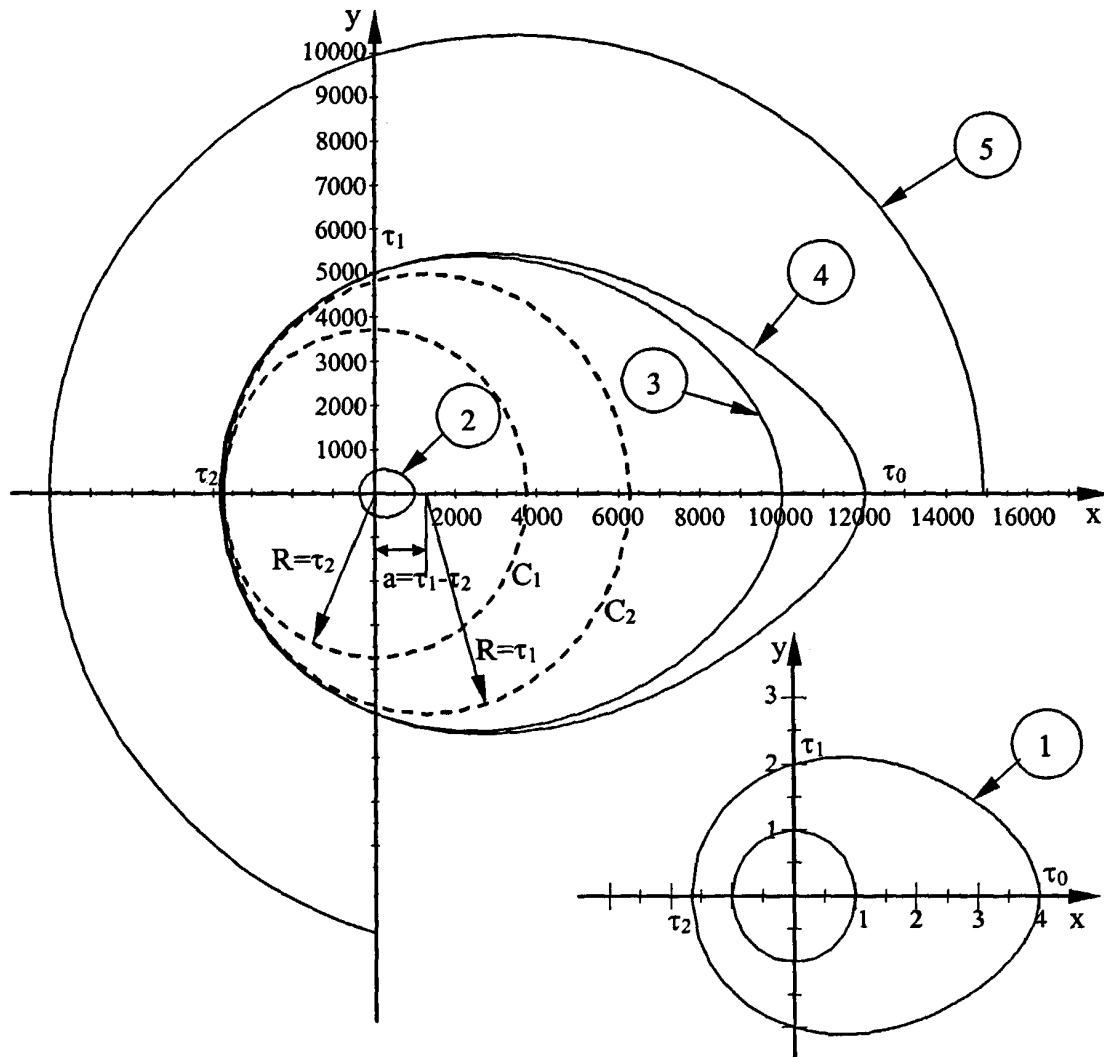
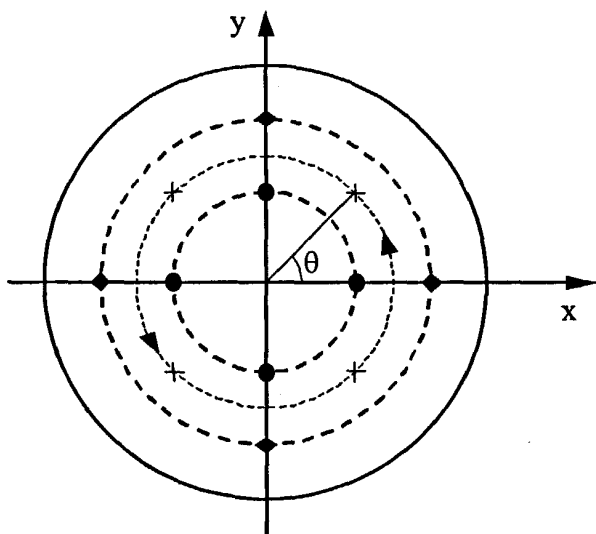
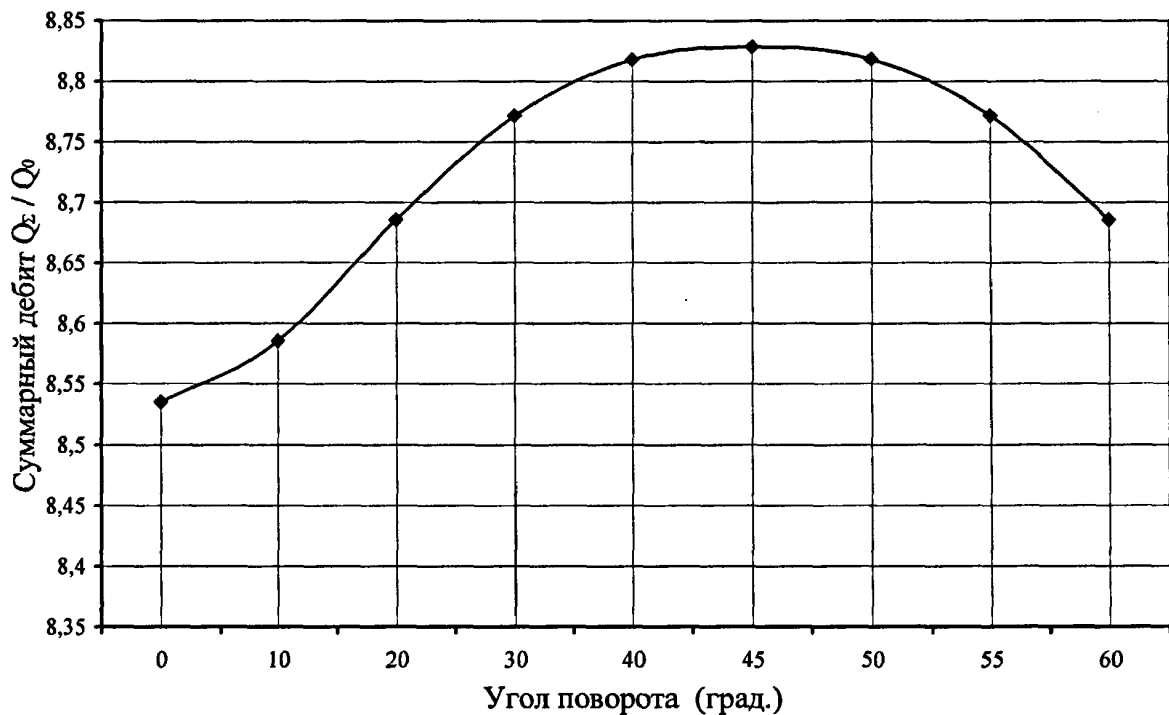
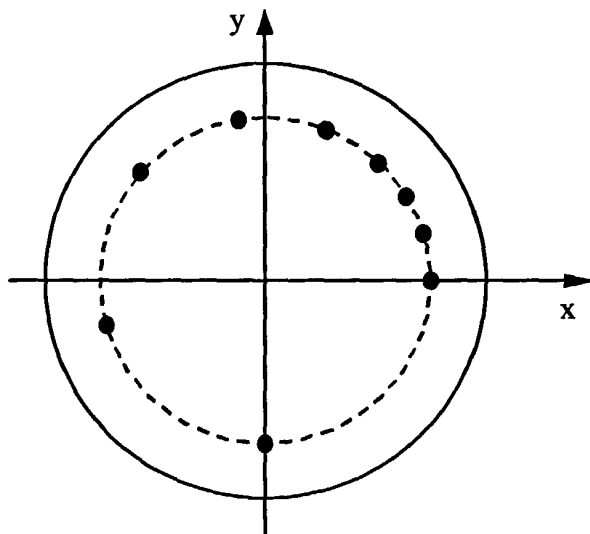
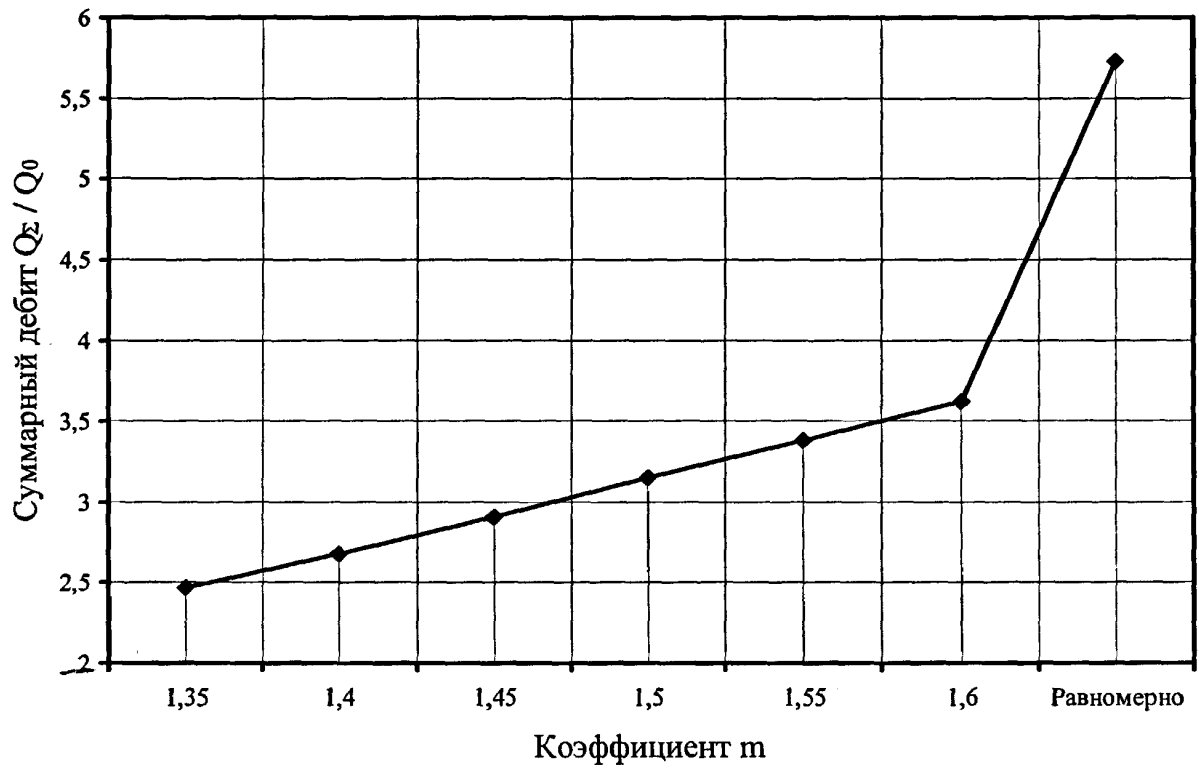


Рис. 57. C_1 и C_2 – окружности, моделирующие овалный контур питания №3 в приближенном расчёте дебита круговой скважины



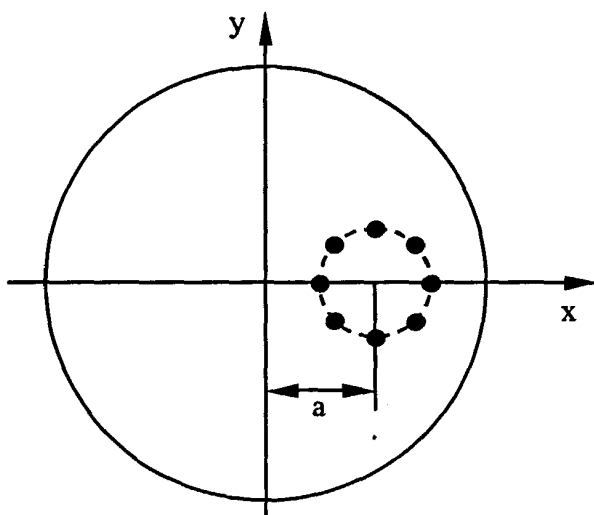
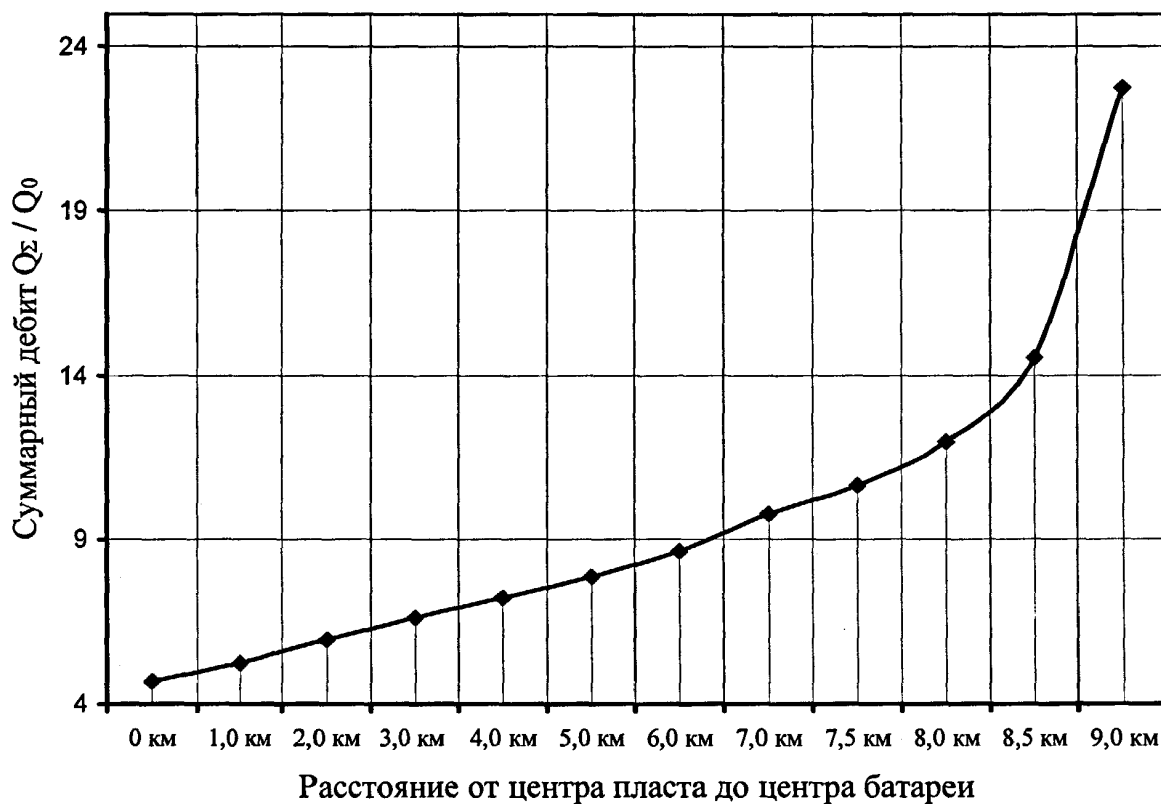
Исходные данные: $R = 10\text{км}$; $P_{\Pi}-P_C=P_{\Pi}-P_0=10\text{техн.атм.}$; $k=1\text{D(дарси)}$; $\mu=1\text{спз}$;
 $r_0=r_{\text{скв}}=10\text{см}$; Радиусы батарей: $R_1=3\text{км}$;
 $R_2=5\text{км}$; $R_3=7\text{км}$; Количество скважин:
 $3 \times 4=12\text{скв.}$

Рис. 58. Зависимость суммарного дебита от взаимного расположения скважин в трёх круговых батареях («вращение» серединной батареи относительно двух неподвижных крайних).



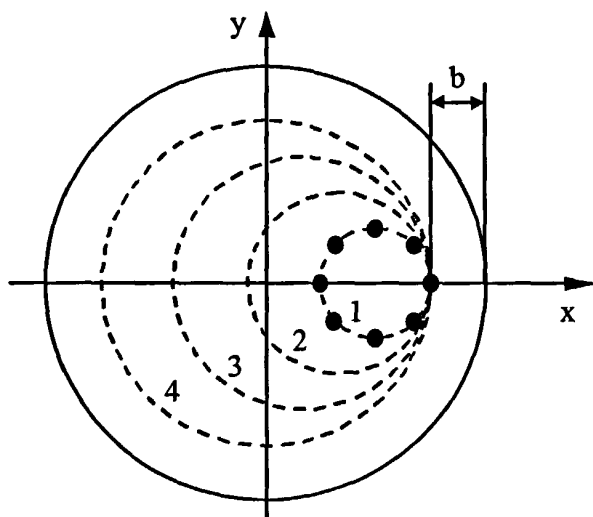
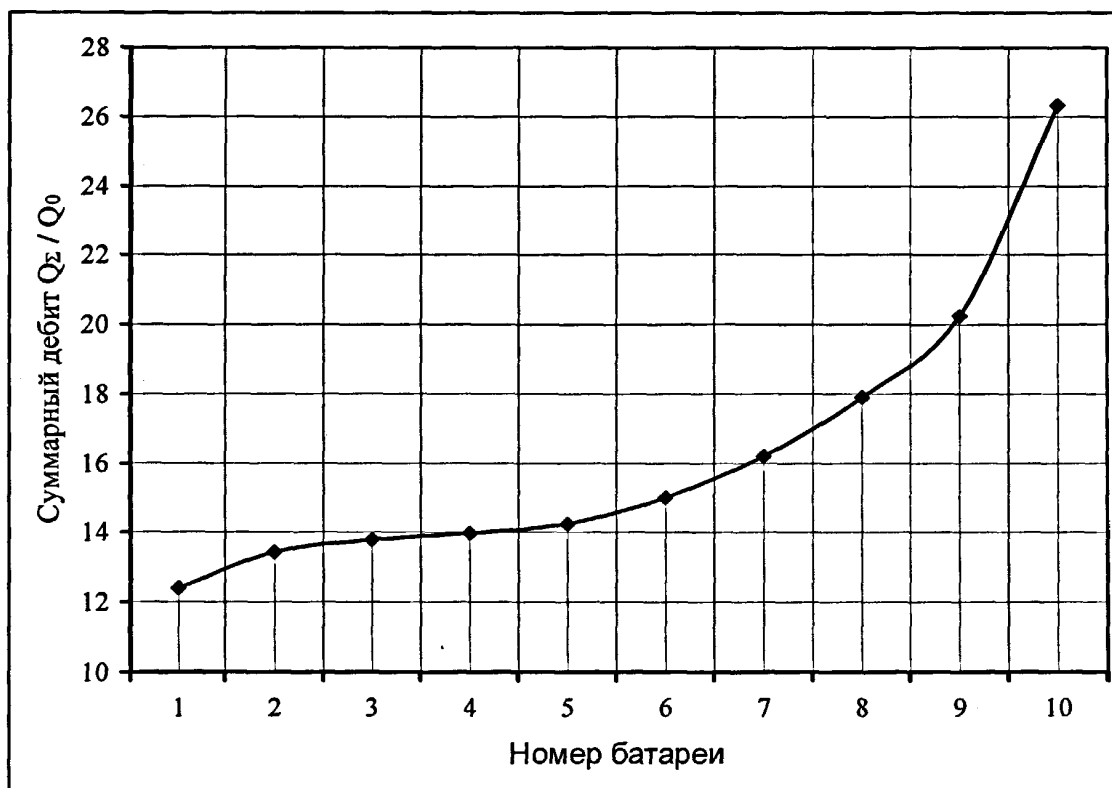
Исходные данные: $R = 10\text{км}$; $P_{\Pi} - P_C = P_{\Pi} - P_0 = 10\text{техн.атм.}$; $k = 1\text{D(дарси)}$; $\mu = 1\text{спз}$; $r_0 = r_{\text{скв}} = 10\text{см}$; Радиус батареи $R_1 = 1\text{км}$; Количество скважин: $n = 12$; угловые координаты скважин: $\theta_k = m^{k-1} \cdot \theta_1$; $\theta_1 = 1^\circ$.
Изменение m ; от $m = 1,3$ до $m = 1,6$.

Рис. 59. Влияние неравномерности распределения скважин в круговой батарее на её суммарный дебит.



Исходные данные: $R = 10\text{ км}$; $P_{\text{П}} - P_{\text{С}} = P_{\text{П}}$
 $P_0 = 10\text{ техн. атм.}$; $k = 1\text{ D (дарси)}$; $\mu = 1\text{ спз}$;
 $r_0 = r_{\text{СКВ}} = 10\text{ см}$; Радиус батареи $R_1 = 1\text{ км}$;
 Количество скважин в батарее $n = 36$.

Рис. 60. Зависимость суммарного дебита круговой батареи скважин от положения её центра (Радиус батареи не меняется, перемещается лишь центр батареи).



Исходные данные: $R = 10\text{км}$; $P_{\Pi} - P_C = P_{\Pi} - P_0 = 10\text{техн.атм.}$; $k = 1\text{D(дарси)}$; $\mu = 1\text{спз}$; $r_0 = r_{\text{скв}} = 10\text{см}$; Количество скважин в батарее $n = 36$. Радиус i -ой батареи

$$R_i = \frac{i \cdot (R - b)}{m}; \text{ расстояние } a_i \text{ между}$$

центрами пласта и центром i -ой батареи

$$a_i = \frac{m - i}{m} (R - b); m = 10; b = 1\text{км}.$$

Рис. 61. Зависимость суммарного дебита в последовательности батарей (каждая батарея из 36 скважин) от их расположения по отношению к контуру питания. Ближайшая к контуру питания скважина оставалась неподвижной, а вся батарея постепенно «раздвигалась» до окружности, параллельной контуру питания.

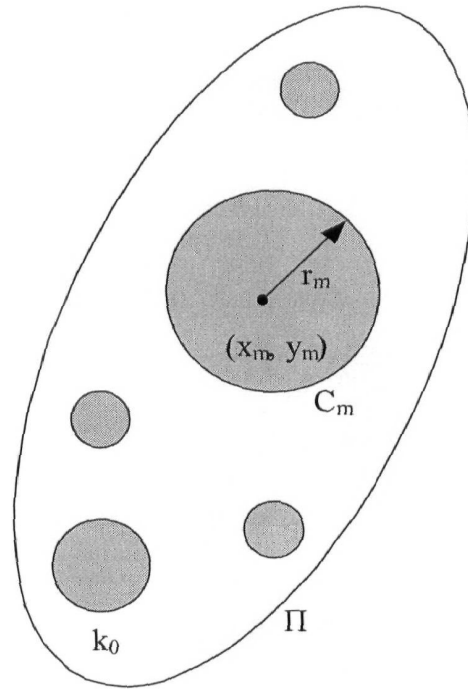


Рис. 62. Группа скважин обладающих индивидуальными фильтрационными свойствами в призабойных зонах (многоскважинная система с учётом (индивидуальных свойств) ПЗС)

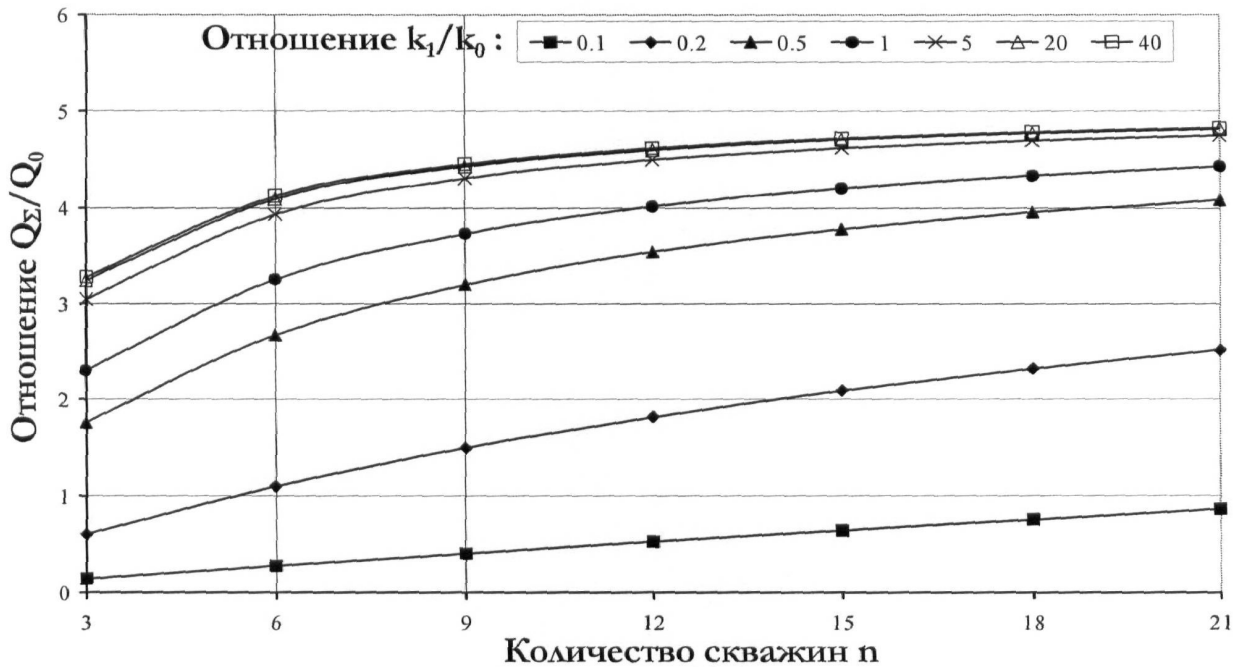


Рис. 63. Зависимость суммарного дебита центральной круговой батареи от числа скважин n и от отношения проницаемостей k_1/k_0 . Радиус контура питания $R = 10$ км, радиус ПЗС — 10 м, радиус скважин — 0,1 м. (k_1 — проницаемость ПЗС, k_0 — проницаемость пласта). Радиус батареи — $r_1 = 1$ км.

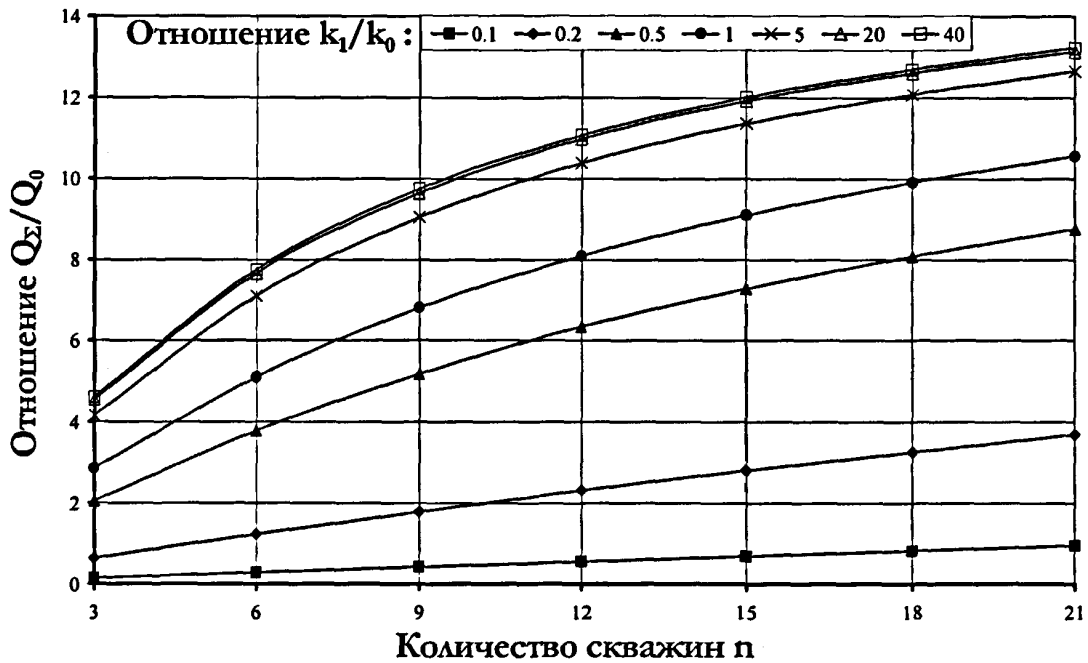


Рис. 64. Зависимость суммарного дебита центральной круговой батареи от числа скважин n и от отношения проницаемостей k_1/k_0 . Радиус контура питания $R = 10$ км, радиус ПЗС — 10 м, радиус скважин — 0,1 м. (k_1 — проницаемость ПЗС, k_0 — проницаемость пласта). Радиус батареи — $r_1=5$ км.

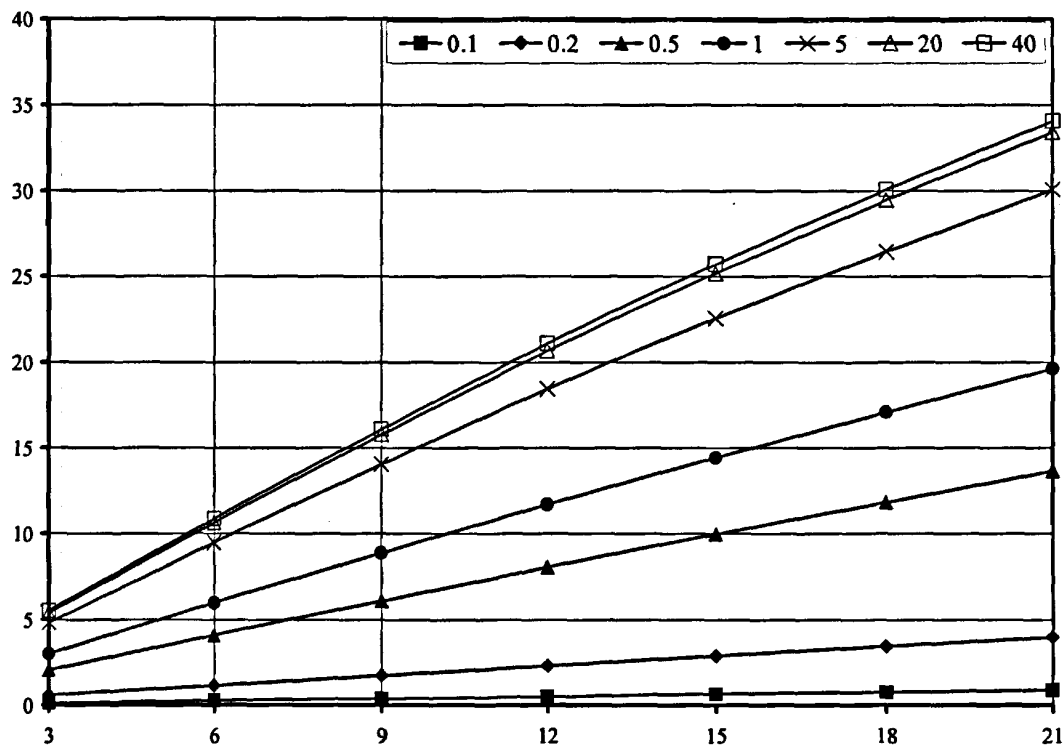
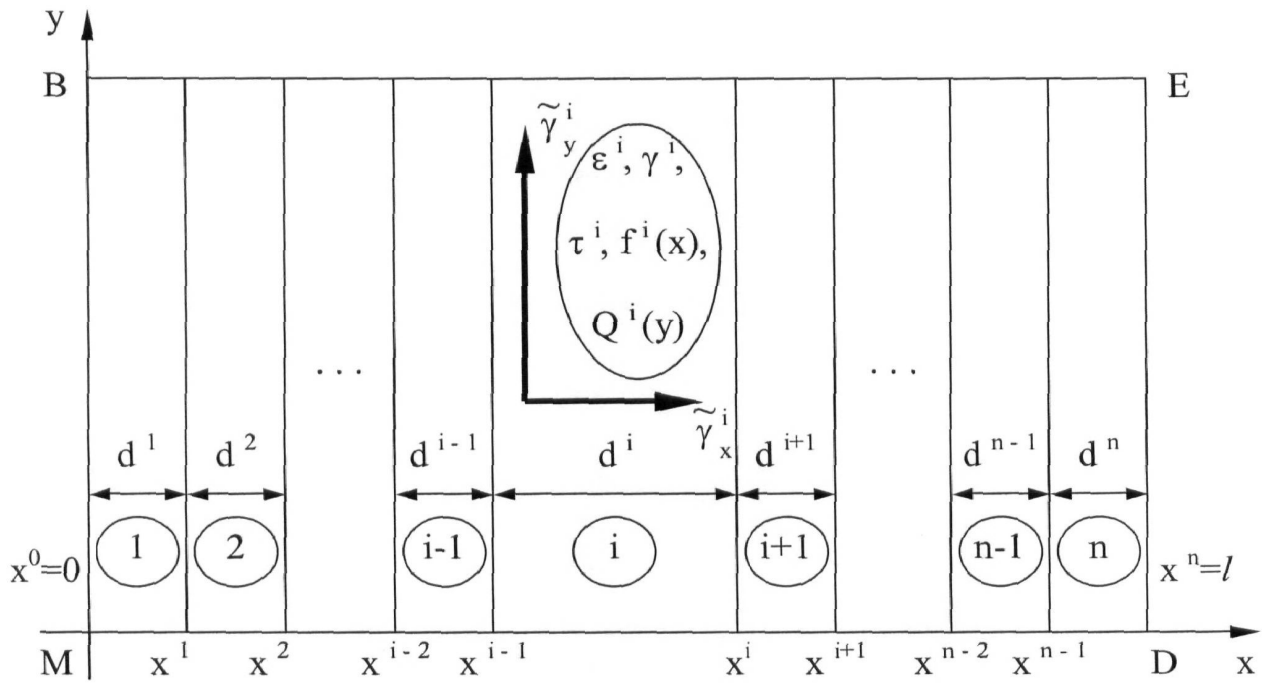


Рис. 65. Зависимость суммарного дебита центральной круговой батареи от числа скважин n и от отношения проницаемостей k_1/k_0 . Радиус контура питания $R = 10$ км, радиус ПЗС — 10 м, радиус скважин — 0,1 м. (k_1 — проницаемость ПЗС, k_0 — проницаемость пласта). Радиус батареи — $r_1=9$ км.



$$x^i = \sum_{k=1}^i d^k \quad x^n = \sum_{k=1}^n d^k \equiv l \quad d^i = x^i - x^{i-1}$$

$\frac{\tilde{\gamma}_y^i}{\tilde{\gamma}_x^i} = \epsilon^i$ – безразмерная постоянная, коэффициент анизотропии i -го слоя.
 $\tilde{\gamma}_x^i = \gamma^i \cdot f^i(x)$; $\tilde{\gamma}_y^i = \epsilon^i \cdot \gamma^i \cdot f^i(x)$. $f^i(x)$ – безразмерная функция, характеризующая закон неоднородности i -го слоя. $f^i(x^{i-1}) = 1$; $f^i(x^i) = \tau^i$. Постоянная τ^i – коэффициент неоднородности i -го слоя. γ^i – размерная постоянная (проницаемость). d^i – ширина i -го слоя. Функция $Q^i(y)$ – плотность распределения источников в i -ом слое.

Рис.66

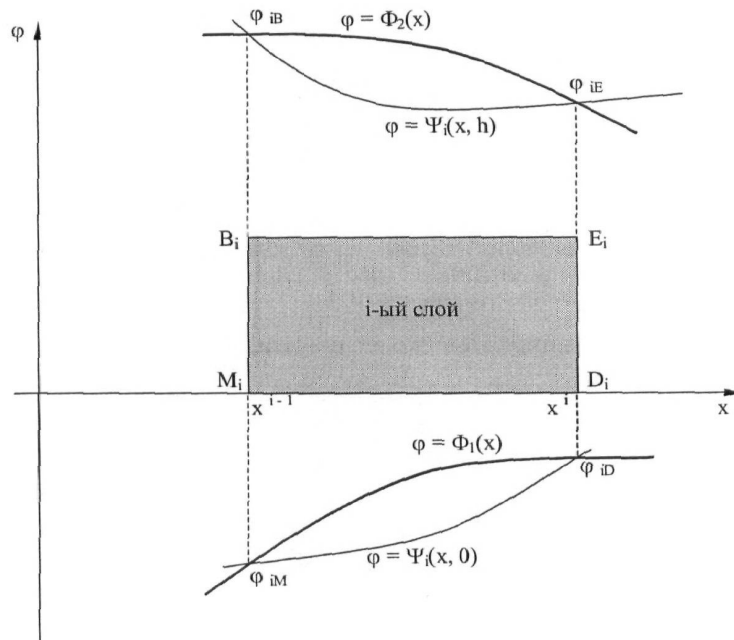


Рис. 67.

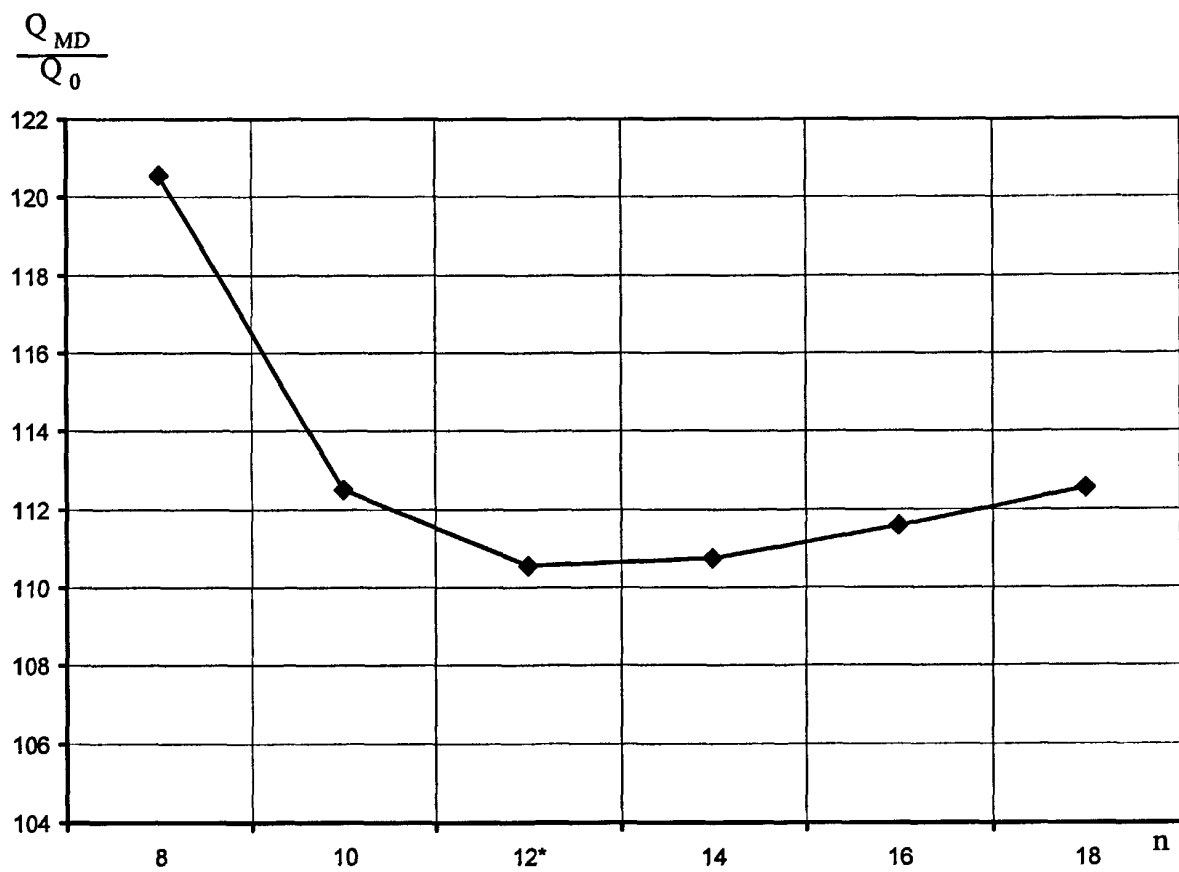
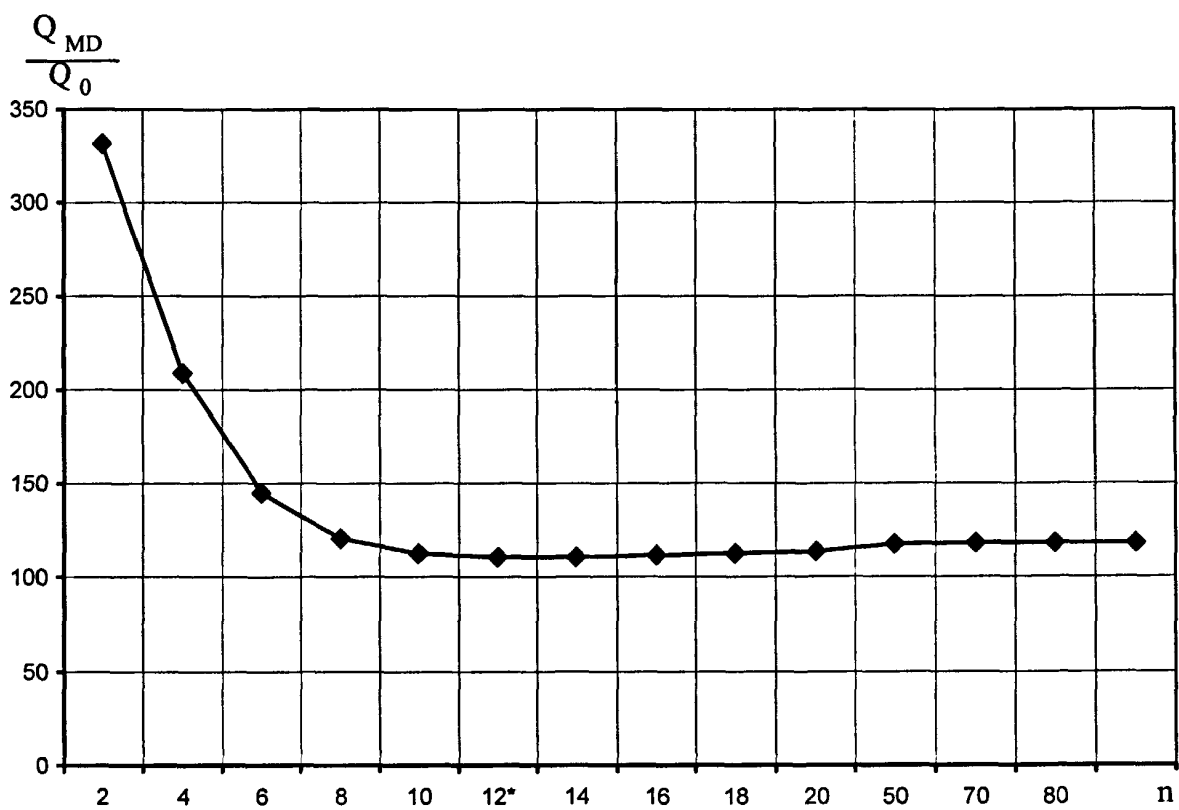


Рис. 68. Эффект минимизации потока в МС-средах

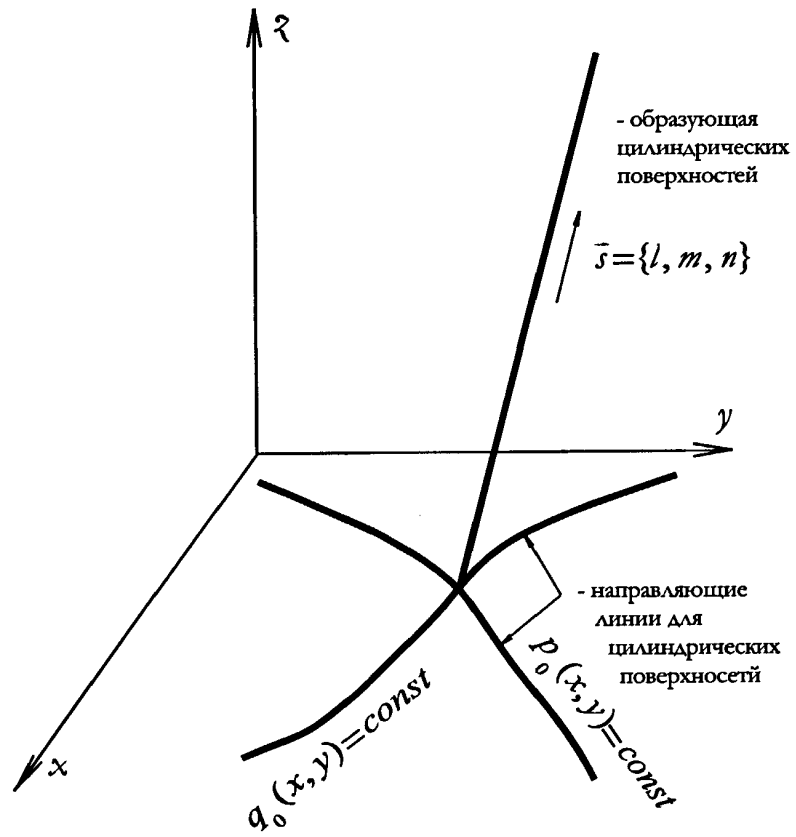


Рис. 69.