РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ С. А. ЕСЕНИНА

На правах рукописи

ТЕНЯЕВ ВИКТОР ВИКТОРОВИЧ

УДК 517.929

ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор
физико-математических наук,
профессор ТЕРЕХИН М. Т.

РЯЗАНЬ-2002

Оглавление

Введение

Актуальность темы. В настоящей работе изучается система дифференциальных уравнений с запаздыванием. Правая часть системы нелинейна и непрерывна по фазовым переменным. Матрица соответствующей линейной однородной системы непрерывна. Изучаемая нелинейная система имеет тривиальное решение. Задача исследования: поиск условий существования малых ненулевых решений двухточечной задачи системы дифференциальных уравнений с запаздыванием в окрестности нулевого решения.

В период становления классической механики господствовало мнение, что скорость изменения (движения) реальных систем в настоящий момент зависит только от их состояния (положения) в этот же момент времени. Стало быть, для описания таких систем с целью предсказания их поведения в будущем вполне пригодны обыкновенные дифференциальные уравнения

$$x'(t) = F(t,\ x(t)),\ t \in [t_0,\ \infty[,$$

$$x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ F = (F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n).$$

Более детальное изучение окружающего нас мира привело исследователей к необходимости учитывать во многих случаях то, что состояние физических систем в данный момент времени существенно зависит от их состояний в прошлом.

В 70-х годах XIX в. Больцман предложил теорию упругого последействия, в основе которой находилось соотношение

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} k(t-\tau)T(\tau)d\tau\ ,$$

где φ – деформация; T – напряжение деформируемого тела; k –

функция релаксации. Эта теория получила дальнейшее развитие в работах Вольтерра.

Понятие последействия в механике Вольтерра переносит в область биологии [14], и далее возводит явление последействия в общий принцип естествознания (принцип остаточного действия) и развивает теорию интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, учитывающих остаточные, наследственные эффекты в поведении динамических систем.

По свидетельству академика Ю.Н. Работнова [54], теория линейной наследственности Вольтерра нашла приложения в ряде разделов механики и математической физики (механика деформируемого твердого тела, теория поведения полимерных материалов при умеренных напряжениях, описание внутреннего трения в металлах, когда амплитуды напряжений очень малы).

Другим классом математических моделей явлений и процессов с последействием являются дифференциально-функциональные уравнения. Такие уравнения содержат операции дифференцирования и сдвига аргумента, поэтому пригодны для описания движения систем, скорость которых в данный момент зависит не только от состояния в данный момент, но и от прошлых состояний. В простейшем случае систем с запаздыванием вместо обыкновенных дифференциальных уравнений следует рассматривать уравнения

$$x'(t) = F[t,\, x(t),\, x(\tau(t))],$$

где $\tau(t) = t - \Delta(t),\ \Delta(t) \geq 0$.

В плане классификации дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом различаются случаи сосредоточенного

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t) x(t - \tau_i(t)) + f(t),\ k \geq 1$$

и распределённого

$$\dot{x}(t)=\int_{0}^{\sigma(t)} p(t,\tau)x(t-\tau)d\tau+f(t),\ \sigma(t)\geq 0$$

запаздываний.

Известно, что специалисты по математической физике XVIII в. изучали дифференциально-функциональные уравнения в связи с попытками распространения механики конечных систем на сплошные среды, но в дальнейшем для развития механики сплошных сред стали применяться уравнения в частных производных. Замечательным является опосредованное возникновение дифференциально-функциональных уравнений в процессе решения краевых задач для уравнений в частных производных гиперболического типа, описывающих различные волновые процессы. Дифференциально-функциональные уравнения всё чаще используются непосредственно как математические модели реальных явлений и процессов в различных областях естествознания, в частности в биологии, экономики, физике. В ряде работ [59, 60, 78] на основе анализа различного рода экологических систем показано, что для их описания можно использовать уравнения с сосредоточенным или распределённым запаздываниями.

Динамические системы с запаздыванием и процессы, происходящие в таких системах, в большинстве случаев описываются дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом или системами таких уравнений. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, которыми описываются динамические процессы в реальных системах, как правило, являются нелинейными. Но так как линейные дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом сравнительно легче поддаются исследованию и теория таких уравнений разработана достаточно хорошо то, при решении различных теоретических и особенно практических задач нелинейные системы приближенно заменяются линейными. Такая линеаризация задач во многих случаях является законной. Но иногда, как, например, в теории колебаний, линеаризация уравнений является недопустимой, так как приводит к весьма грубым и даже ошибочным результатам. Поэтому разработка теории систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, в частности теории колебаний нелинейных систем с запаздыванием, имеет большое теоретическое и практическое значение.

Цель работы заключается в получении достаточных условий существования малых ненулевых решения двухточечной краевой задачи системы n дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\dot{x} = A(t)x + \widetilde{A}(t, \lambda)x + \widetilde{B}(t, \lambda)T_\mu x + \widetilde{f}(t, \lambda) + f(t, x, T_\mu x, \lambda), \qquad (0.1)$$

в которой $A(t)$, $\widetilde{A}(t, \lambda)$, $\widetilde{B}(t, \lambda)$– непрерывные $(n \times n)$ – матрицы, $\widetilde{f}(t, \lambda)$, $f(t, x, y, \lambda)$ – непрерывные n-мерные вектор-функции, T_μ – оператор сдвига (определение дано в §1.1 первой главы).

Методика исследования. Задача поиска условий существования нетривиальных решений двухточечной краевой задачи системы (0.1) сводится к задаче поиска условий существования ненулевой неподвижной точки нелинейного оператора. Построение нелинейного оператора основано как на свойствах матрицы линейного приближения, так и на свойствах нелинейных членов правой части системы.

Основные результаты, имеющиеся по данной проблеме. Основы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений были заложены А. Пуанкаре [53] и А.М. Ляпуновым [32]. Методы исследования колебаний нелинейных систем, основанные на работах Ляпунова и Пуанкаре, сводятся к представлению периодических решений исследуемых систем в виде степенных рядов, составленных по степеням малого параметра и малых начальных отклонений, абсолютно и равномерно сходящихся для этих значений на любом заданном конечном промежутке времени. Большой вклад в развитие этих методов внесли А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин [7, 8], И.Г. Малкин [33, 34], Л.И. Мандельштам [35, 36] и другие ученые. Основные идеи качественного исследования систем дифференциальных уравнений содержатся в книге В.В Немыцкого и В.В. Степанова [45].

Для исследования квазилинейных и нелинейных систем без запаздывания особенно широкое распространение получили следующие методы: Пуанкаре-Ляпунова-Малкина исследования периодических и почти-периодических решений [7, 8, 15, 32, 33, 34, 47, 53], эквивалентной линеаризации нелинейностей [27], осреднения [10, 40, 41, 58], сравнения [17], асимптотические методы [9, 38, 61].

В работе [17] уравнением сравнения является дифференциальное уравнение, не имеющее периодических решений, за исключением состояния равновесия. Близость правых частей сравниваемых уравнений порождает существование однотипных решений.

Г.В. Каменковым [22] был развит метод исследования колебаний нелинейных систем с помощью функций Ляпунова. Он рассматривал системы как с одной, так и со многими степенями свободы, квазилинейные и существенно нелинейные. Особенно эффективный метод построения периодических решений квазилинейных и существенно нелинейных систем был предложен им при исследовании систем второго порядка. После перехода к полярным координатам r, θ им была введена замена натам r, θ им была введена замена $r = V + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \left(V u_i^{(1)} + \ldots + V^{m_i} u_i^{(m_i)} \right)$, где $u_i^{(k)}$ - некоторые полиномы от $\sin\theta, \cos\theta$, подлежащие определению. Этот метод, кроме ответа на вопрос о существовании периодических решений по членам с конечной степенью μ и исследования проблемы устойчивости, позволяет решить задачу об оценке той величины малого параметра, при которой и менее которой построенные периодические решения существуют. Методом функций Ляпунова решается задача о существовании периодических решений у существенно нелинейных дифференциальных уравнений в статье [16].

В теории колебаний нелинейных систем с запаздыванием методы Пуанкаре-Ляпунова-Малкина нашли развитие в работах Н.Н. Красовского, А. Халаная, Л.Э. Эльсгольца, С.Н. Шиманова и др. [26, 69, 73, 74, 75]. В прикладных работах [9, 30] применяется метод эквивалентной линеаризации. Асимптотический метод Крылова-Боголюбова для систем с запаздыванием частного вида впервые применен в работе С.И. Тетельбаума и Г.Н. Рапопорта [66]. Эти методы получили дальнейшее развитие в работах Рубаника В.П. [56, 57], Азбелева Н.В., Максимова В.П., Рахматуллиной Л.Ф. [2 - 6] и их учеников.

Книга В.П. Рубаника [56] посвящена теории периодических решений линейных и квазилинейных колебательных систем с запаздыванием, особое внимание уделено изложению асимптотических методов исследования колебаний в квазилинейных системах с запаздывающими связями и их приложениям.

В работе Б.Г. Гребенщикова [19] рассмотрена нестационарная линейная неоднородная система с запаздыванием, линейно зависищим от времени t:

$$\dot{x}(t) = \hat{A}(t)x(t) + \hat{B}(t)x(\mu t) + f(t), \qquad (0.2)$$

$t \ge t_0 > 0$, $\mu = const$, $0 < \mu < 1$, $x(\eta) = \varphi(\eta)$: $\mu t_0 \le \eta \le t_0$, с почти периодическими матрицами и вектор-функцией. Для системы (0.2) найдены условия существования единственного почти периодического решения, которое является асимптотически устойчивым.

В работе М.Т. Терёхина [64] изучается проблема существования ненулевого периодического решения функционально-дифференциального уравнения вида

$$\dot{x}(t) = A(\lambda)x(t) + (F_\lambda x)(t)x(t), \qquad (0.3)$$

где $x(t)$ – n-мерный вектор, $A(\lambda)$, $(F_\lambda)(t)$ – $n \times n$-матрицы, $\lambda \in E_m$ – параметр, E_s – s-мерное векторное пространство. Для исследуемой системы получены достаточные условия того, чтобы $\lambda_0 = 0$ являлось бифуркационным значением параметра λ системы (0.3) Приводится пример.

Основными методами исследования большинства работ [6, 11, 19, 29, 62, 63, 64, 69], содержащих исследования по проблеме существования решения двухточечной краевой задачи системы с отклоняющимся аргументом, являются методы функций Грина, последовательного приближения, малого параметра и осреднения.

Содержание работы. Настоящая работа содержит результаты исследования системы (0.1) с точки зрения существования ненулевых решений двухточечной краевой задачи в малой окрестности тривиального решения. В отличие от работ [6, 19, 29] в диссертации рассмотрена система дифференциальных уравнений запаздывающего типа, имеющая векторный параметр и запаздывание специального вида. Запаздывание носит такой характер, что не требуется вводить начальную функцию, как для систем с постоянным запаздыванием, вместо этого начальное условие выглядит также как и классическое: $x(0)=\alpha$, то есть начальный промежуток вырождается в точку. Также в работе не используется метод разложения решения по степеням параметра и начальных данных. Результаты настоящей работы применимы для исследования систем функционально-дифференциальных уравнений, зависящих от параметра, в критическом случае порядка выше первого. В отличие от работ [62, 63, 64, 65, 69], посвященных исследованию проблемы существования решения двухточечной краевой задачи (или периодических решений), в основе исследований, содержащихся в диссертации, лежит специальным образом построенный вид решения системы (0.1), что позволило для решения двухточечной краевой задачи существенно привлечь свойства нелинейных частей системы. В диссертационной работе используется метод решения нелинейных недифференциальных уравнений отличающийся от методов, использованных в работах [1, 21].

Во введении содержатся: обоснование актуальности темы, цель работы, методика исследования, краткий обзор результатов других авторов, краткое содержание работы. Диссертация состоит из трех глав, разбитых на параграфы и приложения.

В §1.1 главы 1 вводятся основные определения (оператор сдвига и малое решение). Формулируется постановка задачи. В §1.2 главы 1 доказана теорема существования, единственности и непрерывной зависимости решений системы функционально-дифференциальных уравнений от параметра и начальных данных. В §1.3 главы 1 находятся оценки решений, исследуется структура решений системы (0.1)

В главе 2 получены достаточные условия существования ненулевых решений двухточечной краевой задачи системы с параметром (0.1), с использованием свойств нелинейных членов. В §2.1 двухточечная краевая задача решается по первому приближению. В §§2.2, 2.3 исследования ведутся с использованием нелинейных членов системы. Приводятся примеры.

В главе 3 рассмотрен частный случай системы (0.1), построены математические модели: 1) модель динамического взаимодействия сегментов финансового рынка; 2) математическая модель противовирусного иммунного ответа. В построенных моделях найдены условия существования ненулевых решений двухточечной краевой задачи.

В приложении содержится анализ программы написанной автором для численного решения систем дифференциальных уравнений с параметром и запаздыванием. Проводится тестирование программы на системах дифференциальных уравнений, для которых решение найдено в аналитическом виде. Результаты представлены в виде графиков.

Необходимые сведения по теории обыкновенных дифференциальных уравнений взяты из [12, 13, 20, 34, 50, 51, 52, 70], по теории дифференциальных уравнений с запаздыванием – из [5, 42, 43, 56, 72, 74], по качественной теории – из [11, 24, 25, 44, 45, 48, 49, 69, 71, 75], по функциональному анализу – из [23, 31, 67], по линейной алгебре – из [18, 28].

На защиту выносятся следующие положения:

Структура решений нелинейной системы функционально-дифференциальных уравнений вида (0.1).

Достаточные условия существования решений двухточечной краевой задачи системы (0.1) по первому приближению.

Алгоритм разрешимости решения двухточечной краевой задачи в критическом случае (когда решение двухточечной краевой задачи зависит от нелинейных членов системы).

Достаточные условия существования нетривиального решения системы дифференциальных уравнений (0.1) частного вида.

Апробация диссертации. Основные результаты докладывались на заседаниях научно-исследовательского семинара по качественной теории дифференциальных уравнений в Рязанском государственном педагогическом университете, на кафедре дифференциальных уравнений и математического анализа Нижегородского государственного университета, на VIII Международной конференции "Математика. Компьютер. Образование" в г. Пущино, на VI Всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов "Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании" в Рязанской государственной радиотехнической академии, на Воронежской весенней математической школе «Современные методы в теории краевых задач, Понтрягинские чтения – XII» в г. Воронеж, на XXIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Основные результаты исследований опубликованы в работах [80 – 89].

Глава I

Свойства решений системы дифференциальных уравнений с запаздыванием

В главе исследуются свойства решений системы дифференциальных уравнений с запаздыванием в окрестности нулевого решения. В первом параграфе вводятся основные определения и обозначения. Во втором – доказывается теорема о существовании, единственности и непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметра системы общего вида и находится оценка решений исследуемой системы. В третьем параграфе исследуется система, в которой выделены линейные относительно x члены, находятся оценки, и изучается структура решений.

§1.1. Постановка задачи

Пусть V_ω^n – множество определенных и непрерывных на сегменте $[0,\omega]$ n-мерных вектор-функций, $W_\omega^{n\times n}$ – множество определенных и непрерывных на сегменте $[0,\omega]$ $(n\times n)$-матриц, вектор-функция $\mu\in M_t=\{\mu|\ \mu\in C^1(R^n),\ 0\le\mu_i(t)\le t,\ t\in[0,\omega],\ i=\overline{1,n}\}$.

Определение 1.1. Оператор T_μ, действующий на $u(t)\in V_\omega^n$ и $U(t)=[u_{ij}(t)]\in W_\omega^{n\times n}$ по закону

$$T_\mu u(\cdot)=(u_1(\mu_1(\cdot)),\ u_2(\mu_2(\cdot)),\ \ldots,\ u_n(\mu_n(\cdot))),$$

$$T_\mu U(\cdot)=\begin{bmatrix} u_{11}(\mu_1(\cdot)) & u_{12}(\mu_1(\cdot)) & \ldots & u_{1n}(\mu_1(\cdot)) \\ u_{21}(\mu_2(\cdot)) & u_{22}(\mu_2(\cdot)) & \ldots & u_{2n}(\mu_2(\cdot)) \\ . & . & . & . \\ u_{n1}(\mu_n(\cdot)) & u_{n2}(\mu_n(\cdot)) & \ldots & u_{nn}(\mu_n(\cdot)) \end{bmatrix} - (n\times n)\text{-матрица},$$

назовем *оператором сдвига.*

Определенный оператор обладает рядом свойств:

1) T_μ – линейный оператор относительно действия на вектор-функцию;

2) если $U_1(t),\ U_2(t) \in W_\omega^{n\times n}$, то $T_\mu(U_1(t)+U_2(t)) = T_\mu(U_1(t)) + T_\mu(U_2(t))$;

3) если a – постоянный n-мерный вектор, $U(t) \in W_\omega^{n\times n}$, то $T_\mu(U(t)a) = T_\mu(U(t))a$;

4) если $u(t) \in V_\omega^n$, $U(t) \in W_\omega^{n\times n}$ то $T_\mu \int\limits_0^t u(s)ds = \int\limits_0^t E_{\mu'} T_\mu(u(s))ds$ и $T_\mu \int\limits_0^t U(s)ds = \int\limits_0^t T_\mu(U(s))E_{\mu'}ds$, где $E_{\mu'} = diag(\mu_1', \mu_2', ..., \mu_n')$.

Справедливость свойств 1 – 3 очевидна. Докажем четвертое свойство. С этой целью заметим, что выполняется равенство $\int\limits_0^{g(t)} h(s)ds = \int\limits_0^t h(g(s))g'(s)ds$, в котором $h(t)$ – непрерывная функция, $g(t) \in C^1(R)$ (см. [68], С. 135). Тогда, используя определение оператора сдвига, получим справедливость свойства 4.

Сформулированные свойства необходимы для доказательства последующих теорем.

В дальнейшем в работе будут приняты следующие обозначения: $|x| = \max\limits_{i=1,\, n}\{|x_i|\}$, $|G| = \max\limits_{i=1,\, n}\sum\limits_{j=1}^n |g_{ij}|$, $\|G(\cdot)\|_t = \sup\limits_{s\in[0,\, t]}|G(s)|$, $\|x(\cdot)\|_t = \sup\limits_{s\in[0,\, t]}|x(s)|$, где x – n-мерный вектор, G – $(n\times n)$-матрица.

Обозначим множества: $D(\delta) = \{x |\, x \in E_n, |x| \le \delta\}$, $\Lambda(\delta) = \{\lambda |\, \lambda \in E_m, |\lambda| \le \delta\}$. Рассмотрим систему функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\dot{x} = F(t,\, x,\, T_\mu x,\, \lambda), \tag{1.1}$$

где $t \in [0, \omega]$, $x \in D(\delta_0)$, $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$, δ_0 – некоторое число, $\delta_0 > 0$, $\mu \in M_t$, вектор-функция $F(t, x, y, \lambda)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с постоянной K на множестве $[0, \omega]\times D(\delta_0)\times D(\delta_0)\times \Lambda(\delta_0)$:

$$|F(t, x_1, y_1, \lambda)-F(t, x_2, y_2, \lambda)|\le K \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}.$$

Определение 1.2. Решение системы (1.1) $x=x(t)$ с начальными условиями $x(0)=\alpha$ и такое, что $x(t)\in D(\delta)$, $\delta\in]0, \delta_0]$ для любых $t\in[0, \omega]$, $\lambda\in\Lambda(\delta_0)$ будем обозначать $x=x(t, \mu, \alpha, \lambda)$ и назовём *малым решением системы (1.1).*

ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА. Пусть дано уравнение (1.1), вектор-функция запаздывания $\mu\in M_t$ и отрезок времени $[0, \omega]$. Требуется найти начальное значение $\overline{\alpha}\in D(\delta_0)$ и параметр $\overline{\lambda}\in\Lambda(\delta_0)$ такие, что система (1.1) при $\alpha=\overline{\alpha}$ и $\lambda=\overline{\lambda}$ имеет малое решение $x(t, \mu, \overline{\alpha}, \overline{\lambda})$, определённое на сегменте $[0, \omega]$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$x(0, \mu, \overline{\alpha}, \overline{\lambda})=x(\omega, \mu, \overline{\alpha}, \overline{\lambda}). \qquad \text{(Задача I)}$$

Можно потребовать более общее соотношение

$$x(\omega, \mu, \overline{\alpha}, \overline{\lambda})=N\,x(0, \mu, \overline{\alpha}, \overline{\lambda}), \qquad \text{(Задача II)}$$

где N – $n\times n$-матрица.

§1.2. Непрерывная зависимость решений от начальных данных и параметра

Теорема 1.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. вектор-функция $F(t, x, y, \lambda)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с постоянной $K>0$ на множестве $[0, \omega]\times D(\delta_0)\times D(\delta_0)\times\Lambda(\delta_0)$;

2. система (1.1) при $\lambda = 0$ *имеет определенное на сегменте* $[0, \omega]$ *решение* $x = \psi(t)$ *такое, что* $\|\psi(\cdot)\|_{\omega} < \delta_0$.

Тогда существует $\bar{\delta} > 0$*, что для любой точки* (α, λ)*, удовлетворяющей неравенствам* $|\alpha - \psi(0)| \le \bar{\delta}$, $|\lambda| \le \bar{\delta}$*, система (1.1) имеет единственное решение* $x = \varphi(t, \alpha, \lambda)$ *с начальным условием* $\varphi(0, \alpha, \lambda) = \alpha$*, определенное и непрерывное на множестве* $\left\{(t, \alpha, \lambda) \middle| t \in [0, \omega], |\alpha - \psi(0)| \le \bar{\delta}, |\lambda| \le \bar{\delta} \right\}$ *и* $\|\varphi(\cdot, \alpha, \lambda)\|_{\omega} \le \delta_0$.

Доказательство. Из множества $[0, \omega] \times D(\delta_0) \times D(\delta_0) \times \Lambda(\delta_0)$ можно выделить замкнутое подмножество следующим образом: выберем $0 < \delta < \delta_0$ такое, что точка $(t, x, y, \lambda) \in [0, \omega] \times D(\delta_0) \times D(\delta_0) \times \Lambda(\delta_0)$ и $\|x - \psi(\cdot)\|_t \le \delta$, $\|y - \psi(\cdot)\|_t \le \delta$, $|\lambda| \le \delta$.

Введем обозначения:

$$E_1(\delta) = \left\{(t, x, \lambda) \middle| (t, x, \lambda) \in [0, \omega] \times D(\delta_0) \times \Lambda(\delta), \|x - \psi(\cdot)\|_t \le \delta \right\},$$

$$E_2(\delta) = \left\{(t, x, y, \lambda) \middle| (t, x, y, \lambda) \in [0, \omega] \times D(\delta_0) \times D(\delta_0) \times \Lambda(\delta), \|x - \psi(\cdot)\|_t \le \delta, \|y - \psi(\cdot)\|_t \le \delta \right\}.$$

Вектор-функция $F(t, x, y, \lambda)$ на множестве $[0, \omega] \times D(\delta_0) \times D(\delta_0) \times \Lambda(\delta_0)$ определена и непрерывна, следовательно, она обладает этими же свойствами на множестве $E_2(\delta)$. Кроме того множество $E_2(\delta)$ замкнуто и ограничено, поэтому $F(t, x, y, \lambda)$ по теореме Кантора равномерно непрерывна на множестве $E_2(\delta)$. Это значит, что

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0, \delta_1 \le \delta)(\forall t \in [0, \omega])(\forall x, y \in D(\delta))(\forall \lambda \in \Lambda(\delta_1))\Big(\|x - \psi(\cdot)\|_t \le \delta_1 \wedge$$

$$\wedge \|y - T_\mu \psi(\cdot)\|_t \le \delta_1 \to \|F(\cdot, x, y, \lambda) - F(\cdot, \psi(\cdot), T_\mu \psi(\cdot), \lambda)\|_t < \varepsilon \Big).$$

Выберем $\varepsilon > 0$ и $\bar{\delta} > 0$ такими, что $\frac{\varepsilon}{K}\left(e^{K\omega} - 1\right) < \frac{\delta}{2}$, $\bar{\delta} \le \min\left\{\frac{\delta}{2}, \delta_1\right\}$.

Введем обозначения:

$$U(\bar{\delta}) = \{(\alpha, \lambda) \,|\, |\alpha - \psi(0)| \le \bar{\delta},\, |\lambda| \le \bar{\delta}\},$$

$$V(\bar{\delta}) = \{(t, \alpha, \lambda) \,|\, t \in [0, \omega],\, |\alpha - \psi(0)| \le \bar{\delta},\, |\lambda| \le \bar{\delta}\}.$$

Задача сводится к тому, чтобы доказать, что вектор-функция $\varphi(t, \alpha, \lambda)$ определена и непрерывна на $V(\bar{\delta})$.

Доказательство будем вести методом последовательного приближения. Пусть точка $(\alpha, \lambda) \in U(\bar{\delta})$. Нулевое приближение определим следующим образом:

$$\varphi_0(t, \alpha, \lambda) = \psi(t) + \alpha - \psi(0).$$

Функция $\varphi_0(t, \alpha, \lambda)$ определена и непрерывна на множестве $V(\bar{\delta})$ и $\|\varphi_0(\cdot, \alpha, \lambda) - \psi(\cdot)\|_t = |\alpha - \psi(0)| \le \bar{\delta} < \delta$ для любого λ, $|\lambda| \le \bar{\delta}$. Таким образом, точка $(t, \varphi_0(t, \alpha, \lambda), \lambda) \in E_1(\delta)$ и $\varphi_0(0, \alpha, \lambda) = \alpha$.

Первое приближение положим

$$\varphi_1(t, \alpha, \lambda) = \alpha + \int_0^t F(\xi, \varphi_0(\xi, \alpha, \lambda), T_\mu \varphi_0(\xi, \alpha, \lambda), \lambda)\, d\xi.$$

Для функции выполняются следующие утверждения: $\varphi_1(0, \alpha, \lambda) = \alpha$, функция непрерывна на $V(\delta)$. Найдем оценку нормы

$$\|\varphi_1(\cdot, \alpha, \lambda) - \varphi_0(\cdot, \alpha, \lambda)\|_t = \left\| \int_0^t F(\xi, \varphi_0(\xi, \alpha, \lambda), T_\mu \varphi_0(\xi, \alpha, \lambda), \lambda) d\xi - \psi(\cdot) + \psi(0) \right\|_t.$$

По условию вектор-функция $x = \psi(t)$ является решением системы (1.1), поэтому верно равенство $\dot{\psi}(t) = F(t, \psi(t), T_\mu \psi(t), \lambda)$, откуда после интегрирования будем иметь $\psi(t) - \psi(0) = \int_0^t F(\xi, \psi(\xi), T_\mu \psi(\xi), \lambda) d\xi$.

Тогда $\|\varphi_1(\cdot, \alpha, \lambda) - \varphi_0(\cdot, \alpha, \lambda)\|_t = \Big\| \int_0^t [F(\xi, \varphi_0(\xi, \alpha, \lambda), T_\mu \varphi_0(\xi, \alpha, \lambda), \lambda) -$

$- F(\xi, \psi(\xi), T_\mu \psi(\xi), \lambda)] d\xi \Big\|_t < \varepsilon t \le \varepsilon \omega$.

Заметим, что $\varepsilon \omega = \dfrac{\varepsilon}{K}(K\omega + 1 - 1) < \dfrac{\varepsilon}{K}(e^{K\omega} - 1) \le \dfrac{\delta}{2}$. Кроме того,

$$\|\varphi_1(\cdot,\alpha,\lambda)-\psi(\cdot)\|_t \le \|\varphi_1(\cdot,\alpha,\lambda)-\varphi_0(\cdot,\alpha,\lambda)\|_t + \|\varphi_0(\cdot,\alpha,\lambda)-\psi(\cdot)\|_t \le \frac{\varepsilon}{K}\left(e^{K\omega}-1\right)+\bar{\delta}\le\delta,$$

следовательно, $(t,\varphi_1(t,\alpha,\lambda),\lambda)\in E_1(\delta)$.

Второе приближение зададим аналогично первому:

$$\varphi_2(t,\alpha,\lambda)=\alpha+\int_0^t F\left(\xi,\varphi_1(\xi,\alpha,\lambda),T_\mu\varphi_1(\xi,\alpha,\lambda),\lambda\right)d\xi .$$

Очевидно $\varphi_2(0,\alpha,\lambda)=\alpha$. Так как функция $\varphi_1(t,\alpha,\lambda)$ непрерывна на множестве $V(\bar{\delta})$, точка $(t,\varphi_1(t,\alpha,\lambda),\lambda)\in E_1(\delta)$ и на множестве $E_2(\delta)$ вектор-функция $F(t,x,y,\lambda)$ непрерывна, то вектор-функция $\varphi_2(t,\alpha,\lambda)$ непрерывна на $V(\bar{\delta})$. Найдем оценку для нормы

$$\|\varphi_2(\cdot,\alpha,\lambda)-\varphi_1(\cdot,\alpha,\lambda)\|_t=\left\|\int_0^t\left[F(\xi,\varphi_1(\xi,\alpha,\lambda),T_\mu\varphi_1(\xi,\alpha,\lambda),\lambda)-F(\xi,\varphi_0(\xi,\alpha,\lambda),T_\mu\varphi_0(\xi,\alpha,\lambda),\lambda)\right]d\xi\right\|_t\le$$

$$\le\int_0^t K\max\left\{\|\varphi_1(s,\alpha,\lambda)-\varphi_0(s,\alpha,\lambda)\|_\xi,\|T_\mu(\varphi_1(s,\alpha,\lambda)-\varphi_0(s,\alpha,\lambda))\|_\xi\right\}\Big]d\xi\le K\varepsilon\frac{\omega^2}{2!}.$$

Покажем, что второе приближение не выходит из области $\|x-\psi(\cdot)\|_t\le\delta$,

$$\|\varphi_2(\cdot,\alpha,\lambda)-\psi(\cdot)\|_t\le\|\varphi_2(\cdot,\alpha,\lambda)-\varphi_1(\cdot,\alpha,\lambda)\|_t+\|\varphi_1(\cdot,\alpha,\lambda)-\psi(\cdot)\|_t\le$$

$$\le K\varepsilon\frac{\omega^2}{2!}+\varepsilon\omega+\bar{\delta}<\frac{\varepsilon}{K}\left(e^{K\omega}-1\right)+\bar{\delta}\le\delta .$$

Таким образом, точка $(t,\varphi_2(t,\alpha,\lambda),\lambda)\in E_1(\delta)$.

Третье приближение зададим равенством

$$\varphi_3(t,\alpha,\lambda)=\alpha+\int_0^t F\left(\xi,\varphi_2(\xi,\alpha,\lambda),T_\mu\varphi_2(\xi,\alpha,\lambda),\lambda\right)d\xi .$$

Функция $\varphi_3(t,\alpha,\lambda)$ непрерывна на множестве $V(\bar{\delta})$, $\|\varphi_3(\cdot,\alpha,\lambda)-\varphi_2(\cdot,\alpha,\lambda)\|_t\le K^2\varepsilon\frac{\omega^3}{3!}$ и $\|\varphi_3(\cdot,\alpha,\lambda)-\psi(\cdot)\|_t<\delta$. Следовательно, точка $(t,\varphi_3(t,\alpha,\lambda),\lambda)\in E_1(\delta)$.

Продолжая далее, получим функциональную последовательность приближений $\{\varphi_k(t,\alpha,\lambda)\}$, где

$$\varphi_k(t, \alpha, \lambda) = \alpha + \int\limits_0^t F\big(\xi, \varphi_{k-1}(\xi, \alpha, \lambda), T_\mu \varphi_{k-1}(\xi, \alpha, \lambda), \lambda\big) d\xi \quad (k = 1, 2, \ldots), \qquad (*)$$

определенную на множестве $V(\bar{\delta})$. Докажем, что последовательность сходится к некоторой функции $\varphi(t, \alpha, \lambda)$. Для этого составим ряд $\|\varphi_0(\cdot,\alpha,\lambda)\|_t + \big[\|\varphi_1(\cdot,\alpha,\lambda)\|_t - \|\varphi_0(\cdot,\alpha,\lambda)\|_t\big] + \ldots + \big[\|\varphi_k(\cdot,\alpha,\lambda)\|_t - \|\varphi_{k-1}(\cdot,\alpha,\lambda)\|_t\big] + \ldots$.

Данный ряд равномерно на множестве $V(\bar{\delta})$ сходится по признаку Вейерштрасса, так как, начиная со второго члена, можарируется сходящимся рядом $\dfrac{\varepsilon}{K}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{K^k \omega^k}{k!}$. Следовательно, функциональная последовательность равномерно сходится на множестве $V(\bar{\delta})$. Обозначим ее предельную функцию через $\varphi(t, \alpha, \lambda)$. Так как все функции последовательности $\{\varphi_k(t, \alpha, \lambda)\}$ непрерывны на множестве $V(\bar{\delta})$, то и функция $\varphi(t, \alpha, \lambda)$ также будет непрерывной на множестве $V(\bar{\delta})$.

Докажем, что функция $x = \varphi(t, \alpha, \lambda)$ будет решением системы (1.1). Действительно, так как для любого k $\varphi_k(0, \alpha, \lambda) = \alpha$, то $\varphi(0, \alpha, \lambda) = \alpha$, следовательно функция $x = \varphi(t, \alpha, \lambda)$ удовлетворяет начальным условиям. Покажем, что эта функция обращает систему (1.1) в тождество.

Так как функция $F(t, x, y, \lambda)$ определена и непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $E_2(\delta)$, то она равномерно непрерывна на этом множестве. Поэтому

$$(\forall \varepsilon > 0)\big(\exists \delta^* > 0\big)\big(\forall (t, x, y, \lambda) \in E_2(\delta)\big)\Big(\big\|x - \psi(\cdot)\big\|_t \le \delta^* \wedge \big\|y - T_\mu \psi(\cdot)\big\|_t \le \delta^* \to$$

$$\to \big\|F(\cdot, x, y, \lambda) - F(\cdot, \psi(\cdot), T_\mu \psi(\cdot), \lambda)\big\|_t < \varepsilon\Big).$$

Последовательность $\{\varphi_k(t, \alpha, \lambda)\}$ равномерно на множестве $V(\bar{\delta})$ сходится к функции $\varphi(t, \alpha, \lambda)$, следовательно, найдется такой номер k_0, что для любых номеров $k > k_0$ и точек $(t, \alpha, \lambda) \in V(\delta)$ выполняется неравенство $\|\varphi_k(\cdot,\alpha,\lambda)-\varphi(\cdot,\alpha,\lambda)\|_t<\delta^*$, тогда верно неравенство $\left\|F\left(\cdot,\ \varphi_k(\cdot,\ \alpha,\ \lambda),\ T_\mu\varphi_k(\cdot,\ \alpha,\ \lambda),\ \lambda\right)-F\left(\cdot,\ \varphi(\cdot,\ \alpha,\ \lambda),\ T_\mu\varphi(\cdot,\ \alpha,\ \lambda),\ \lambda\right)\right\|_t<\varepsilon$.

При $k>k_0$ получим неравенство

$$\left\|\int_0^t F\left(\xi,\varphi_k(\xi,\alpha,\lambda),T_\mu\varphi_k(\xi,\alpha,\lambda),\lambda\right)d\xi-\int_0^t F\left(\xi,\varphi(\xi,\alpha,\lambda),T_\mu\varphi(\xi,\alpha,\lambda),\lambda\right)d\xi\right\|_t<\varepsilon t\le\varepsilon\omega.$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$, получим

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^t F\left(\xi,\ \varphi_k(\xi,\ \alpha,\ \lambda),\ T_\mu\varphi_k(\xi,\ \alpha,\ \lambda),\ \lambda\right)d\xi=\int_0^t F\left(\xi,\ \varphi(\xi,\ \alpha,\ \lambda),\ T_\mu\varphi(\xi,\ \alpha,\ \lambda),\ \lambda\right)d\xi\ .$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$ в равенстве (*), получим $\varphi(t,\ \alpha,\ \lambda)=\alpha+\int_0^t F\left(\xi,\varphi(\xi,\ \alpha,\ \lambda),\ T_\mu\varphi(\xi,\ \alpha,\ \lambda),\ \lambda\right)d\xi$. Дифференцируя последнее равенство, будем иметь тождество

$$\dot\varphi(t,\ \alpha,\ \lambda)=F\left(t,\ \varphi(t,\ \alpha,\ \lambda),\ T_\mu\varphi(t,\ \alpha,\ \lambda),\ \lambda\right).$$

Таким образом, функция $x=\varphi(t,\ \alpha,\ \lambda)$ является решением системы (1.1), удовлетворяющим начальным условиям $\varphi(0,\ \alpha,\ \lambda)=\alpha$, к тому же эта функция непрерывна на множестве $V(\bar\delta)$.

Докажем далее, что полученное решение $x=\varphi(t,\ \alpha,\ \lambda)$, удовлетворяющее данным начальным условиям, будет единственным.

Допустим, что, кроме решения $x=\varphi(t,\ \alpha,\ \lambda)$, существует другое решение $x=\bar\varphi(t,\ \alpha,\ \lambda)$, причем $\varphi(0,\ \alpha,\ \lambda)=\bar\varphi(0,\ \alpha,\ \lambda)=\alpha$ и есть значения $t\in[0,\ \omega]$, при которых $\varphi(t,\ \alpha,\ \lambda)\ne\bar\varphi(t,\ \alpha,\ \lambda)$. Рассмотрим функцию $\Phi(t,\ \alpha,\ \lambda)=|\varphi(t,\ \alpha,\ \lambda)-\bar\varphi(t,\ \alpha,\ \lambda)|$. Функция $\Phi(t,\ \alpha,\ \lambda)$ непрерывна и не равна тождественно нулю на промежутке $[0,\ \omega]$. Пусть $\Phi(t,\ \alpha,\ \lambda)\ne0$ при значениях t, близких к 0. Рассмотрим отрезок $[0,\ h]$, где h – достаточно малое число, $0<h<\omega$. По определению функции, $\Phi(t,\ \alpha,\ \lambda)\ge0$ на промежутке $(0,\ h)$. Так как $\Phi(t,\ \alpha,\ \lambda)$ – непрерывная функция, то на сегменте $[0,\ h]$ она достигает своего максимума $\theta > 0$ при некотором значении $t = t^*$, где $0 < t^* \le h$.

Так как $x = \varphi(t,\ \alpha,\ \lambda)$ и $x = \overline{\varphi}(t,\ \alpha,\ \lambda)$ – решения системы (1.1), то имеем тождества

$$\frac{d\varphi(t,\alpha,\lambda)}{dt} = F(t,\varphi(t,\alpha,\lambda),T_\mu\varphi(t,\alpha,\lambda),\lambda),\ \frac{d\overline{\varphi}(t,\alpha,\lambda)}{dt} = F(t,\overline{\varphi}(t,\alpha,\lambda),T_\mu\overline{\varphi}(t,\alpha,\lambda),\lambda),$$

откуда

$$\frac{d(\varphi(t,\alpha,\lambda)-\overline{\varphi}(t,\alpha,\lambda))}{dt} = F(t,\varphi(t,\alpha,\lambda),T_\mu\varphi(t,\alpha,\lambda),\lambda)-F(t,\overline{\varphi}(t,\alpha,\lambda),T_\mu\overline{\varphi}(t,\alpha,\lambda),\lambda).$$

Интегрируя предыдущее равенство в пределах от 0 до t $(0 \le t \le h)$, получим

$$\varphi(t,\alpha,\lambda)-\overline{\varphi}(t,\alpha,\lambda)=\int_0^t\left[F(s,\varphi(s,\alpha,\lambda),T_\mu\varphi(s,\alpha,\lambda),\lambda)-F(s,\overline{\varphi}(s,\alpha,\lambda),T_\mu\overline{\varphi}(s,\alpha,\lambda),\lambda)\right]ds.$$

Оценим норму $\|\varphi(\cdot,\ \alpha,\ \lambda)-\overline{\varphi}(\cdot,\ \alpha,\ \lambda)\|_t$,

$$\|\varphi(\cdot,\ \alpha,\ \lambda)-\overline{\varphi}(\cdot,\ \alpha,\ \lambda)\|_t \le K\|\varphi(\cdot,\ \alpha,\ \lambda)-\overline{\varphi}(\cdot,\ \alpha,\ \lambda)\|_h\, t = K\theta\, t.$$

Таким образом, $\|\varphi(\cdot,\alpha,\lambda)-\overline{\varphi}(\cdot,\alpha,\lambda)\|_t \le K\theta h$ при $0 \le t \le h$. Следовательно, при $t = t^*$ имеем $\theta \le K\theta h$. Так как h можно выбрать сколь угодно малым, возьмем $h < \dfrac{1}{K}$. Тогда из предыдущего неравенства получим $\theta < \theta$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает единственность. Теорема доказана полностью.

Отметим важное следствие доказанной теоремы.

Следствие 1.1. *Пусть выполнены условия:*

1. вектор-функция $F(t,x,y,\lambda)$ *определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с постоянной* $K > 0$ *на множестве* $[0,\ \omega]\times D(\delta_0)\times D(\delta_0)\times \Lambda(\delta_0)$*;*

2. система (1.1) при $\lambda = 0$ *имеет решение* $x \equiv 0$.

Тогда существует $\bar{\delta} > 0$*, что для любой точки* (α, λ)*:* $|\alpha| \le \bar{\delta}$*,* $|\lambda| \le \bar{\delta}$ *система (1.1) имеет единственное решение* $x = \varphi(t, \alpha, \lambda)$ *с начальным условием* $\varphi(0, \alpha, \lambda) = \alpha$*, определенное и непрерывное на множестве* $\{(t, \alpha, \lambda) | \, t \in [0, \omega], |\alpha| \le \bar{\delta}, |\lambda| \le \bar{\delta}\}$ *и* $\|\varphi(\cdot, \alpha, \lambda)\|_{\omega} \le \delta_0$.

Теорема 1.2. *Пусть вектор-функция* $F(t, x, y, \lambda)$ *удовлетворяет условию Липшица с постоянной* $K > 0$ *на множестве* $[0, \omega] \times D(\delta_0) \times D(\delta_0) \times \Lambda(\delta_0)$ *и* $F(t, 0, 0, \lambda) \equiv 0$*,* $x = x(t, \mu, \alpha, \lambda)$ *– малое решение системы (1.1), тогда верно неравенство* $\|x(\cdot, \mu, \alpha, \lambda)\|_{\omega} \le C|\alpha|$*, где* $C = e^{K\omega}$.

Доказательство. Решение дифференциального уравнения (1.1) запишем в виде $x(t, \mu, \alpha, \lambda) = \alpha + \int_0^t F(s, x(s, \mu, \alpha, \lambda), T_\mu x(s, \mu, \alpha, \lambda), \lambda) ds$.

Тогда $\|x(\cdot, \mu, \alpha, \lambda)\|_t \le |\alpha| + K \int_0^t \|x(\cdot, \mu, \alpha, \lambda)\|_s \, ds$, откуда, используя неравенство Гронуолла-Беллмана, имеем $\|x(\cdot, \mu, \alpha, \lambda)\|_t \le |\alpha| e^{Kt}$. Следовательно, $\|x(\cdot, \mu, \alpha, \lambda)\|_{\omega} \le C|\alpha|$, $C = e^{K\omega}$.

§1.3. Исследование свойств решений: оценка и структура

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + \widetilde{A}(t, \lambda)x + \widetilde{B}(t, \lambda)T_\mu x + \widetilde{f}(t, \lambda) + f(t, x, T_\mu x, \lambda), \qquad (1.2)$$

где $A(t)$, $\widetilde{A}(t, \lambda)$, $\widetilde{B}(t, \lambda)$– непрерывные $(n \times n)$ – матрицы, $\widetilde{f}(t, \lambda)$, $f(t, x, y, \lambda)$ – непрерывные n-мерные вектор-функции.

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x \ .$$

Фундаментальная матрица $X(t, s)$ этой системы – решение матричного уравнения $\frac{\partial X(t,\, s)}{\partial t} = A(t)X(t,\, s)$ с начальным условием $X(s,\, s) = E$. Матрица $X(t,\, s)$ обладает свойствами:

1) $X(t,\, s) = X(t,\, s_1)X(s_1,\, s)$ для любых $t,\, s,\, s_1 \in R$;

2) $X(t,\, s) = X^{-1}(s,\, t)$;

3) если матрица $A(t)$ ограничена, $\sup\limits_{t \in R} |A(t)| = A_M < \infty$, то

$|X(t,\, s) - E| \le e^{A_M|t-s|} - 1$, $|X(t,\, s)| \le e^{A_M|t-s|}$ для $t,\, s \in R$.

Первое свойство проверяется непосредственной подстановкой в уравнение для фундаментальной матрицы. Второе – следует из первого, если $s_1 = s$, $s = t$. Третье свойство следует из неравенства Гронуолла-Беллмана.

В частности, используя свойство 3), получим $|X(t,\, s)| \le C_X$, $0 \le s \le t$, $0 \le t \le \omega$, $C_X \ge 1$ – некоторое постоянное число.

Теорема 1.3. *Пусть вектор-функция $f(t,\, x,\, y,\, \lambda)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $K > 0$ на множестве $[0,\, \omega] \times D(\delta_0) \times D(\delta_0) \times \Lambda(\delta_0)$ и $f(t,\, 0,\, 0,\, \lambda) \equiv 0$, $x = x(t,\, \mu,\, \alpha,\, \lambda)$ – малое решение системы (1.2), тогда верно неравенство*

$$\|x(\cdot,\, \mu,\, \alpha,\, \lambda)\|_\omega \le \overline{C}\left(|\alpha| + \int_0^\omega \left|\widetilde{f}(s,\, \lambda)\right| ds\right),$$

где $\overline{C} = C_X e^{C_X \int_0^\omega \left(\left|\widetilde{A}(s,\, \lambda)\right| + \left|\widetilde{B}(s,\, \lambda)\right| + K\right) ds}$.

Доказательство. Решение дифференциального уравнения (1.4) запишем в виде

$$x(t,\, \mu,\, \alpha,\, \lambda) = X(t,\, 0)\alpha + \int_0^t X(t,\, s)\left[\widetilde{A}(s,\, \lambda)x + \widetilde{B}(s,\, \lambda)T_\mu x + \widetilde{f}(s,\, \lambda) + f(s,\, x,\, T_\mu x,\, \lambda)\right] ds.$$

Тогда

$$\|x(\cdot,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\|_t \le C_X|\alpha| + C_X\left\{\int_0^t\left|\widetilde{f}(s,\ \lambda)\right|ds + \int_0^t\left(\left|\widetilde{A}(s,\ \lambda)\right| + \left|\widetilde{B}(s,\ \lambda)\right| + K\right)\|x(\cdot,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\|_s\,ds\right\},$$

откуда, используя неравенство Гронуолла-Беллмана, имеем

$$\|x(\cdot,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\|_t \le C_X\left(|\alpha| + \int_0^t\left|\widetilde{f}(s,\ \lambda)\right|ds\right)e^{C_X\int_0^t\left(\left|\widetilde{A}(s,\ \lambda)\right|+\left|\widetilde{B}(s,\ \lambda)\right|+K\right)ds}.$$

Следовательно, $\|x(\cdot,\mu,\alpha,\lambda)\|_\omega \le \overline{C}\left(|\alpha| + \int_0^\omega\left|\widetilde{f}(s,\ \lambda)\right|ds\right)$, $\overline{C} = C_X e^{C_X\int_0^\omega\left(\left|\widetilde{A}(s,\ \lambda)\right|+\left|\widetilde{B}(s,\ \lambda)\right|+K\right)ds}$.

Следствие 1.2. *Пусть вектор-функция $f(t,\ x,\ y,\ \lambda)$ удовлетворяет условию*

$$(\forall x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 \in D(\delta_0))\left(\left|f(t,\ x_1,\ y_1,\ \lambda) - f(t,\ x_2,\ y_2,\ \lambda)\right| \le K(\lambda)\max\left\{|x_1 - x_2|^p,\ |y_1 - y_2|^p\right\}\right),$$

$p \ge 1$, $K(\lambda) \ge 0$, $K(0) = 0$ *и* $f(t,\ 0,\ 0,\ \lambda) \equiv 0$, $x = x(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)$ *– малое решение системы (1.2), тогда верно неравенство*

$$\|x(\cdot,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\|_t \le \hat{C}\left(|\alpha| + \int_0^t\left|\widetilde{f}(s,\ \lambda)\right|ds\right),$$

где $\hat{C} = C_X\exp\left(C_X\int_0^t\left\{\left|\widetilde{A}(s,\ \lambda)\right| + \left|\widetilde{B}(s,\ \lambda)\right| + K(\lambda)\delta_0^{p-1}\right\}ds\right)$.

Следствие 1.3. *Пусть вектор-функция $f(t,\ x,\ y,\ \lambda)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $K > 0$ на множестве $[0,\ \omega] \times D(\delta_0) \times D(\delta_0) \times \Lambda(\delta_0)$ и $f(t,\ 0,\ 0,\ \lambda) \equiv 0$, $x = x(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)$ – малое решение системы (1.2), матрица $A(t) \equiv A = const$ и все её характеристические числа $\rho_i(A)$ имеют отрицательные вещественные части: $\operatorname{Re}\rho_i(A) < 0$, тогда существуют числа $N > 0$ и $0 < \beta < \min_i\left|\operatorname{Re}\rho_i(A)\right|$ такие, что выполняется неравенство*

$$\|x(\cdot,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\|_t \le \overline{\overline{C}}\left(|\alpha| + \int_0^t \left|\widetilde{f}(s,\ \lambda)\right| ds\right),\ \overline{C} = Ne^{Ne^{-\beta t}\int_0^t \left(\left|\widetilde{A}(s,\ \lambda)\right| + \left|\widetilde{B}(s,\ \lambda)\right| + K\right) ds - \beta t}.$$

Докажем теперь теорему, в которой говорится о структуре решения системы (1.2).

Теорема 1.4. *Пусть* $f(t,\ x,\ y,\ \lambda)$ *удовлетворяет условию Липшица с постоянной* $K > 0$ *на множестве* $[0,\ \omega] \times D(\delta_0) \times D(\delta_0) \times \Lambda(\delta_0)$ *и* $f(t,\ 0,\ 0,\ \lambda) \equiv 0$*, тогда малое решение системы (1.2)* $x = x(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)$ *имеет вид*

$$x(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda) = \Phi(t,\ \mu,\ \lambda)\alpha + \overline{\varphi}(t,\ \mu,\ \lambda) + \varphi(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda),$$

где $\Phi(t,\ \mu,\ \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Phi_k(t,\ \mu,\ \lambda)$ – *непрерывная* $(n \times n)$*-матрица,*

$$\Phi_k(t,\ \mu,\ \lambda) = \int_0^t X(t,\ s)\left[\widetilde{A}(s,\ \lambda)\Phi_{k-1}(s,\ \mu,\ \lambda) + \widetilde{B}(s,\ \lambda)T_\mu \Phi_{k-1}(s,\ \mu,\ \lambda)\right] ds \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots),$$

$\Phi_0(t,\ \mu,\ \lambda) \equiv X(t,\ 0)$*;* $\varphi(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)$*,* $\overline{\varphi}(t,\ \mu,\ \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{\varphi}_k(t,\ \mu,\ \lambda)$

– непрерывные n*-мерные вектор-функции,*

$$\varphi_k(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda) = \int_0^t X(t,\ s)\left[\widetilde{A}(s,\ \lambda)\varphi_{k-1}(s,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda) + \widetilde{B}(s,\ \lambda)T_\mu \varphi_{k-1}(s,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\right] ds,$$

$$\overline{\varphi}_k(t,\ \mu,\ \lambda) = \int_0^t X(t,\ s)\left[\widetilde{A}(s,\ \lambda)\overline{\varphi}_{k-1}(s,\ \mu,\ \lambda) + \widetilde{B}(s,\ \lambda)T_\mu \overline{\varphi}_{k-1}(s,\ \mu,\ \lambda)\right] ds$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots),\ \varphi_0(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda) = \int_0^t X(t,\ s) f\left(s,\ x(s,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda),\ T_\mu x(s,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda),\ \lambda\right) ds,$$

$$\overline{\varphi}_0(t,\ \mu,\ \lambda) = \int_0^t X(t,\ s)\widetilde{f}(s,\ \lambda) ds,$$

матрица $\Phi(t,\ \mu,\ \lambda)$ *и вектор-функции* $\overline{\varphi}(t,\ \mu,\ \lambda)$ *и* $\varphi(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\left\|\Phi(\cdot,\ \mu,\ \lambda)\right\|_t \le C_X\left\{1+\frac{\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t+\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t}{\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t+\left\|E_{\mu'}\right\|_t\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t}\left[e^{\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t+\left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t\right)C_X t}-1\right]\right\},$$

$$\left\|\overline{\varphi}(\cdot,\ \mu,\ \lambda)\right\|_t \le \frac{\left\|\widetilde{f}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t}{\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t+\left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t}\left(e^{\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t+\left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t\right)C_X t}-1\right),$$

$$\left\|\varphi(\cdot,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\right\|_t \le \frac{K\overline{C}\left(|\alpha|+\left\|\widetilde{f}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t t\right)}{\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t+\left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t}\left(e^{\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t+\left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t\right)C_X t}-1\right).$$

Доказательство. Пусть $x = x(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)$ – малое решение системы (1.2). Запишем это решение в виде

$$x(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda) = X(t,\ 0)\alpha + \int_0^t X(t,\ s)\left[\widetilde{A}(s,\ \lambda)x + \widetilde{B}(s,\ \lambda)T_\mu x + \widetilde{f}(s,\ \lambda) + f(s,\ x,\ T_\mu x,\ \lambda)\right]ds.$$

Обозначим $\Phi_0(t,\ \mu,\ \lambda) \equiv X(t,\ 0)$, $\overline{\varphi}_0(t,\ \mu,\ \lambda) = \int_0^t X(t,\ s)\widetilde{f}(s,\ \lambda)ds$ (для удобства записей рекуррентных соотношений),

$$\varphi_0(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda) = \int_0^t X(t,\ s) f\left(s,\ x(s,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda),\ T_\mu x(s,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda),\ \lambda\right)ds,$$

$$\varphi_0^*(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda) = \int_0^t X(t,\ s)\left[\widetilde{A}(s,\ \lambda)x(s,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda) + \widetilde{B}(s,\ \lambda)T_\mu x(s,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\right]ds.$$

Найдём оценки норм этих вектор-функций и матрицы:

$$\left\|\Phi_0(\cdot,\ \mu,\ \lambda)\right\|_t = C_X,$$

$$\left\|\overline{\varphi}_0(\cdot,\ \mu,\ \lambda)\right\|_t = \left\|\int_0^t X(t,\ s)\widetilde{f}(s,\ \lambda)ds\right\|_t \le C_X\int_0^t \left\|\widetilde{f}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t ds \le C_X\left\|\widetilde{f}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t t,$$

$$\left\|\varphi_0(\cdot,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\right\|_t = \left\|\int_0^t X(t,\ s) f\left(s,\ x(s),\ T_\mu x(s),\ \lambda\right)ds\right\|_t \le \left\|x(\cdot,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\right\|_t C_X K t,$$

$$\left\|\varphi_0^*(\cdot,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\right\|_t \le C_X\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t + \left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t\right)\left\|x(\cdot,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\right\|_t t.$$

Решение системы (1.2) будет иметь вид

$$x(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)=\Phi_0(t,\ \mu,\ \lambda)\alpha+\overline{\varphi}_0(t,\ \mu,\ \lambda)+\varphi_0(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)+\varphi_0^*(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda).$$

Так как $x=x(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)$ – известная вектор-функция, то её можно подставить в вектор-функцию $\varphi_0^*(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)$, получим

$$\varphi_0^*(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)=\int_0^t X(t,\ s)\widetilde{A}(s,\ \lambda)\{\Phi_0(s,\ \mu,\ \lambda)\alpha+\overline{\varphi}_0(s,\ \mu,\ \lambda)+\varphi_0(s,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\}ds+$$

$$+\int_0^t X(t,\ s)\widetilde{B}(s,\ \lambda)T_\mu\{\Phi_0(s,\ \mu,\ \lambda)\alpha+\overline{\varphi}_0(s,\ \mu,\ \lambda)+\varphi_0(s,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\}ds+$$

$$+\int_0^t X(t,\ s)\left[\widetilde{A}(s,\ \lambda)\varphi_0^*(s,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)+\widetilde{B}(s,\ \lambda)T_\mu\varphi_0^*(s,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\right]ds\ .$$

Обозначим

$$\Phi_1(t,\ \mu,\ \lambda)=\int_0^t X(t,\ s)\left\{\widetilde{A}(s,\ \lambda)\Phi_0(s,\ \mu,\ \lambda)+\widetilde{B}(s,\ \lambda)T_\mu\Phi_0(s,\ \mu,\ \lambda)\right\}ds,$$

$$\overline{\varphi}_1(t,\ \mu,\ \lambda)=\int_0^t X(t,\ s)\left\{\widetilde{A}(s,\ \lambda)\overline{\varphi}_0(s,\ \mu,\ \lambda)+\widetilde{B}(s,\ \lambda)T_\mu\overline{\varphi}_0(s,\ \mu,\ \lambda)\right\}ds$$

$$\varphi_1(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)=\int_0^t X(t,\ s)\left\{\widetilde{A}(s,\ \lambda)\varphi_0(s,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)+\widetilde{B}(s,\ \lambda)T_\mu\varphi_0(s,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\right\}ds\ ,$$

$$\varphi_1^*(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)=\int_0^t X(t,\ s)\left\{\widetilde{A}(s,\ \lambda)\varphi_0^*(s,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)+\widetilde{B}(s,\ \lambda)T_\mu\varphi_0^*(s,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\right\}ds\ .$$

Найдём оценки норм полученных вектор-функций и матрицы:

$$\left\|\Phi_1(\cdot,\ \mu,\ \lambda)\right\|_t\le C_X^2\int_0^t\left(\left|\widetilde{A}(s,\ \lambda)\right|+\left|\widetilde{B}(s,\ \lambda)\right|\right)ds\le C_X^2\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t+\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t\right)t\ ,$$

$$\left\|\overline{\varphi}_1(\cdot,\ \mu,\ \lambda)\right\|_t\le C_X\int_0^t\left\{\left|\widetilde{A}(s,\ \lambda)\right|\left\|\overline{\varphi}_0(\cdot,\ \mu,\ \lambda)\right\|_s+\left|\widetilde{B}(s,\ \lambda)\right|\left\|T_\mu\overline{\varphi}_0(\cdot,\ \mu,\ \lambda)\right\|_s\right\}ds\le$$

$$\le\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t+\left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t\right)\left\|\widetilde{f}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t\frac{C_X^2\,t^2}{2},$$

$$\left\|\varphi_1(\cdot,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\right\|_t\le\left\{\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t+\left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t\right\}\left\|x(\cdot,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\right\|_t K\frac{C_X^2\,t^2}{2}\ ,$$

$$\left\|\varphi_1^*(\cdot,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\right\|_t\le\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t+\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t\right)\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t+\left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t\right)\left\|x(\cdot,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\right\|_t\frac{C_X^2\,t^2}{2}.$$

Решение системы (1.2) примет вид

$$x(t,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda)=[\Phi_0(t,\,\mu,\,\lambda)+\Phi_1(t,\,\mu,\,\lambda)]\alpha+\overline{\varphi}_0+\overline{\varphi}_1+\varphi_0+\varphi_1+\varphi_1^*.$$

Продолжая этот процесс, на k-том шаге будем иметь выражение

$$x(t,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda)=\sum_{r=0}^{k}\Phi_r(t,\,\mu,\,\lambda)\alpha+\sum_{r=0}^{k}\overline{\varphi}_r(t,\,\mu,\,\lambda)+\sum_{r=0}^{k}\varphi_r(t,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda)+\varphi_k^*(t,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda),$$

где матрица $\Phi_r(t,\mu,\lambda)$ и вектор-функции $\overline{\varphi}_r(t,\mu,\lambda)$, $\varphi_r(t,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda)$ и $\varphi_k^*(t,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda)$ определяются по рекуррентным формулам:

$$\Phi_r(t,\,\mu,\,\lambda)=\int_0^t X(t,\,s)\left\{\widetilde{A}(s,\,\lambda)\Phi_{r-1}(s,\,\mu,\,\lambda)+\widetilde{B}(s,\,\lambda)T_\mu\Phi_{r-1}(s,\,\mu,\,\lambda)\right\}ds,$$

$$\left\|\Phi_r(\cdot,\,\mu,\,\lambda)\right\|_t\le C_X\int_0^t\left\{\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_s\left\|\Phi_{r-1}(\cdot,\,\mu,\,\lambda)\right\|_s+\left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_s\left\|\Phi_{r-1}(\cdot,\,\mu,\,\lambda)\right\|_s\right\}ds\le$$

$$\le C_X\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t+\left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t\right)\int_0^t\left\|\Phi_{r-1}(\cdot,\,\mu,\,\lambda)\right\|_s ds\le$$

$$\le\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t+\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t\right)\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t+\left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t\right)^{\mathrm{r}-1}\frac{C_X^{r+1}t^r}{r!},$$

$$\overline{\varphi}_r(t,\,\mu,\,\lambda)=\int_0^t X(t,\,s)\left\{\widetilde{A}(s,\,\lambda)\overline{\varphi}_{r-1}(s,\,\mu,\,\lambda)+\widetilde{B}(s,\,\lambda)T_\mu\overline{\varphi}_{r-1}(s,\,\mu,\,\lambda)\right\}ds,$$

$$\left\|\overline{\varphi}_r(\cdot,\,\mu,\,\lambda)\right\|_t\le C_X\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t+\left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t\right)\int_0^t\left\|\overline{\varphi}_{r-1}(\cdot,\,\mu,\,\lambda)\right\|_s ds\le$$

$$\le\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t+\left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t\right)^r\left\|\widetilde{f}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t\frac{C_X^{r+1}t^{r+1}}{(r+1)!},$$

$$\varphi_r(t,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda)=\int_0^t X(t,\,s)\left\{\widetilde{A}(s,\,\lambda)\varphi_{r-1}(s,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda)+\widetilde{B}(s,\,\lambda)T_\mu\varphi_{r-1}(s,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda)\right\}ds,$$

$$\left\|\varphi_r(\cdot,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda)\right\|_t\le C_X\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t+\left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t\right)\int_0^t\left\|\varphi_{r-1}(\cdot,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda)\right\|_s ds\le$$

$$\le\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t+\left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t\right)^r\left\|x(\cdot,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda)\right\|_t K\frac{C_X^{r+1}t^{r+1}}{(r+1)!},$$

$$(r=1,\,2,\,...,\,k),$$

$$\varphi_k^*(t,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda)=\int_0^t X(t,\,s)\left\{\widetilde{A}(s,\,\lambda)\varphi_{k-1}^*(s,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda)+\widetilde{B}(s,\,\lambda)T_\mu\varphi_{k-1}^*(s,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda)\right\}ds,$$

$$\left\|\varphi_k^*(\cdot,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda)\right\|_t \le \left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t + \left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t\right)\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t\right)^k \left\|x(\cdot,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda)\right\|_t \frac{C_X^{k+1}t^{k+1}}{(k+1)!}.$$

В пределе при $k \to +\infty$, получим формулу

$$x(t,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda) = \sum_{r=0}^{+\infty}\Phi_r(t,\,\mu,\,\lambda)\alpha + \sum_{r=0}^{+\infty}\overline{\varphi}_r(t,\,\mu,\,\lambda) + \sum_{r=0}^{+\infty}\varphi_r(t,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda) + \varphi_{+\infty}^*(t,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda).$$

Докажем равномерную сходимость полученных рядов.

Матричный ряд $\sum_{r=0}^{+\infty}\Phi_r(t,\,\mu,\,\lambda)$ сходится равномерно, так как мажорируется по норме сходящимся рядом

$$C_X + C_X\sum_{r=1}^{+\infty}\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t + \left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t\right)\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t\right)^{\mathrm{r}\text{-}1}\frac{C_X^r t^r}{r!} =$$

$$= C_X + C_X\frac{\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t + \left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t}{\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t}\sum_{r=1}^{+\infty}\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t\right)^{\mathrm{r}}\frac{C_X^r t^r}{r!} =$$

$$= C_X\left\{1 + \frac{\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t + \left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t}{\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t}\left[e^{\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t\right)C_X t} - 1\right]\right\},$$

сумму ряда обозначим матрицей $\Phi(t,\,\mu,\,\lambda)$. Исходя из предыдущих равенств, можно сделать вывод, что матрица $\Phi(t,\,\mu,\,\lambda)$ ограничена

$$\left\|\Phi(\cdot,\,\mu,\,\lambda)\right\|_t \le C_X\left\{1 + \frac{\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t + \left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t}{\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t}\left[e^{\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t\right)C_X t} - 1\right]\right\}.$$

Ряд $\sum_{r=0}^{+\infty}\overline{\varphi}_r(t,\,\mu,\,\lambda)$ так же сходится, так как его компоненты ограничены по норме компонентами ряда

$$\sum_{r=0}^{+\infty}\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t\right)^r\left\|\widetilde{f}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t\frac{C_X^{r+1}t^{r+1}}{(r+1)!} =$$

$$= \frac{\left\|\widetilde{f}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t}{\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t}\sum_{r=0}^{+\infty}\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t\right)^{r+1}\frac{C_X^{r+1}t^{r+1}}{(r+1)!} =$$

$$= \frac{\left\|\widetilde{f}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t}{\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t}\left(e^{\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\,\lambda)\right\|_t\right)C_X t} - 1\right),$$

сумму ряда обозначим вектор-функцией $\overline{\varphi}(t,\ \mu,\ \lambda)$, тогда вектор-функция $\overline{\varphi}(t,\ \mu,\ \lambda)$ ограничена:

$$\left\|\overline{\varphi}(\cdot,\ \mu,\ \lambda)\right\|_t \le \frac{\left\|\widetilde{f}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t}{\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t}\left(e^{\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t\right)C_X t} - 1\right).$$

Аналогично сходится ряд $\sum\limits_{r=0}^{+\infty}\varphi_r(t,\ \mu,\alpha,\ \lambda)$ и его сумма $\varphi(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)$ так же ограничена

$$\left\|\varphi(\cdot,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\right\|_t \le \frac{\left\|x(\cdot,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\right\|_t K}{\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t}\left(e^{\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t\right)C_X t} - 1\right) \le$$

$$\le \frac{K\overline{C}\left(|\alpha| + \left\|\widetilde{f}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t t\right)}{\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t}\left(e^{\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t\right)C_X t} - 1\right).$$

Вектор-функция $\varphi^*_{+\infty}(t,\ \mu,\alpha,\ \lambda)$ тождественно обращается в нуль, так как

$$\left\|\varphi^*_{+\infty}(\cdot,\ \mu,\alpha,\ \lambda)\right\|_t = \lim_{k\to+\infty}\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t + \left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t\right)\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t\right)^k \left\|x(\cdot,\ \mu,\alpha,\ \lambda)\right\|_t \frac{C_X^{k+1}t^{k+1}}{(k+1)!} = 0.$$

Таким образом, получили представление решения в виде

$$x(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda) = \Phi(t,\ \mu,\ \lambda)\alpha + \overline{\varphi}(t,\ \mu,\ \lambda) + \varphi(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda).$$

Теорема доказана.

Следствие 1.4. *Если непрерывные матрицы* $\widetilde{A}(t,\ \lambda)$ *и* $\widetilde{B}(t,\ \lambda)$ *и вектор-функции* $\widetilde{f}(t,\ \lambda)$ *и* $f(t,\ x,\ y,\ \lambda)$ *таковы, что* $\widetilde{A}(t,\ 0) \equiv 0$*,* $\widetilde{B}(t,\ 0) \equiv 0$*,* $\widetilde{f}(t,\ 0) \equiv 0$*,* $f(t,\ x,\ y,\ \lambda)$ *удовлетворяет условию Липшица с постоянной* $K > 0$ *на множестве* $[0,\ \omega]\times D(\delta_0)\times D(\delta_0)\times\Lambda(\delta_0)$ *и* $f(t,\ 0,\ 0,\ \lambda) \equiv 0$*, то выполнены тождества*

$$\Phi(t,\ \mu,\ 0) \equiv X(t,\ 0),\ \overline{\varphi}(t,\ \mu,\ 0) \equiv 0,\ \varphi(t,\ \mu,\ 0,\ 0) \equiv 0,$$

$$\Phi(0,\ \mu,\ \lambda) \equiv E,\ \overline{\varphi}(0,\ \mu,\ \lambda) \equiv 0,\ \varphi(0,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda) \equiv 0.$$

Доказательство следует из теоремы 1.4.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + F_1(t,\, x,\, T_\mu x,\, \lambda)x + F_2(t,\, x,\, T_\mu x,\, \lambda)T_\mu x + \widetilde{f}(t,\, \lambda), \tag{1.3}$$

где $F_1(t,\, x,\, y,\, \lambda)$, $F_2(t,\, x,\, y,\, \lambda)$ – непрерывные по совокупности своих аргументов $(n \times n)$ – матрицы, $\widetilde{f}(t,\, \lambda)$ – непрерывная n-мерная вектор-функция.

Теорема 1.5. *Малое решение системы (1.3) $x = x(t,\, \mu,\, \alpha,\, \lambda)$ имеет вид*

$$x(t,\, \mu,\, \alpha,\, \lambda) = \Phi(t,\, \mu,\, \alpha,\, \lambda)\alpha + \overline{\varphi}(t,\, \mu,\, \lambda),$$

где $\Phi(t,\, \mu,\, \alpha,\, \lambda) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \Phi_k(t,\, \mu,\, \alpha,\, \lambda)$ – *непрерывная* $(n \times n)$*-матрица,*

$$\Phi_k(t, \mu, \alpha, \lambda) = \int\limits_0^t X(t,s)\left[F_1(s, x, T_\mu x, \lambda)\Phi_{k-1}(s, \mu, \alpha, \lambda) + F_2(s, x, T_\mu x, \lambda)T_\mu \Phi_{k-1}(s, \mu, \alpha, \lambda)\right]ds$$

$(k = 1,\, 2,\, ...)$, $\Phi_0(t,\, \mu,\, \alpha,\, \lambda) \equiv X(t,\, 0)$; $\overline{\varphi}(t,\, \mu,\, \lambda) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \overline{\varphi}_k(t,\, \mu,\, \lambda)$ – *непрерывная* n*-мерная вектор-функция,*

$$\overline{\varphi}_k(t, \mu, \lambda) = \int\limits_0^t X(t,s)\left[F_1(s, x, T_\mu x, \lambda)\overline{\varphi}_{k-1}(s, \mu, \lambda) + F_2(s, x, T_\mu x, \lambda)T_\mu \overline{\varphi}_{k-1}(s, \mu, \lambda)\right]ds$$

$$(k = 1,\, 2,\, ...),\; \overline{\varphi}_0(t,\, \mu,\, \lambda) = \int\limits_0^t X(t,\, s)\widetilde{f}(s,\, \lambda)ds.$$

Для матрицы $\Phi(t,\, \mu,\, \alpha,\, \lambda)$ *и вектор-функции* $\overline{\varphi}(t,\, \mu,\, \lambda)$ *верны оценки:*

$$\left\|\Phi(\cdot,\, \mu,\, \alpha,\, \lambda)\right\|_t \le C_X\left\{1 + \frac{\|F_1\| + \|F_2\|}{\|F_1\| + \|E_{\mu'}\|\|F_2\|}\left[e^{\left(\|F_1\| + \|E_{\mu'}\|\|F_2\|\right)C_X t} - 1\right]\right\},$$

$$\left\|\overline{\varphi}(\cdot,\, \mu,\, \lambda)\right\|_t \le \frac{\left\|\widetilde{f}(\cdot,\, \lambda)\right\|_t}{\|F_1\| + \|E_{\mu'}\|\|F_2\|}\left(e^{\left(\|F_1\| + \|E_{\mu'}\|\|F_2\|\right)C_X t} - 1\right).$$

Доказательство повторяет доказательство теоремы 1.4.

Теорема 1.6. *Если в системе (1.2)* $\widetilde{A}(t,\lambda)=A^{(p_1)}(t,\lambda)+O\left(|\lambda|^{p_1}\right)$, $\widetilde{B}(t,\lambda)=B^{(p_2)}(t,\lambda)+O\left(|\lambda|^{p_2}\right)$, $\widetilde{f}(t,\lambda)=\widetilde{f}^{(p_3)}(t,\lambda)+o\left(|\lambda|^{p_3}\right)$, $f(t,x,y,\lambda)=f^{(q)}(t,x,y,\lambda)+o\left(|z|^q\right)$, *где* $z=(x,y,\lambda)$, $A^{(p_1)}(t,\lambda)$, $B^{(p_2)}(t,\lambda)$, $\widetilde{f}^{(p_3)}(t,\lambda)$ *– формы порядка* p_1, p_2, p_3 *по* λ, $f^{(q)}(t,x,y,\lambda)$ *– форма порядка* q *по* z*, то малое решение системы (1.2) представимо в виде*

$$x(t,\mu,\alpha,\lambda)=\left[X(t,0)+H^{(p_{12})}(t,\mu,\lambda)\right]\alpha+g^{(p_3)}(t,\lambda)+\bar{f}^{(q)}(t,\mu,\hat{z})+o\left(|\lambda|^{p_3}\right)+O\left(|\lambda|^{p_{12}}\right)\alpha+o\left(|\hat{z}|^q\right),$$

где $\hat{z}=(\alpha,\lambda)$, $p_{12}=\min\{p_1,p_2\}$, $H^{(p_{12})}(t,\mu,\lambda)$, $g^{(p_3)}(t,\lambda)$ *– формы порядка* p_{12} *и* p_3 *по* λ, $\bar{f}^{(q)}(t,\hat{z})$ *– форма порядка* q *по* $\hat{z}$.

Доказательство. Пусть $x=x(t,\mu,\alpha,\lambda)$ – малое решение системы (1.2). Из теоремы 1.4. получим равенство

$$\Phi(t,\mu,\lambda)=X(t,0)+\int_0^t X(t,s)\left[A^{(p_1)}(s,\lambda)X(s,0)+B^{(p_2)}(s,\lambda)T_\mu X(s,0)\right]ds+\left[O\left(|\lambda|^{p_1}\right)+O\left(|\lambda|^{p_1}\right)\right]O\left(|\lambda|^{\min\{p_1,\,p_2\}}\right)=$$

$$=X(t,0)+\int_0^t X(t,s)\left[A^{(p_1)}(s,\lambda)X(s,0)+B^{(p_2)}(s,\lambda)T_\mu X(s,0)\right]ds+O\left(|\lambda|^{2\min\{p_1,\,p_2\}}\right).$$

Обозначим $p_{12}=\min\{p_1,p_2\}$,

$$\int_0^t X(t,s)\left[A^{(p_1)}(s,\lambda)X(s,0)+B^{(p_2)}(s,\lambda)T_\mu X(s,0)\right]ds=H^{(p_{12})}(t,\mu,\lambda)+O\left(|\lambda|^{p_{12}}\right),$$

следовательно, имеем $\Phi(t,\mu,\lambda)=X(t,0)+H^{(p_{12})}(t,\mu,\lambda)+O\left(|\lambda|^{p_{12}}\right)$.

Аналогично, получим выражения

$$\overline{\varphi}(t,\mu,\lambda)=\int_0^t X(t,s)\widetilde{f}^{(p_3)}(s,\lambda)ds+o\left(|\lambda|^{p_3}\right)=g^{(p_3)}(t,\lambda)+o\left(|\lambda|^{p_3}\right),$$

$$\varphi(t,\mu,\alpha,\lambda)=\int_0^t X(t,s)f^{(q)}\left(s,x(s),T_\mu x(s),\lambda\right)ds+o\left(|z|^q\right)=$$

$$=\int_0^t X(t,s)f^{(q)}\left(s,X(s,0)\alpha,T_\mu X(s,0)\alpha,\lambda\right)ds+o\left(|\hat{z}|^q\right)=\bar{f}^{(q)}(t,\mu,\hat{z})+o\left(|\hat{z}|^q\right).$$

Таким образом, решение системы (1.2) представляется в виде

$$x(t,\mu,\alpha,\lambda)=\left[X(t,0)+H^{(p_{12})}(t,\mu,\lambda)\right]\alpha+g^{(p_3)}(t,\lambda)+\bar{f}^{(q)}(t,\mu,\hat{z})+o\left(|\lambda|^{p_3}\right)+O\left(|\lambda|^{p_{12}}\right)\alpha+o\left(|\hat{z}|^q\right),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1.7. *Пусть*

$$F_1(t,\,x,\,y,\,\lambda)=R_1^{(r_1)}(t,\,\lambda)+R_2^{(r_2)}(t,\,x,\,y)+R_3^{(r_3)}(t,\,x,\,y,\,\lambda)+O\left(|\lambda|^{r_1}\right)+O\left(|\bar z|^{r_2}\right)+O\left(|z|^{r_3}\right),$$

$$F_2(t,\,x,\,y,\,\lambda)=Q_1^{(q_1)}(t,\,\lambda)+Q_2^{(q_2)}(t,\,x,\,y)+Q_3^{(q_3)}(t,\,x,\,y,\,\lambda)+O\left(|\lambda|^{q_1}\right)+O\left(|\bar z|^{q_2}\right)+O\left(|z|^{q_3}\right),$$

$$\widetilde f(t,\lambda)=\widetilde f^{(p)}(t,\lambda)+o\left(|\lambda|^{p}\right),$$

где $z=(x,\,y,\,\lambda)$, $\bar z=(x,\,y)$, $\widetilde f^{(p)}(t,\,\lambda)$, $R_1^{(r_1)}(t,\,\lambda)$ *и* $Q_1^{(q_1)}(t,\,\lambda)$ *– формы порядка* p, r_1 *и* q_1 *по* λ; $R_2^{(r_2)}(t,\,x,\,y)$ *и* $Q_2^{(q_2)}(t,\,x,\,y)$ *– формы порядка* r_2 *и* q_2 *по* x *и* y; $R_3^{(r_3)}(t,\,x,\,y,\,\lambda)$ *и* $Q_3^{(q_3)}(t,\,x,\,y,\,\lambda)$ *– формы порядка* r_3 *и* q_3 *по* x, y *и* λ.

Тогда малое решение системы (1.3) представимо в виде

$$x(t,\,\mu,\alpha,\,\lambda)=\left[X(t,\,0)+H_1^{(p_1)}(t,\,\mu,\,\lambda)+H_2^{(p_2)}(t,\,\mu,\alpha)+H_3^{(p_3)}(t,\,\mu,\,\hat z)\right]\alpha+g^{(p)}(t,\,\lambda)+$$
$$+o\left(|\lambda|^{p}\right)+o\left(|\alpha|^{p_2+1}\right)+\left[O\left(|\lambda|^{p_1}\right)+O\left(|\hat z|^{p_3}\right)\right]\alpha\,,$$

где $\hat z=(\alpha,\,\lambda)$, $p_1=\min\{r_1,\,q_1\}$, $p_2=\min\{r_2,\,q_2\}$, $p_3=\min\{r_3,\,q_3\}$, $H_1^{(p_1)}(t,\,\mu,\,\lambda)$ *и* $g^{(p)}(t,\,\lambda)$ – p_1 *и* p*-формы по* λ, $H_2^{(p_2)}(t,\,\mu,\alpha)$ – p_2*-форма по* α, $H_3^{(p_3)}(t,\,\mu,\,\hat z)$ *– формы порядка* p_3 *по* $\hat z$.

Доказательство. Пусть $x=x(t,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda)$ – малое решение системы (1.3). Из теоремы 1.5 и условия теоремы получим

$$\Phi(t,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda)=X(t,\,0)+\int_0^t X(t,\,s)\left[F_1(s,\,x,\,T_\mu x,\,\lambda)X(s,\,0)+F_2\,(s,\,x,\,T_\mu x,\,\lambda)T_\mu X(s,\,0)\right]ds+\ldots=$$

$$=X(t,\,0)+\int_0^t X(t,\,s)\left[R_1^{(r_1)}(s,\,\lambda)+R_2^{(r_2)}\left(s,\,x(s),\,T_\mu x(s)\right)+R_3^{(r_3)}\left(s,\,x(s),\,T_\mu x(s),\,\lambda\right)\right]X(s,\,0)ds+$$

$$+\int_0^t X(t,\,s)\left[Q_1^{(q_1)}(s,\,\lambda)+Q_2^{(q_2)}\left(s,\,x(s),\,T_\mu x(s)\right)+Q_3^{(q_3)}\left(s,\,x(s),\,T_\mu x(s),\,\lambda\right)\right]T_\mu X(s,\,0)ds+$$

$$+O\left(|\lambda|^{r_1}\right)+O\left(|\bar z|^{r_2}\right)+O\left(|z|^{r_3}\right)+O\left(|\lambda|^{q_1}\right)+O\left(|\bar z|^{q_2}\right)+O\left(|z|^{q_3}\right).$$

Обозначим

$$p_1=\min\{r_1,\,q_1\},\;\; p_2=\min\{r_2,\,q_2\},\;\; p_3=\min\{r_3,\,q_3\}.$$

Матрицу $\Phi(t,\,\mu,\,\alpha,\,\lambda)$ можно записать так

$$\Phi(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)=X(t,\ 0)+\int_0^t X(t,\ s)\left[R_1^{(r_1)}(s,\ \lambda)+R_2^{(r_2)}\left(s,\ X(s,\ 0)\alpha,\ T_\mu X(s,\ 0)\alpha\right)+\right.$$

$$\left.+R_3^{(r_3)}\left(s,\ X(s,\ 0)\alpha,\ T_\mu X(s,\ 0)\alpha,\ \lambda\right)\right]X(s,\ 0)ds+$$

$$+\int_0^t X(t,\ s)\left[Q_1^{(q_1)}(s,\ \lambda)+Q_2^{(q_2)}\left(s,\ X(s,0)\alpha,\ T_\mu X(s,0)\alpha\right)+Q_3^{(q_3)}\left(s,\ X(s,0)\alpha,\ T_\mu X(s,0)\alpha,\ \lambda\right)\right]T_\mu X(s,0)ds+$$

$$+O\left(|\lambda|^{p_1}\right)+O\left(|\alpha|^{p_2}\right)+O\left(|\hat{z}|^{p_3}\right).$$

Введём обозначения

$$\int_0^t X(t,\ s)\left[R_1^{(r_1)}(s,\ \lambda)X(s,\ 0)+Q_1^{(q_1)}(s,\ \lambda)T_\mu X(s,\ 0)\right]ds=H_1^{p_1}(t,\ \lambda)+O\left(|\lambda|^{p_1}\right),$$

$$\int_0^t X(t,\ s)\left[R_2^{(r_2)}\left(s,\ X(s,\ 0)\alpha,\ T_\mu X(s,\ 0)\alpha\right)X(s,\ 0)+Q_2^{(q_2)}\left(s,\ X(s,\ 0)\alpha,\ T_\mu X(s,\ 0)\alpha\right)T_\mu X(s,\ 0)\right]ds=$$

$$=H_2^{p_2}(t,\ \mu,\ \alpha)+O\left(|\alpha|^{p_2}\right),$$

$$\int_0^t X(t,\ s)\left[R_3^{(r_3)}\left(s,\ X(s,0)\alpha,\ T_\mu X(s,0)\alpha,\ \lambda\right)X(s,0)+Q_3^{(q_3)}\left(s,\ X(s,0)\alpha,\ T_\mu X(s,0)\alpha,\ \lambda\right)T_\mu X(s,0)\right]ds=$$

$$=H_3^{p_3}(t,\ \mu,\ \hat{z})+O\left(|\hat{z}|^{p_3}\right).$$

Тогда, получим выражение

$$\Phi(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)=X(t,\ 0)+H_1^{(p_1)}(t,\ \mu,\ \lambda)+H_2^{(p_2)}(t,\ \mu,\ \alpha)+H_3^{(p_3)}(t,\ \mu,\ \hat{z})+$$

$$+O\left(|\lambda|^{p_1}\right)+O\left(|\alpha|^{p_2}\right)+O\left(|\hat{z}|^{p_3}\right).$$

Аналогично, получим выражение

$$\overline{\varphi}(t,\ \mu,\ \lambda)=\int_0^t X(t,s)\widetilde{f}^{(p)}(s,\ \lambda)ds+o\left(|\lambda|^{p}\right)=g^{(p)}(t,\ \lambda)+o\left(|\lambda|^{p}\right).$$

Таким образом, решение системы (1.3) можно представить в виде

$$x(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)=\left[X(t,\ 0)+H_1^{(p_1)}(t,\ \mu,\ \lambda)+H_2^{(p_2)}(t,\ \mu,\ \alpha)+H_3^{(p_3)}(t,\ \mu,\ \hat{z})\right]\alpha+g^{(p)}(t,\ \lambda)+$$

$$+o\left(|\lambda|^{p}\right)+o\left(|\alpha|^{p_2+1}\right)+\left[O\left(|\lambda|^{p_1}\right)+O\left(|\hat{z}|^{p_3}\right)\right]\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример.

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\dot{x} = ax + \lambda_1 x + \lambda_2 x(\mu t) + \lambda_3 + \lambda_4 x^2 - x^2(\mu t), \tag{1.4}$$

где $0 < \mu < 1$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

Для уравнения (1.4) найдём вид его решений. Заметим, что $X(t, s) = e^{a(t-s)}$, тогда, согласно теоремы 1.6, будем иметь равенства

$$H^{(1)}(t, \mu, \lambda) = \int_0^t X(t, s)[\lambda_1 X(s, 0) + \lambda_2 T_\mu X(s, 0)]ds = \int_0^t \lambda_1 e^{at} ds + \int_0^t \lambda_2 e^{a(t-(1-\mu)s)} ds = \lambda_1 t e^{at} + \lambda_2 \frac{e^{at} - e^{a\mu t}}{a(1-\mu)},$$

$$g^{(1)}(t, \lambda) = \int_0^t X(t, s)\lambda_3 ds = \lambda_3 \int_0^t e^{a(t-s)} ds = \frac{\lambda_3 (e^{at} - 1)}{a},$$

$$\bar{f}^{(2)}(t, \mu, \alpha, \lambda) = \int_0^t X(t, s) f^{(2)}(s, X(s, 0)\alpha, T_\mu X(s, 0)\alpha, \lambda) ds =$$

$$= \int_0^t e^{a(t-s)} \left[\lambda_4 e^{2as}\alpha^2 - e^{2a\mu s}\alpha^2\right] ds = \alpha^2 e^{at} \int_0^t \left[\lambda_4 e^{as} - e^{(2\mu-1)as}\right] ds =$$

$$= \frac{\alpha^2 e^{at}}{a} \left[\lambda_4 (e^{at} - 1) - \frac{e^{a(2\mu-1)t} - 1}{2\mu - 1}\right].$$

Таким образом, решение уравнения (1.4) имеет вид

$$x(t, \mu, \alpha, \lambda) = \left(e^{at} + \lambda_1 t e^{at} + \lambda_2 \frac{e^{at} - e^{a\mu t}}{a(1-\mu)}\right)\alpha + \frac{\lambda_3 (e^{at} - 1)}{a} +$$

$$+ \frac{\alpha^2 e^{at}}{a} \left[\lambda_4 (e^{at} - 1) - \frac{e^{a(2\mu-1)t} - 1}{2\mu - 1}\right] + o(|\lambda|) + o(|\alpha|).$$

Глава II

Двухточечная краевая задача системы дифференциальных уравнений с запаздыванием

В главе находятся достаточные условия существования решения двухточечной краевой задачи системы дифференциальных уравнений с запаздыванием в малой окрестности тривиального решения. В первом параграфе двухточечная краевая задача решается по первому приближению. Во втором параграфе исследуется система (1.2), используя свойства нелинейных членов системы. В третьем параграфе рассматривается система (1.3).

§2.1. Решение двухточечной краевой задачи нелинейной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием по линейной части

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + \widetilde{A}(t,\, \lambda)x + \widetilde{B}(t,\, \lambda)T_\mu x + \widetilde{f}(t,\, \lambda) + f\left(t,\, x,\, T_\mu x,\, \lambda\right). \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия:*

1) непрерывные вектор-функции $\widetilde{f}(t,\, \lambda)$ $f(t,\, x,\, y,\, \lambda)$ *удовлетворяют условиям:*

$$\widetilde{f}(t,\, 0) \equiv 0,$$

$$(\forall t \in [0,\, \omega])(\forall x,\ y \in D(\delta_0))(\forall \lambda \in \Lambda(\delta_0))\left(\left|f(t,\, x,\, y,\, \lambda)\right| \le K(\lambda)\max\left\{|x|,\, |y|\right\}\right),$$

$$\lim_{|\lambda| \to 0} K(\lambda) = 0;$$

2) непрерывные матрицы $\widetilde{A}(t,\lambda)$ *и* $\widetilde{B}(t,\, \lambda)$ *удовлетворяют условиям:* $\widetilde{A}(t,\, 0) \equiv 0$, $\widetilde{B}(t,\, 0) \equiv 0$*;*

3) $\det(X(\omega,0) - E) \ne 0$.

Тогда система (2.1) имеет малое решение двухточечной *краевой задачи.*

Доказательство. На основании теоремы 1.4. и следствия 1.4. первой главы, получим, что решение системы (2.1) можно записать в виде $x(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda) = \left(X(t,\ 0) + \Phi^*(t,\ \mu,\ \lambda)\right)\alpha + \overline{\varphi}(t,\ \mu,\ \lambda) + \varphi(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)$, где $\Phi^*(t,\ \mu,\ 0) \equiv 0$, $\varphi(t,\ \mu,\ 0,\ 0) \equiv 0$, $\overline{\varphi}(t,\ \mu,\ 0) \equiv 0$.

Из условия $x(\omega) = x(0) = \alpha$ будем иметь уравнение

$$\left[E - X(\omega,\ 0) - \Phi^*(\lambda)\right]\alpha = \overline{\varphi}(\lambda) + \varphi(\alpha,\ \lambda). \tag{*}$$

Из условия 3) следует существование числа $\delta_1 > 0$ такого, что $\det\left[X(\omega,\ 0) - E + \Phi^*(\lambda)\right] \neq 0$, $|\lambda| \le \delta_1$, $\lambda \neq 0$, следовательно, существует обратная матрица $\left[X(\omega,\ 0) - E + \Phi^*(\lambda)\right]^{-1}$. Зададим оператор $\Gamma\alpha = \left[X(\omega,\ 0) - E + \Phi^*(\lambda)\right]^{-1}\left[\overline{\varphi}(\lambda) + \varphi(\alpha,\ \lambda)\right]$.

Пусть $|\alpha| \le \overline{\varepsilon} \le \delta_0$. Найдем оценку нормы оператора Γ:

$$|\Gamma\alpha| \le \left|\left[X(\omega,\ 0) - E + \Phi^*(\lambda)\right]^{-1}\right| \left[\left|\overline{\varphi}(\lambda)\right| + \left|\varphi(\alpha,\ \lambda)\right|\right].$$

Используя оценки вектор-функций $\overline{\varphi}(\lambda)$ и $\varphi(\alpha,\ \lambda)$ (см. теорему 1.4.), заметим, что

$$\left|\overline{\varphi}(\lambda)\right| + \left|\varphi(\alpha,\ \lambda)\right| \le \frac{\left\|\widetilde{f}(\cdot,\ \lambda)\right\|_\omega + \overline{C}K(\lambda)\left(|\alpha| + \left\|\widetilde{f}(\cdot,\ \lambda)\right\|_\omega \omega\right)}{\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_\omega + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_\omega}\left(e^{\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_\omega + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_\omega\right)C_X\omega} - 1\right).$$

Обозначим функцию $\Theta(\lambda) = \dfrac{e^{\left(\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_\omega + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_\omega\right)C_X\omega} - 1}{\left\|\widetilde{A}(\cdot,\ \lambda)\right\|_\omega + \left\|E_{\mu'}\right\|\left\|\widetilde{B}(\cdot,\ \lambda)\right\|_\omega}$, очевидно, эта функция ограничена снизу постоянной $C_X\omega$. После обозначения оценка нормы оператора Γ примет вид

$$|\Gamma\alpha| \le \left|\left[X(\omega,\ 0) - E + \Phi^*(\lambda)\right]^{-1}\right| \Theta(\lambda)\left\{\left(1 + \overline{C}K(\lambda)\omega\right)\left\|\widetilde{f}(\cdot,\ \lambda)\right\|_\omega + \overline{C}K(\lambda)|\alpha|\right\}.$$

Возможны варианты:

1) если $\left\|\widetilde{f}(\cdot,\ \lambda)\right\|_\omega > 0$ при $|\lambda| \le \delta_1$, $\lambda \neq 0$, то из условий 1) и 2), следует, что можно выбрать такое $\delta_2 > 0$, что

$$\left\|\widetilde{f}(\cdot,\,\lambda)\right\|_{\omega} < \left(\frac{1}{\left\|\left[X(\omega,\,0)-E+\Phi^{*}(\lambda)\right]^{-1}\right|\Theta(\lambda)} - \overline{C}K(\lambda) \right) \frac{\overline{\varepsilon}}{1+\overline{C}K(\lambda)\omega} \text{ при } \lambda \in \Lambda(\delta_2).$$

2) Если $\left\|\widetilde{f}(\cdot,\,\lambda)\right\|_{\omega} = 0$ при $|\lambda| \le \delta_1$, то из условий $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} K(\lambda) = 0$ и $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} \frac{1}{\left\|\left[X(\omega,\,0)-E+\Phi^{*}(\lambda)\right]^{-1}\right|\Theta(\lambda)} = \frac{1}{\left\|\left[X(\omega,\,0)-E\right]^{-1}\right|C_X\omega} > 0$ следует существование числа $\delta_2 > 0$ такого, что выполнено неравенство $K(\lambda) < \frac{1}{\left\|\left[X(\omega,\,0)-E+\Phi^{*}(\lambda)\right]^{-1}\right|\Theta(\lambda)\overline{C}}$ при $\lambda \in \Lambda(\delta_2)$.

Выберем $\overline{\delta} = \min\{\delta_1,\,\delta_2\}$, тогда получим неравенство $\Gamma(\alpha) < \overline{\varepsilon}$. Следовательно, по принципу неподвижной точки Шаудера оператор $\Gamma(\alpha)$ для любого $\lambda \in \Lambda(\overline{\delta})$, $\lambda \ne 0$ в области $\alpha \in D(\overline{\varepsilon})$ имеет неподвижную точку α^{*}, которой отвечает решение $x(t,\,\mu,\,\alpha^{*},\,\lambda)$ системы (2.1) с условием $x(\omega,\,\mu,\,\alpha^{*},\,\lambda) = \alpha^{*}$. Теорема доказана.

Замечание 2.1. В теореме 2.1 если $\lambda = 0$, то $\alpha = 0$ – единственное решение системы (*), то есть в этом случае при выполнении условия 3) теоремы 2.1 система дифференциальных уравнений (2.1) имеет только тривиальное решение двухточечной краевой задачи. Действительно, при $\lambda = 0$ система (2.1) примет вид $\dot{x} = A(t)x$, а система (*) – вид $[E - X(\omega,\,0)]\alpha = 0$, но так как $\det(X(\omega,\,0)-E) \ne 0$, то $\alpha = 0$ – единственное решение.

Пример 2.1.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений 2-го порядка с запаздыванием

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1 x_1(t) + \lambda_1^2 x_1(t) + \lambda_1 \lambda_2 x_1(\mu_1 t) + \lambda_2^3 + \lambda_1 x_2(t) x_2(\mu_2 t), \\ \dot{x}_2(t) = a_2 x_2(t) + \lambda_2^2 x_2(t) + \lambda_1 \lambda_2 x_2(\mu_2 t) + \lambda_1^3 + \lambda_2 x_1^2(\mu_1 t), \end{cases} \tag{2.2}$$

где $\mu_1,\ \mu_2$ – числа, $0 < \mu_1 < 1$, $0 < \mu_2 < 1$.

Найдем условия, при которых эта система (2.2) имеет решение двухточечной краевой задачи.

Введем обозначения

$$x = (x_1,\ x_2),\ \lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2),$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix},\ \widetilde{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix},\ \widetilde{B}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{f}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_2^3 \\ \lambda_1^3 \end{pmatrix},\ f(x,\ y,\ \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_2 y_2 \\ \lambda_2 y_1^2 \end{pmatrix},$$

$$T_\mu x(t) = (x_1(\mu_1 t),\ x_2(\mu_2 t)).$$

Тогда систему (2.2) можно записать в виде

$$\dot{x} = Ax + \widetilde{A}(\lambda)x + \widetilde{B}(\lambda)T_\mu x + \widetilde{f}(\lambda) + f(x,\ T_\mu x,\ \lambda). \tag{2.3}$$

Фундаментальная матрица системы $\dot{x} = Ax$ имеет вид

$$X(t,\ s) = \begin{pmatrix} e^{a_1(t-s)} & 0 \\ 0 & e^{a_2(t-s)} \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение условий теоремы 2.1. Первые два условия, очевидно, выполнены ($\delta_0 = 1$, $K(\lambda) = |\lambda_1| + |\lambda_2|$). Заметим, что $\det\begin{pmatrix} e^{a_1\omega} - 1 & 0 \\ 0 & e^{a_2\omega} - 1 \end{pmatrix} \neq 0$, значит, выполнено третье условие. Таким образом, система (2.2) имеет решение двухточечной краевой задачи.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\dot{x} = A(t)x + F_1(t,\ x,\ T_\mu x,\ \lambda)x + F_2(t,\ x,\ T_\mu x,\ \lambda)T_\mu x + \widetilde{f}(t,\ \lambda). \tag{2.4}$$

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия:*

1) матрицы $F_1(t,\ x,\ y,\ \lambda)$, $F_2(t,\ x,\ y,\ \lambda)$ *– непрерывны по совокупности своих аргументов и удовлетворяют условиям:*

$$F_1(t,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv 0,\ F_2(t,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv 0\ ;$$

2) непрерывная вектор-функция $\tilde{f}(t,\ \lambda)$ *удовлетворяет условию* $\tilde{f}(t,\ 0) \equiv 0$*;*

3) $\det(X(\omega, 0) - E) \neq 0$.

Тогда система (2.4) имеет малое решение двухточечной краевой задачи.

Доказательство. Пусть $x = x(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)$ – малое решение системы (2.4). Согласно теореме 1.5, это решение имеет вид

$$x(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda) = \left[X(t,\ 0) + \Phi^*(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\right]\alpha + \overline{\varphi}(t,\ \mu,\ \lambda),$$

где

$$\left\|\Phi^*(\cdot,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)\right\|_t \leq C_X \frac{\|F_1\|_t + \|F_2\|_t}{\|F_1\|_t + \|E_{\mu'}\|\|F_2\|_t}\left[e^{\left(\|F_1\|_t + \|E_{\mu'}\|\|F_2\|_t\right)C_X t} - 1\right],$$

$$\left\|\overline{\varphi}(\cdot,\ \mu,\ \lambda)\right\|_t \leq \frac{\left\|\tilde{f}(\cdot,\ \lambda)\right\|_t}{\|F_1\|_t + \|E_{\mu'}\|\|F_2\|_t}\left(e^{\left(\|F_1\|_t + \|E_{\mu'}\|\|F_2\|_t\right)C_X t} - 1\right).$$

Следовательно, из условия $x(\omega) = x(0) = \alpha$ получим уравнение

$$\left[E - X(\omega,\ 0) - \Phi^*(\alpha,\ \lambda)\right]\alpha = \overline{\varphi}(\lambda). \qquad (**)$$

Обозначим матрицу $\overline{\Phi}(\alpha,\ \lambda) = E - X(\omega,\ 0) - \Phi^*(\alpha,\ \lambda)$.

Из условия 1) следует, что существует окрестности $\alpha \in D(\overline{\varepsilon})$, $0 < \overline{\varepsilon} \leq \delta_0$ и $\lambda \in \Lambda(\delta_1)$, $0 < \delta_1 \leq \delta_0$, в которых $\det \overline{\Phi}(\alpha,\ \lambda) \neq 0$, следовательно, существует обратная матрица $\overline{\Phi}^{-1}(\alpha,\ \lambda)$.

Зададим оператор $\Gamma\alpha = \overline{\Phi}^{-1}(\alpha,\ \lambda)\overline{\varphi}(\lambda)$.

Пусть $|\alpha| \leq \overline{\varepsilon} \leq \delta_0$. Используя оценку нормы вектор-функции $\overline{\varphi}(\lambda)$, заметим, что

$$|\Gamma\alpha| \le \left|\overline{\Phi}^{-1}(\alpha,\lambda)\right|\left|\overline{\varphi}(\lambda)\right| \le \frac{\left|\overline{\Phi}^{-1}(\alpha,\lambda)\right|\left\|\widetilde{f}(\cdot,\lambda)\right\|_{\omega}}{\|F_1\|_{\omega}+\|E_{\mu'}\|\|F_2\|_{\omega}}\left(e^{\left(\|F_1\|_{\omega}+\|E_{\mu'}\|\|F_2\|_{\omega}\right)C_X\omega}-1\right).$$

Выберем такое $0<\delta_2\le\delta_0$, что $\left\|\widetilde{f}(\cdot,\lambda)\right\|_{\omega} < \dfrac{\overline{\varepsilon}\left[\|F_1\|_{\omega}+\|E_{\mu'}\|\|F_2\|_{\omega}\right]}{\left|\overline{\Phi}^{-1}(\alpha,\lambda)\right|}\left(e^{\left(\|F_1\|_{\omega}+\|E_{\mu'}\|\|F_2\|_{\omega}\right)C_X\omega}-1\right)^{-1}$ при $\lambda\in\Lambda(\delta_2)$. Это можно сделать на основании условия 2).

Таким образом, если взять $\overline{\delta}=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, то $|\Gamma\alpha|<\overline{\varepsilon}$. Следовательно, по принципу Шаудера оператор Γ для любого $\lambda\in\Lambda(\overline{\delta})$, $\lambda\ne0$ в области $\alpha\in D(\overline{\varepsilon})$ имеет неподвижную точку α^*, которой отвечает решение $x(t,\mu,\alpha^*,\lambda)$ системы (2.4), удовлетворяющее условию $x(\omega,\mu,\alpha^*,\lambda)=\alpha^*$. Теорема доказана.

Замечание 2.2. В теореме 2.2 если $\lambda=0$, то существует такое $\delta>0$, что единственным решением $\alpha\in D(\delta)$ системы (**) является $\alpha=0$, то есть в этом случае при выполнении условия 3) теоремы 2.2 малым решением двухточечной краевой задачи системы дифференциальных уравнений (2.4) является только тривиальное решение. Действительно, при $\lambda=0$ система (2.4) примет вид $\dot{x}=A(t)x+F_1(t,x,T_\mu x,0)x+F_2(t,x,T_\mu x,0)T_\mu x$, а система (**) – вид

$$\left[E-X(\omega,0)-\Phi^*(\alpha,0)\right]\alpha=0, \qquad (***)$$

но так как $\det(X(\omega,0)-E)\ne0$, то существует число ε_1, $0<\varepsilon_1\le\delta_0$ такое, что матрица $\left[E-X(\omega,0)-\Phi^*(\alpha,0)\right]$ является неособенной при $\alpha\in D(\varepsilon_1)$, следовательно, $\alpha=0$ – единственное решение системы (***) в окрестности $\alpha\in D(\varepsilon_1)$. Что и требовалось доказать.

§2.2. Исследование системы (1.2) в случае, когда решение двухточечной задача зависит от нелинейной части

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2.1):

$$\dot{x} = A(t)x + \widetilde{A}(t, \lambda)x + \widetilde{B}(t, \lambda)T_\mu x + \widetilde{f}(t, \lambda) + f(t, x, T_\mu x, \lambda). \qquad (2.1)$$

Пусть $x = x(t, \mu, \alpha, \lambda)$ – малое решение системы (2.1), $\widetilde{A}(t, \lambda) = A^{(p_1)}(t, \lambda) + O(\|\lambda\|^{p_1})$, $\widetilde{B}(t, \lambda) = B^{(p_2)}(t, \lambda) + O(\|\lambda\|^{p_2})$, $\widetilde{f}(t, \lambda) = \widetilde{f}^{(p_3)}(t, \lambda) + o(\|\lambda\|^{p_3})$, $f(t, x, y, \lambda) = f^{(q)}(t, x, y, \lambda) + o(\|z\|^q)$, где $z = (x, y, \lambda)$, $A^{(p_1)}(t, \lambda)$, $B^{(p_2)}(t, \lambda)$, $\widetilde{f}^{(p_3)}(t, \lambda)$ – формы порядка p_1, p_2, p_3 по λ, $f^{(q)}(t, x, y, \lambda)$ – форма порядка q по $z = (x, y, \lambda)$, причем порядок по x и y не меньше 2, тогда, согласно теореме 1.6, решение можно представить в виде

$$x(t, \mu, \alpha, \lambda) = \left[X(t, 0) + H^{(p_{12})}(t, \mu, \lambda)\right]\alpha + g^{(p_3)}(t, \lambda) + \bar{f}^{(q)}(t, \mu, \hat{z}) + o(\|\lambda\|^{p_3}) + O(\|\lambda\|^{p_{12}})\alpha + o(\|\hat{z}\|^q),$$

где $\hat{z} = (\alpha, \lambda)$, $p_{12} = \min\{p_1, p_2\}$, $H^{(p_{12})}(t, \mu, \lambda)$, $g^{(p_3)}(t, \lambda)$ – формы порядка p_{12} и p_3 по λ, $\bar{f}^{(q)}(t, \hat{z})$ – форма порядка q по $\hat{z}$.

Из условия $x(\omega) = x(0) = \alpha$ получим систему

$$\left[E - X(\omega, 0) - H^{(p_{12})}(\mu, \lambda)\right]\alpha = g^{(p_3)}(\lambda) + \bar{f}^{(q)}(\mu, \hat{z}) + o(\|\lambda\|^{p_3}) + O(\|\lambda\|^{p_{12}})\alpha + o(\|\hat{z}\|^q). \quad (2.5)$$

Далее будем предполагать, что $rang(E - X(\omega, 0)) = r < n$, $p_{12} \geq 1$, $m > r$.

Пусть $E - X(\omega, 0) = \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}$, K – $r \times n$-матрица, $rankK = r$. Это представление можно всегда получить, умножая слева на неособенную матрицу, которая исходную матрицу преобразует к нужному виду. Систему (2.5) запишем в виде

$$\begin{cases} K\alpha = H_1^{(p_{12})}(\mu, \lambda)\alpha + g_1^{(p_3)}(\lambda) + \bar{f}_1^{(q)}(\mu, \hat{z}) + o(\|\lambda\|^{p_3}) + O(\|\lambda\|^{p_{12}})\alpha + o(\|\hat{z}\|^q), \\ H_2^{(p_{12})}(\mu, \lambda)\alpha = g_2^{(p_3)}(\lambda) + \bar{f}_2^{(q)}(\mu, \hat{z}) + o(\|\lambda\|^{p_3}) + O(\|\lambda\|^{p_{12}})\alpha + o(\|\hat{z}\|^q). \end{cases} \qquad (2.6)$$

Предположим, что $p_3 > p_{12}$, $q > p_{12}$ и $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} \dfrac{\left|\bar{f}_1^{(q)}(\mu,\ \hat{z}) + o\left(|\hat{z}|^q\right)\right|}{|\lambda|^{p_{12}}} = 0$,

$\lim\limits_{|\lambda|\to 0} \dfrac{\left|\bar{f}_2^{(q)}(\mu,\ \hat{z}) + o\left(|\hat{z}|^q\right)\right|}{|\lambda|^{p_{12}}} = 0$.

Введем замену $\lambda = \rho e$, e – m-мерный вектор, $\rho = |\lambda| > 0$, $|e| = 1$, тогда систему (2.6) можно записать

$$\begin{cases} K\alpha = \rho^{p_{12}} H_1^{(p_{12})}(\mu, e)\alpha + o\left(\rho^{p_{12}}\right), \\ H_2^{(p_{12})}(\mu, e)\alpha = o(\rho). \end{cases} \tag{2.7}$$

Обозначим матрицу $\overline{H}(\mu, e) = \begin{pmatrix} K \\ H_2^{(p_{12})}(\mu, e) \end{pmatrix}$ и вектор-функцию $v(\mu, \alpha, \rho, e) = \begin{pmatrix} \rho^{p_{12}} H_1^{(p_{12})}(\mu, e)\alpha + o\left(\rho^{p_{12}}\right) \\ o(\rho) \end{pmatrix}$. Используя обозначения систему (2.7) представим в виде

$$\overline{H}(\mu, e)\alpha = v(\mu, \alpha, \rho, e). \tag{2.8}$$

Теорема 2.3. *Если найдется такой вектор* $e, |e| = 1$, *для которого* $\det\overline{H}(\mu, e) \neq 0$, $p_3 > p_{12}$, $q > p_{12}$, $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} \dfrac{\left|\bar{f}_1^{(q)}(\mu,\ \hat{z}) + o\left(|\hat{z}|^q\right)\right|}{|\lambda|^{p_{12}}} = 0$, $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} \dfrac{\left|\bar{f}_2^{(q)}(\mu,\ \hat{z}) + o\left(|\hat{z}|^q\right)\right|}{|\lambda|^{p_{12}}} = 0$, *то система дифференциальных уравнений (2.1) имеет малое ненулевое решение двухточечной краевой задачи.*

Доказательство. Так как по условию $\det\overline{H}(\mu, e) \neq 0$, то существует обратная матрица $\overline{H}^{-1}(\mu, e)$.

Оператор $\Gamma : \alpha \to \overline{H}^{-1}(\mu, e) v(\mu, \alpha, \rho, e)$ имеет в области $D(\delta_0)$ неподвижную точку. Действительно, пусть $|\alpha| \leq \delta_0$, тогда выберем такие числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, для которых $\left|o\left(\rho^{p_{12}}\right)\right| < \dfrac{\delta_0}{2\left|\overline{H}(\mu, e)\right|}$ при $\rho < \delta_1$ и

$|o(\rho)| < \dfrac{\delta_0}{|\overline{H}(\mu, e)|}$ при $\rho < \delta_2$. Положим $\delta = \min\left\{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \left(2\left|\overline{H}^{-1}(\mu, e)\right| \left|H_1^{(p_{12})}(\mu, e)\right|\right)^{-1/p_{12}}\right\}$ (или $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$, если $\left|H_1^{(p_{12})}(\mu, e)\right| = 0$), тогда $\left|\overline{H}^{-1}(\mu, e)v(\mu, \alpha, \rho, e)\right| < \delta_0$ при $\rho < \delta$. Следовательно, по принципу Шаудера оператор Γ в области $D(\delta_0)$ имеет неподвижную точку $\alpha^* \in D(\delta_0)$ при любом фиксированном $\rho < \delta$. Значит система дифференциальных уравнений (2.1) имеет малое ненулевое решение $x = x(t, \mu, \alpha^*, \lambda^*)$, $\lambda^* = \rho e$, являющееся решением двухточечной краевой задачи. Теорема доказана.

Пример 2.2.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений 2-го порядка с запаздыванием

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a\,x_1(t) + \lambda_1^2 x_1(t) + \lambda_1\lambda_2 x_1(\mu_1 t) + \lambda_2^3 + \lambda_1^3 x_1(t) x_2(\mu_2 t), \\ \dot{x}_2(t) = \lambda_2^2 x_2(t) + \lambda_1\lambda_2 x_2(\mu_2 t) + \lambda_1^3 + \lambda_2^3 x_1^2(\mu_1 t), \end{cases}$$

где μ_1, μ_2 – числа, $0 < \mu_1 < 1$, $0 < \mu_2 < 1$.

Найдем условия, при которых эта система имеет решение двухточечной краевой задачи.

Введем обозначения

$$x = (x_1, x_2),\ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2),$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \widetilde{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix},\ \widetilde{B}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{f}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_2^3 \\ \lambda_1^3 \end{pmatrix},\ f(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 x_2 y_2 \\ \lambda_2^3 y_1^2 \end{pmatrix},$$

$$T_\mu x(t) = (x_1(\mu_1 t), x_2(\mu_2 t)).$$

Тогда исследуемую систему можно записать в виде

$$\dot{x} = Ax + \widetilde{A}(\lambda)x + \widetilde{B}(\lambda)T_\mu x + \widetilde{f}(\lambda) + f(x, T_\mu x, \lambda).$$

Фундаментальная матрица системы $\dot{x} = Ax$ имеет вид

$$X(t,\, s) = \begin{pmatrix} e^{a(t-s)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение предыдущей системы в точке $t = \omega$, согласно теореме 1.6, можно представить в виде

$$x(t,\, \mu,\, \alpha,\, \lambda) = [X(t,\, 0) + H(t,\, \mu,\, \lambda)]\alpha + g(t,\, \lambda) + \bar{f}(t,\, \mu,\, \alpha,\, \lambda) + o\left(|\lambda|^3\right) + O\left(|\lambda|^2\right)\alpha + o\left(|(\alpha,\, \lambda)|^5\right),$$

где $H(\mu,\, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1^2\,\omega e^{a\omega} + \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{a(1-\mu_1)}\left(e^{a\omega} - e^{\mu_1 a\,\omega}\right) & 0 \\ 0 & (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_2\,\omega \end{pmatrix}$, $g(\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_2^3}{a}\left(e^{a\,\omega} - 1\right) \\ \lambda_1^3\,\omega \end{pmatrix}$,

$$\bar{f}(\mu,\, \alpha,\, \lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1^3\alpha_2^2}{a}\left(e^{a\,\omega} - 1\right) \\ \dfrac{\lambda_2^3\alpha_1^2}{2a\,\mu_1}\left(e^{2a\mu_1\omega} - 1\right) \end{pmatrix}.$$

Введем замену $\lambda = \rho\, e$, $e = (e_1,\, e_2)$, $\rho = |\lambda| > 0$, $|e| = 1$, тогда

$$\overline{H}(\mu,\, e) = \begin{pmatrix} 1 - e^{a\omega} & 0 \\ 0 & (e_1 + e_2)e_2\,\omega \end{pmatrix},\quad \nu(\mu,\, \alpha,\, \rho,\, e) = \begin{pmatrix} \rho^2\left(e_1^2\,\omega e^{a\omega} + \dfrac{e_1e_2}{a(1-\mu_1)}\left(e^{a\omega} - e^{\mu_1 a\,\omega}\right)\right)\alpha_1 + o\left(\rho^2\right) \\ o(\rho) \end{pmatrix}.$$

Возьмем вектор $e = \left(1,\, \dfrac{1}{2}\right)$, очевидно, $|e| = 1$ и $\det\overline{H}(\mu,\, e) = \begin{vmatrix} 1 - e^{a\omega} & 0 \\ 0 & \dfrac{3\omega}{4} \end{vmatrix} = \dfrac{3\omega}{4}\left(1 - e^{a\omega}\right) \neq 0$, следовательно, выполнено условие теоремы 2.3, и исследуемая система дифференциальных уравнений имеет малое ненулевое решение двухточечной краевой задачи $x = x(t,\, \mu,\, \alpha,\, \lambda)$, $\lambda = \left(\rho,\, \dfrac{\rho}{2}\right)$ при любом достаточно малом $\rho > 0$.

Пусть $\alpha_1,\, \alpha_2,\, ...,\, \alpha_{n-r}$ линейно независимые решения системы $[E - X(\omega,\, 0)]\alpha = 0$. Составим $n \times (n - r)$-матрицу $G = [\alpha_1,\, \alpha_2,\, ...,\, \alpha_{n-r}]$. Тогда с помощью замены $\alpha = G\beta$, β – $(n - r)$-мерный вектор систему

(2.5) можно привести к виду

$$\overline{H}^{(p_{12})}(\mu,\lambda)\beta+g^{(p_3)}(\lambda)+\hat{f}^{(q)}(\mu,\hat{z}_\beta)+o\left(|\lambda|^{p_3}\right)+O\left(|\lambda|^{p_{12}}\right)\beta+o\left(|\hat{z}_\beta|^{q}\right)=0,$$

в котором $\overline{H}^{(p_{12})}(\mu,\lambda)=H^{(p_{12})}(\mu,\lambda)G$, $\hat{z}_\beta=(\beta,\lambda)$ – $(n+m-r)$-мерный вектор.

Обозначим n-мерную вектор-функцию (форму порядка $\overline{p}=\min\{p_{12}+1,\ p_3,\ q\}$ по $\hat{z}_\beta$)

$$u(\hat{z}_\beta)=\begin{cases}\overline{H}^{(p_{12})}(\mu,\lambda)\beta+g^{(p_3)}(\lambda)+\hat{f}^{(q)}(\mu,\hat{z}_\beta), \text{ если } p_3=q=p_{12}+1,\\ \overline{H}^{(p_{12})}(\mu,\lambda)\beta+g^{(p_3)}(\lambda), \text{ если } p_3=p_{12}+1, q>p_{12}+1,\\ \overline{H}^{(p_{12})}(\mu,\lambda)\beta+\hat{f}^{(q)}(\mu,\hat{z}_\beta), \text{ если } q=p_{12}+1,\ p_3>p_{12}+1,\\ g^{(p_3)}(\lambda)+\hat{f}^{(q)}(\mu,\hat{z}_\beta), \text{ если } p_3=q<p_{12}+1,\\ \overline{H}^{(p_{12})}(\mu,\lambda)\beta, \text{ если } q>p_{12}+1,\ p_3>p_{12}+1,\\ g^{(p_3)}(\lambda), \text{ если } p_3<p_{12}+1, q>p_3,\\ \hat{f}^{(q)}(\mu,\hat{z}_\beta), \text{ если } q<p_{12}+1, q<p_3.\end{cases}$$

Тогда предыдущая система примет вид

$$u(\hat{z}_\beta)=o\left(|\hat{z}_\beta|^{\overline{p}}\right). \qquad (2.9)$$

Сделаем замену переменных $\hat{z}_\beta=\rho e$, e – $(n+m-r)$-мерный вектор, $\rho=|\hat{z}_\beta|>0$, $|e|=1$, тогда систему (2.9) можно записать

$$u(e)=\frac{o\left(\rho^{\overline{p}}\right)}{\rho^{\overline{p}}}. \qquad (2.10)$$

Лемма 2.1. *Пусть выполнено условие* $(\forall e,\ |e|=1)(u(e)\neq 0)$. *Тогда система (2.9) не имеет решений отличных от нуля в некоторой малой окрестности нуля, а система дифференциальных уравнений (2.1) не имеет малых нетривиальных решений двухточечной краевой задачи.*

Доказательство. По условию $u(e)\neq 0$, следовательно, существует число $M>0$ такое, что $|u(e)|\geq M$ для любого вектора e, $|e|=1$. Но с другой стороны, существует число $\delta_1,\ 0<\delta_1\le\delta_0$ такое, что $\left|\dfrac{o\left(\rho^{\bar p}\right)}{\rho^{\bar p}}\right|<M$ при $\rho<\delta_1,\ \rho\ne 0$. Таким образом, в система (2.10) не имеет решений при $\rho<\delta_1,\ \rho\ne 0$. Значит система (2.9) не имеет ненулевых решений, удовлетворяющих неравенству $\left|\hat z_\beta\right|<\delta_1$. Тогда система дифференциальных уравнений (2.1) не имеет ненулевых малых решений $x=x(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)$ двухточечной краевой задачи при $|\alpha|<|G|\delta_1$, $|\lambda|<\delta_1$. Лемма доказана.

Теорема 2.4. *Если существует такой $(n+m-r)$-мерный вектор $e_0,\ |e_0|=1$, что $u(e_0)=0$ и $rankU(e_0)=n$, где $U(e_0)=\left.\dfrac{\partial u}{\partial e}\right|_{e=e_0}$ – матрица Якоби, то система (2.9) имеет ненулевое решение $\hat z_\beta^*=(\beta^*,\ \lambda^*)\ne 0$, $\left|\hat z_\beta^*\right|\le\dfrac{\delta_0}{|G|}$, а система дифференциальных уравнений (2.1) имеет ненулевое решение $x=x(t,\ \mu,\ \alpha^*,\ \lambda^*)$, удовлетворяющее равенству $x(\omega,\ \mu,\ \alpha^*,\ \lambda^*)=\alpha^*$, $\alpha^*=G\beta^*$, $\left|\alpha^*\right|\le\delta_0$.*

Доказательство. Разлагая вектор-функцию $u(e)$ в ряд Тейлора вблизи точки $e=e_0$, получим

$$u(e)=U(e_0)\Delta e+o(|\Delta e|),$$

где $U(e_0)=\left.\dfrac{\partial u}{\partial e}\right|_{e=e_0}$ – матрица Якоби, $\Delta e=e-e_0$. Подставим это представление вектор-функции в уравнение (2.10), будем иметь уравнение

$$U(e_0)\Delta e=o(|\Delta e|)+\frac{o\left(\rho^{\bar p}\right)}{\rho^{\bar p}}.$$

По условию $rankU(e_0)=n$, тогда составим неособенную $n\times n$-матрицу $U_1(e_0)$ из n линейно независимых столбцов матрицы $U(e_0)$ и обозначим Δe_1 – n-мерный вектор, составленный из соответственных компонент вектора Δe, $U_2(e_0)$ – $n\times(m-r)$-матрица (оставшиеся столбцы матрицы $U(e_0)$), Δe_2 – $(m-r)$-мерный вектор (оставшиеся компоненты вектора Δe). Таким образом, получим систему

$$\Delta e_1=\frac{o(\rho^{\bar{p}})}{\rho^{\bar{p}}}+o(|\Delta e|)-U_1^{-1}(e_0)U_2(e_0)\Delta e_2.$$

Убедимся, что существуют числа $\delta_1>0$ и $\delta_2>0$, $\delta_2\le\delta_1$ такие, что $\left|o(|\Delta e|)-U_1^{-1}(e_0)U_2(e_0)\Delta e_2\right|\le\frac{\delta_1}{2}$ при $|\Delta e_1|\le\delta_1$, $|\Delta e_2|\le\delta_2$. Действительно, так как $|o(|\Delta e|)|=\chi(\Delta e)|\Delta e|$, $\chi(\Delta e)$ – непрерывная неотрицательная функция и $\chi(0)=0$, то существует число $\delta_1>0,\ \delta_1<1$ такое, что выполнено неравенство $\chi(\Delta e)\le\frac{1}{4}$ при $|\Delta e|\le\delta_1$. Выберем число $\delta_2>0$, $\delta_2\le\delta_1$, для которого верно неравенство $\left|U_1^{-1}(e_0)U_2(e_0)\Delta e_2\right|<\frac{\delta_1}{4}$ при $|\Delta e_2|\le\delta_2$. В итоге, получим выполнимость неравенства $\left|o(|\Delta e|)-U_1^{-1}(e_0)U_2(e_0)\Delta e_2\right|\le|o(|\Delta e|)|+\left|U_1^{-1}(e_0)U_2(e_0)\Delta e_2\right|<\frac{\delta_1}{4}+\frac{\delta_1}{4}=\frac{\delta_1}{2}$ при $|\Delta e_1|\le\delta_1$, $|\Delta e_2|\le\delta_2$.

Зафиксируем числа $\delta_1>0,\ \delta_1<1$ и $\delta_2>0$, $\delta_2\le\delta_1$. Пусть $|\Delta e_1|\le\delta_1$ и $|\Delta e_2|\le\delta_2$. Из условия $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{|o(\rho^{\bar{p}})|}{\rho^{\bar{p}}}=0$ найдем такое число $\delta_3>0$, $\delta_3<\frac{\delta_0}{(1+\delta_1)|G|}$, чтобы выполнялось неравенство $\left|\frac{o(\rho^{\bar{p}})}{\rho^{\bar{p}}}\right|\le\frac{\delta_1}{2}$ при $\rho\le\delta_3$.

Тогда получим, что оператор

$$\Gamma:\Delta e_1\to\frac{o(\rho^{\bar{p}})}{\rho^{\bar{p}}}+o(|\Delta e|)-U_1^{-1}(e_0)U_2(e_0)\Delta e_2$$

отображает область $|\Delta e_1| \le \delta_1$ в себя при $|\Delta e_2| \le \delta_2$ и $\rho \le \delta_3$, следовательно, по принципу неподвижной точки Шаудера оператор Γ в указанной области имеет неподвижную точку Δe_1^*, а система (2.9) при любом фиксированном $\rho \le \delta_3$, $\rho \ne 0$ имеет решение $\hat{z}_\beta^* = \rho\left(e_0 + \Delta e^*\right)$, причем $\left|e_0 + \Delta e^*\right| > |e_0| - \left|\Delta e^*\right| > 0$ и $\rho \ne 0$, значит $\hat{z}_\beta^* \ne 0$.

Заметим, что $\left|\hat{z}_\beta^*\right| < \dfrac{\delta_0}{|G|}$, так как $\left|\hat{z}_\beta^*\right| = \rho\left|e_0 + \Delta e^*\right| < \dfrac{\delta_0}{(1+\delta_1)|G|}(1+\delta_1) = \dfrac{\delta_0}{|G|}$. Теорема доказана.

Пусть выполнено условие

$$\left(\exists e_0,\ |e_0| = 1\right)\left(u(e_0) = 0 \,\&\, 0 < rankU(e_0) = r_1 < n\right),\ m > r + r_1,$$

в котором $U(e_0) = \left.\dfrac{\partial u}{\partial e}\right|_{e=e_0}$ – матрица Якоби.

Рассмотрим систему

$$U(e_0)\Delta e = o(|\Delta e|) + \frac{o\left(\rho^{\bar{p}}\right)}{\rho^{\bar{p}}}. \tag{2.11}$$

Введём замену $\Delta e = L\Delta\tilde{e}$, где $\Delta\tilde{e}$ – $(n+m-r-r_1)$-мерный вектор, L – $(n+m)\times(n+m-r-r_1)$-матрица, составленная из $(n+m-r-r_1)$ линейно независимых решений системы $U(e_0)y = 0$. Тогда предыдущая система примет вид

$$o(|\Delta\tilde{e}|) = \frac{o\left(\rho^{\bar{p}}\right)}{\rho^{\bar{p}}}.$$

Пусть $o(|\Delta\tilde{e}|) = \eta_k(\Delta\tilde{e}) + o\left(|\Delta\tilde{e}|^k\right)$, $\eta_k(\Delta\tilde{e})$ – форма порядка $k \ge 2$. Тогда получим систему $\eta_k(\Delta\tilde{e}) = o\left(|\Delta\tilde{e}|^k\right) + \dfrac{o\left(\rho^{\bar{p}}\right)}{\rho^{\bar{p}}}$. Сделаем замену переменной, положив $\Delta\tilde{e} = \tilde{\rho}\gamma$, γ – $(n+m-r-r_1)$-мерный вектор, $\tilde{\rho} = |\Delta\tilde{e}| \ne 0,\ |\gamma| = 1$. Предыдущую систему можно привести к виду

$$\eta_k(\gamma) = \frac{o(\tilde{\rho}^k)}{\tilde{\rho}^k} + \frac{o(\rho^{\bar{p}})}{\rho^{\bar{p}}\tilde{\rho}^k}. \tag{2.12}$$

Если $\eta_k(\gamma) \neq 0$ для любого γ, $|\gamma| = 1$, то существует множество в окрестности точки $\hat{z}_\beta = 0$, в которой система (2.9) не имеет ненулевых решений. Тогда естественно предположить существование вектора γ_0, $|\gamma_0| = 1$, для которого $\eta_k(\gamma_0) = 0$.

Теорема 2.5. *Если существует $(n + m - r - r_1)$-мерный вектор γ_0, $|\gamma_0| = 1$ такой, что $\eta_k(\gamma_0) = 0$ и $rank\Omega(\gamma_0) = n$, где $\Omega(\gamma_0) = \left.\frac{\partial \eta_k}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=\gamma_0}$ – матрица Якоби, то найдутся числа $\delta > 0$ и $\tilde{\delta} > 0$ такие, что для любых фиксированных чисел $\rho < \delta$, $\rho \neq 0$ и $\tilde{\rho} < \tilde{\delta}$, $\tilde{\rho} \neq 0$ система (2.12) имеет ненулевое решение $\gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma^*$. Система (2.9) имеет ненулевое решение $\hat{z}_\beta^* = \rho\left(e_0 + \tilde{\rho}L(\gamma_0 + \Delta\gamma^*)\right) = (\beta^*, \lambda^*)$, $\left|\hat{z}_\beta^*\right| < \frac{\delta_0}{|G|}$, а система дифференциальных уравнений (2.1) имеет ненулевое решение $x = x(t, \mu, \alpha^*, \lambda^*)$, удовлетворяющее равенству $x(\omega, \mu, \alpha^*, \lambda^*) = \alpha^*$, $\alpha^* = G\beta^*$, $|\alpha^*| \leq \delta_0$.*

Доказательство. Разложим вектор-функцию $\eta_k(\gamma)$ в ряд Тейлора вблизи точки $\gamma = \gamma_0$:

$$\eta_k(\gamma) = \Omega(\gamma_0)\Delta\gamma + o(|\Delta\gamma|),$$

где $\Omega(\gamma_0) = \left.\frac{\partial \eta_k}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=\gamma_0}$ – матрица Якоби, $\Delta\gamma = \gamma_0 - \gamma$. Подставим это представление вектор-функции в систему (2.12), будем иметь уравнение

$$\Omega(\gamma_0)\Delta\gamma = o(|\Delta\gamma|) + \frac{o(\tilde{\rho}^k)}{\tilde{\rho}^k} + \frac{o(\rho^{\bar{p}})}{\rho^{\bar{p}}\tilde{\rho}^k}.$$

По условию $rank\Omega(\gamma_0) = n$, тогда составим неособенную $n \times n$-матрицу $\Omega_1(\gamma_0)$ из n линейно независимых столбцов матрицы $\Omega(\gamma_0)$ и обозначим $\Delta\gamma_1$ – n-мерный вектор, составленный из соответственных компонент вектора $\Delta\gamma$, $\Omega_2(\gamma_0)$ – $n \times (m - r - r_1)$-матрица (оставшиеся столбцы матрицы $\Omega(\gamma_0)$), $\Delta\gamma_2$ – $(m - r - r_1)$-мерный вектор (оставшиеся компоненты вектора $\Delta\gamma$). Таким образом, получим систему

$$\Delta\gamma_1 = o(|\Delta\gamma|) + \frac{o(\tilde{\rho}^k)}{\tilde{\rho}^k} + \frac{o(\rho^{\bar{p}})}{\rho^{\bar{p}}\tilde{\rho}^k} - \Omega_1^{-1}(\gamma_0)\Omega_2(\gamma_0)\Delta\gamma_2 .$$

Как было показано в доказательстве теоремы 2.4, существуют числа $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < |\gamma_0|$ и $\delta_2 > 0,\ \delta_2 \le \delta_1$ такие, что $\left| o(|\Delta\gamma|) - \Omega_1^{-1}(\gamma_0)\Omega_2(\gamma_0)\Delta\gamma_2 \right| \le \frac{\delta_1}{3}$ при $|\Delta\gamma_1| \le \delta_1$, $|\Delta\gamma_2| \le \delta_2$.

Зафиксируем числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, $\delta_2 \le \delta_1$. Пусть $|\Delta\gamma_1| \le \delta_1$ и $|\Delta\gamma_2| \le \delta_2$. Из условия $\lim\limits_{\tilde{\rho}\to 0} \frac{|o(\tilde{\rho}^k)|}{\tilde{\rho}^k} = 0$ найдем такое число $\delta_3 > 0$, $\delta_3 < \frac{1}{|L|(1+\delta_1)}$, чтобы выполнялось неравенство $\left| \frac{o(\tilde{\rho}^k)}{\tilde{\rho}^k} \right| < \frac{\delta_1}{3}$ при $\tilde{\rho} \le \delta_3$. Зафиксируем $0 < \tilde{\rho} \le \delta_3$. Так как $\lim\limits_{\rho\to 0} \frac{|o(\rho^{\bar{p}})|}{\rho^{\bar{p}}\tilde{\rho}^k} = 0$, то существует число $\delta_4 > 0$, $\delta_4 < \frac{\delta_0}{[1 + \delta_3|L|(1+\delta_1)]|G|}$ такое, что $\left| \frac{o(\rho^{\bar{p}})}{\rho^{\bar{p}}\tilde{\rho}^k} \right| \le \frac{\delta_1}{3}$ при $\rho \le \delta_4$. Тогда получим, что оператор

$$\Gamma : \Delta\gamma_1 \to o(|\Delta\gamma|) + \frac{o(\tilde{\rho}^k)}{\tilde{\rho}^k} + \frac{o(\rho^{\bar{p}})}{\rho^{\bar{p}}\tilde{\rho}^k} - \Omega_1^{-1}(\gamma_0)\Omega_2(\gamma_0)\Delta\gamma_2$$

отображает область $|\Delta\gamma_1| \le \delta_1$ в себя при $|\Delta\gamma_2| \le \delta_2$, $\tilde{\rho} \le \delta_3$ и $\rho \le \delta_4$, следовательно, по принципу неподвижной точки Шаудера оператор Γ в указанной области имеет неподвижную точку $\Delta\gamma_1^*$. Итак, система

(2.12) при любых фиксированных числах $\tilde{\rho} \le \delta_3$, $\tilde{\rho} \ne 0$ и $\rho \le \delta_4$, $\rho \ne 0$ будет иметь решение $\gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma^*$, система (2.9) – решение $\hat{z}_\beta^* = \rho\left(e_0 + \tilde{\rho}L\left(\gamma_0 + \Delta\gamma^*\right)\right)$, причем $\left|\hat{z}_\beta^*\right| = \rho\left|e_0 + \tilde{\rho}L\left(\gamma_0 + \Delta\gamma^*\right)\right| \ge$ $\ge \rho\left|1 - \tilde{\rho}|L|(1+\delta_1)\right| > 0$, так как $\rho \ne 0$ и $\tilde{\rho} < \dfrac{1}{|L|(1+\delta_1)}$, значит $\hat{z}_\beta^* \ne 0$.

Заметим, что $\left|\hat{z}_\beta^*\right| < \dfrac{\delta_0}{|G|}$, так как $\left|\hat{z}_\beta^*\right| = \rho\left|e_0 + \tilde{\rho}L\left(\gamma_0 + \Delta\gamma^*\right)\right| < \dfrac{\delta_0}{\left[1 + \delta_3|L|(1+\delta_1)\right]|G|}\left(1 + \delta_3|L|(1+\delta_1)\right) = \dfrac{\delta_0}{|G|}$. Теорема доказана.

Пусть $rank\,\Omega(\gamma_0) < n$, тогда процедура получения условий существования решения двухточечной краевой задачи может быть продолжена до тех пор, пока размерность $m \ge r + r_1 + \dots + r_k$ (k – номер процедуры). Если $m < r + r_1 + \dots + r_{k+1}$, то далее этим методом получить достаточные условия существования малого решения двухточечной краевой задачи будет невозможно. Следовательно, процедура остановится.

Пример 2.3.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений 2-го порядка с запаздыванием

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_1(t) + \lambda_1^2 x_1(t) + \lambda_1\lambda_2 x_1(\mu t) + \lambda_2^3 + \lambda_1 x_2(t) x_2(\mu t), \\ \dot{x}_2(t) = \lambda_2^2 x_2(t) + \lambda_1\lambda_2 x_2(\mu t) + \lambda_1^3 + \lambda_2 x_1^2(\mu t), \end{cases} \tag{2.13}$$

где μ – число, $0 < \mu < 1$.

Найдем условия, при которых эта система имеет ненулевое решение двухточечной краевой задачи.

Введем обозначения

$$x = (x_1,\ x_2),\ \lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2),$$

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \widetilde{A}(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix},\ \widetilde{B}(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{f}(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda_2^3 \\ \lambda_1^3 \end{pmatrix},\ f(x,\ y,\ \lambda)=\begin{pmatrix} \lambda_1 x_2 y_2 \\ \lambda_2 y_1^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (2.13) можно записать в виде

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\widetilde{A}(\lambda)x(t)+\widetilde{B}(\lambda)x(\mu t)+\widetilde{f}(\lambda)+f(x,\ x(\mu t),\ \lambda). \qquad (2.14)$$

Фундаментальная матрица системы $\dot{x}=Ax$ имеет вид

$$X(t,\ s)=\begin{pmatrix} e^{a(t-s)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (2.14), согласно лемме 1.1, можно представить в виде

$$x(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)=[X(t,\ 0)+H(t,\ \mu,\ \lambda)]\alpha+g(t,\ \lambda)+\bar{f}(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)+o\left(|\lambda|^3\right)+O\left(|\lambda|^2\right)\alpha+o\left(|(\alpha,\ \lambda)|^3\right),$$

где $H(t,\ \mu,\ \lambda)=\begin{pmatrix} \lambda_1^2 te^{at}+\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{a(1-\mu)}\left(e^{at}-e^{\mu a t}\right) & 0 \\ 0 & (\lambda_1+\lambda_2)\lambda_2 t \end{pmatrix},\ g(t,\ \lambda)=\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_2^3}{a}\left(e^{at}-1\right) \\ \lambda_1^3 t \end{pmatrix},$

$$\bar{f}(t,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)=\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1\alpha_2^2}{a}\left(e^{at}-1\right) \\ \dfrac{\lambda_2\alpha_1^2}{2a\,\mu}\left(e^{2a\mu t}-1\right) \end{pmatrix}.$$

Из условия $x(\omega)=x(0)=\alpha$ получим систему

$$[E-X(\omega,0)-H(\mu,\lambda)]\alpha=g(\lambda)+\bar{f}(\mu,\hat{z})+o\left(|\hat{z}|^3\right),\ \hat{z}=(\alpha,\ \lambda).$$

Заметим, что $rank[X(\omega,0)-E]=1<2$, следовательно, ответ на поставленный вопрос может дать теорема 2.4.

Система $[E-X(\omega,\ 0)]\alpha=0$ имеет решением вектор $(0,1)$. Тогда с помощью замены $\alpha=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\beta$, $\beta\in R$ предыдущую систему можно привести к виду

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_2^3}{a}\left(e^{a\omega}-1\right)+\dfrac{\lambda_1\beta^2}{a}\left(e^{a\omega}-1\right)+o\left(\left|\hat{z}_\beta\right|^3\right)=0, \\ \left(\lambda_1+\lambda_2\right)\lambda_2\,\omega\beta+\lambda_1^3\,\omega+o\left(\left|\hat{z}_\beta\right|^3\right)=0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \lambda_2^3+\lambda_1\beta^2+o\left(\left|\hat{z}_\beta\right|^3\right)=0, \\ \left(\lambda_1+\lambda_2\right)\lambda_2\beta+\lambda_1^3+o\left(\left|\hat{z}_\beta\right|^3\right)=0, \end{cases}$$

в котором $\hat{z}_\beta=\left(\beta,\,\lambda_1,\,\lambda_2\right)$.

Обозначим вектор-функцию $u\left(\hat{z}_\beta\right)=\begin{pmatrix} \lambda_2^3+\lambda_1\beta^2 \\ \left(\lambda_1+\lambda_2\right)\lambda_2\beta+\lambda_1^3 \end{pmatrix}$.

Сделаем замену переменных $\hat{z}_\beta=\rho\,e$, $e=\left(e_1,\,e_2,\,e_3\right)$, $\rho=\left|\hat{z}_\beta\right|>0$, $|e|=1$, тогда предыдущую систему запишем в виде $u(e)=\dfrac{o\left(\rho^3\right)}{\rho^3}$.

Найдем решения системы $u(e)=0$, для этого запишем эту систему в развернутом виде:

$$\begin{cases} e_3^3+e_2e_1^2=0, \\ \left(e_2+e_3\right)e_3e_1+e_2^3=0. \end{cases}$$

Решения полученной системы с условием $|e|=1$ имеют вид $\overline{e}_0=\left(1,\,-\dfrac{1}{y^3},\,\dfrac{1}{y}\right)$, $\overline{\overline{e}}_0=\left(-1,\,\dfrac{1}{y^3},\,-\dfrac{1}{y}\right)$, y – действительное решение уравнения $y^7-y^5-1=0$ (это уравнение имеет единственное действительное решение $y\approx 1{,}191$).

Матрица Якоби имеет вид

$$U(e)=\frac{\partial u}{\partial e}=\begin{pmatrix} 2e_1e_2 & e_1^2 & 3e_3^2 \\ \left(e_2+e_3\right)e_3 & e_1e_3+3e_2^2 & e_1e_2+2e_1e_3 \end{pmatrix},$$

$$U\left(\overline{e}_0\right)=U\left(\overline{\overline{e}}_0\right)=\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{y^3} & 1 & \dfrac{3}{y^2} \\ \left(1-\dfrac{1}{y^2}\right)\dfrac{1}{y^2} & \dfrac{1}{y}+\dfrac{3}{y^6} & -\dfrac{1}{y^3}+\dfrac{2}{y} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\det\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{y^3} & 1 \\ \left(1-\dfrac{1}{y^2}\right)\dfrac{1}{y^2} & \dfrac{1}{y}+\dfrac{3}{y^6} \end{pmatrix}=-\dfrac{2y^5+7}{y^9}\neq 0$, следовательно, $rank U\left(\overline{e}_0\right)=rank U\left(\overline{\overline{e}}_0\right)=2$.

Таким образом, для системы (2.14) выполнены условия теоремы 2.4: существует вектор $\bar{e}_0 = \left(1, -\frac{1}{y^3}, \frac{1}{y}\right)$, для которого $u(\bar{e}_0) = 0$ и $rankU(\bar{e}_0) = 2$, значит, система (2.14) имеет нетривиальное малое решение двухточечной краевой задачи.

§2.3. Исследование системы (1.3) в случае, когда решение двухточечной задача зависит от нелинейной части

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + F_1(t, x, T_\mu x, \lambda)x + F_2(t, x, T_\mu x, \lambda)T_\mu x + \widetilde{f}(t, \lambda), \qquad (2.15)$$

в которой

$$F_1(t, x, y, \lambda) = R_1^{(r_1)}(t, \lambda) + R_2^{(r_2)}(t, \bar{z}) + R_3^{(r_3)}(t, z) + o(|\lambda|^{r_1}) + o(|\bar{z}|^{r_2}) + o(|z|^{r_3}),$$

$$F_2(t, x, y, \lambda) = Q_1^{(q_1)}(t, \lambda) + Q_2^{(q_2)}(t, \bar{z}) + Q_3^{(q_3)}(t, z) + o(|\lambda|^{q_1}) + o(|\bar{z}|^{q_2}) + o(|z|^{q_3}),$$

$$\widetilde{f}(t, \lambda) = \widetilde{f}^{(p)}(t, \lambda) + o(|\lambda|^p),$$

где $z = (x, y, \lambda)$, $\bar{z} = (x, y)$, $\widetilde{f}^{(p)}(t, \lambda)$, $R_1^{(r_1)}(t, \lambda)$ и $Q_1^{(q_1)}(t, \lambda)$ – формы порядка p, r_1 и q_1 по λ; $R_2^{(r_2)}(t, \bar{z})$ и $Q_2^{(q_2)}(t, \bar{z})$ – формы порядка r_2 и q_2 по $\bar{z}$; $R_3^{(r_3)}(t, z)$ и $Q_3^{(q_3)}(t, z)$ – формы порядка r_3 и q_3 по z. Тогда решение, согласно лемме 1.2, можно представить в виде

$$x(t, \mu, \alpha, \lambda) = \left[X(t, 0) + H_1^{(p_1)}(t, \mu, \lambda) + H_2^{(p_2)}(t, \mu, \alpha) + H_3^{(p_3)}(t, \mu, \hat{z})\right]\alpha + g^{(p)}(t, \lambda) +$$
$$+ o(|\lambda|^p) + o(|\alpha|^{p_2+1}) + \left[O(|\lambda|^{p_1}) + O(|\hat{z}|^{p_3})\right]\alpha,$$

где $\hat{z} = (\alpha, \lambda)$, $p_1 = \min\{r_1, q_1\}$, $p_2 = \min\{r_2, q_2\}$, $p_3 = \min\{r_3, q_3\}$, $H_1^{(p_1)}(t, \mu, \lambda)$ и $g^{(p)}(t, \lambda)$ – p_1 и p-формы по λ, $H_2^{(p_2)}(t, \mu, \alpha)$ – p_2-форма по α, $H_3^{(p_3)}(t, \mu, \hat{z})$ – формы порядка p_3 по $\hat{z}$.

Условие существования решения двухточечной задачи задается системой

$$\left[E - X(\omega, 0) - H_1^{(p_1)}(\mu, \lambda) - H_2^{(p_2)}(\mu, \alpha) - H_3^{(p_3)}(\mu, \hat{z})\right]\alpha = g^{(p)}(\lambda) +$$
$$+ o\left(|\lambda|^p\right) + o\left(|\alpha|^{p_2+1}\right) + \left[O\left(|\lambda|^{p_1}\right) + O\left(|\hat{z}|^{p_3}\right)\right]\alpha .$$

Как и в предыдущем параграфе будем предполагать, что $rank(E - X(\omega, 0)) = r < n$, $m > r$.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-r}$ линейно независимые решения системы $[E - X(\omega, 0)]\alpha = 0$. Составим $n \times (n-r)$-матрицу $G = [\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-r}]$. Тогда с помощью замены $\alpha = G\beta$, β – $(n-r)$-мерный вектор предыдущую систему можно привести к виду

$$\left[\overline{H}_1^{(p_1)}(\mu, \lambda) + \overline{H}_2^{(p_2)}(\mu, \beta) + \overline{H}_3^{(p_3)}(\mu, \hat{z}_\beta)\right]\beta = g^{(p)}(\lambda) +$$
$$+ o\left(|\lambda|^p\right) + o\left(|\beta|^{p_2+1}\right) + \left[O\left(|\lambda|^{p_1}\right) + O\left(|\hat{z}_\beta|^{p_3}\right)\right]\beta ,$$

в котором $\overline{H}_1^{(p_1)}(\mu, \lambda) = -H_1^{(p_1)}(\mu, \lambda)G$, $\overline{H}_2^{(p_2)}(\mu, \beta) = -H_2^{(p_2)}(\mu, G\beta)G$, $\overline{H}_3^{(p_3)}(\mu, \hat{z}_\beta) = -H_3^{(p_3)}(\mu, \hat{z}_\beta)G$, $\hat{z}_\beta = (\beta, \lambda)$ – $(n+m-r)$-мерный вектор.

Обозначим n-мерную вектор-функцию (форму порядка $\overline{p} = \min\{p_1, p_2, p_3, p-1\} + 1$ по $\hat{z}_\beta$)

$$u(\hat{z}_\beta) = \begin{cases}
\left(\overline{H}_1^{(p_1)}(\mu, \lambda) + \overline{H}_2^{(p_2)}(\mu, \beta) + \overline{H}_3^{(p_3)}(\mu, \hat{z}_\beta)\right)\beta + g^{(p)}(\lambda), \text{ если } p_1 = p_2 = p_3 = p-1, \\
\left(\overline{H}_1^{(p_1)}(\mu, \lambda) + \overline{H}_2^{(p_2)}(\mu, \beta) + \overline{H}_3^{(p_3)}(\mu, \hat{z}_\beta)\right)\beta, \text{ если } p_1 = p_2 = p_3 < p-1, \\
\left(\overline{H}_1^{(p_1)}(\mu, \lambda) + \overline{H}_2^{(p_2)}(\mu, \beta)\right)\beta + g^{(p)}(\lambda), \text{ если } p_1 = p_2 = p-1, p_3 > p_1, \\
\left(\overline{H}_1^{(p_1)}(\mu, \lambda) + \overline{H}_3^{(p_3)}(\mu, \hat{z}_\beta)\right)\beta + g^{(p)}(\lambda), \text{ если } p_1 = p_3 = p-1, p_2 > p_1, \\
\left(\overline{H}_2^{(p_2)}(\mu, \beta) + \overline{H}_3^{(p_3)}(\mu, \hat{z}_\beta)\right)\beta + g^{(p)}(\lambda), \text{ если } p_2 = p_3 = p-1, p_1 > p_2, \\
\overline{H}_1^{(p_1)}(\mu, \lambda)\beta + g^{(p)}(\lambda), \text{ если } p_1 = p-1, p_3 > p_1, p_2 > p_1, \\
\overline{H}_2^{(p_2)}(\mu, \beta)\beta + g^{(p)}(\lambda), \text{ если } p_2 = p-1, p_1 > p_2, p_3 > p_2, \\
\overline{H}_3^{(p_3)}(\mu, \hat{z}_\beta)\beta + g^{(p)}(\lambda), \text{ если } p_3 = p-1, p_1 > p_3, p_2 > p_3, \\
g^{(p)}(\lambda), \text{ если } p_1 > p-1, p_2 > p-1, p_3 > p-1.
\end{cases}$$

Тогда система примет вид

$$u(\hat{z}_\beta) = o\left(|\hat{z}_\beta|^{\overline{p}}\right). \tag{2.16}$$

Сделаем замену переменных $\hat{z}_\beta = \rho e$, e – $(n+m-r)$-мерный вектор, $\rho = |\hat{z}_\beta| > 0$, $|e| = 1$, тогда систему (2.16) можно записать

$$u(e) = \frac{o\left(\rho^{\bar{p}}\right)}{\rho^{\bar{p}}}. \tag{2.17}$$

Система (2.17) в точности совпадает с системой (2.10). Дальнейшие рассуждения ведутся аналогично рассуждениям предыдущего параграфа.

Следует отметить, что для системы (2.17) справедливы теоремы 2.4 и 2.5., в формулировках которых необходимо заменить систему (2.1) на систему (2.15).

Замечание 2.3. Теоремы 2.1, 2.3, 2.4 и 2.5 остаются справедливыми и в случаях, когда $\tilde{f}(t, \lambda) \equiv 0$ при любых $t \in [0, \omega]$ и $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$.

Пример 2.4.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений 2-го порядка с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + F_1(x(t), x(\mu t), \lambda)x(t) + F_2(x(t), x(\mu t), \lambda)x(\mu t) + \tilde{f}(\lambda), \tag{2.18}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$F_1(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 + x_1 - y_2 & \lambda_3 + x_2 + x_1 y_2 \\ \lambda_2 + y_2 - \lambda_3^2 & \lambda_1 + y_1 + x_2 y_1 \end{pmatrix}$, $F_2(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_2 + y_2 & \lambda_3 - y_1 + x_1^2 \\ \lambda_1 + x_1 & \lambda_1 + \lambda_2 + x_2 + x_1 y_1 \end{pmatrix}$,

$\tilde{f}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_3 \\ \lambda_2^2 \end{pmatrix}$, μ – число, $0 < \mu < 1$.

Найдем условия, при которых эта система имеет малое ненулевое решение двухточечной краевой задачи.

Фундаментальная матрица системы $\dot{x} = Ax$ имеет вид

$$X(t, s) = \begin{pmatrix} e^{a(t-s)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (2.18), согласно лемме 1.2, в момент времени $t=\omega$ можно представить в виде

$$x(\omega,\ \mu,\ \alpha,\ \lambda)=\left[X(\omega,\ 0)+H_1^{(1)}(\mu,\ \lambda)+H_2^{(1)}(\mu,\ \alpha)\right]\alpha+g^{(2)}(\lambda)+o\left(|\lambda|^2\right)+o\left(|\alpha|^2\right)+O(|\lambda|)\alpha,$$

где $$H_1^{(1)}(\mu,\ \lambda)=\begin{pmatrix} (\lambda_1+\lambda_3)\omega e^{a\omega}+\dfrac{\lambda_2}{a(1-\mu)}\left(e^{a\omega}-e^{\mu a\omega}\right) & \dfrac{2\lambda_3}{a}\left(e^{a\omega}-1\right) \\ \dfrac{\lambda_2}{a}\left(e^{a\omega}-1\right)+\dfrac{\lambda_1}{a\,\mu}\left(e^{\mu a\omega}-1\right) & (2\lambda_1+\lambda_2)\omega \end{pmatrix},$$

$$H_2^{(1)}(\mu,\ \alpha)=\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_1 e^{a\omega}}{a}\left(e^{a\omega}-1\right)-\alpha_2\left(\omega e^{a\omega}-\dfrac{e^{a\omega}-e^{\mu a\omega}}{a(1-\mu)}\right) & \dfrac{\alpha_2}{a}\left(e^{a\omega}-1\right)-\alpha_1\omega e^{a\omega} \\ \dfrac{\alpha_2}{a}\left(e^{a\omega}-1\right)+\dfrac{\alpha_1}{a(1+\mu)}\left(e^{(1+\mu)a\omega}-1\right) & \dfrac{\alpha_1}{\mu\,a}\left(e^{\mu a\omega}-1\right)+\alpha_2\,\omega \end{pmatrix},$$

$$g^{(2)}(\lambda)=\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1\lambda_3}{a}\left(e^{a\omega}-1\right) \\ \lambda_2^2\,\omega \end{pmatrix}.$$

Из условия $x(\omega)=x(0)=\alpha$ получим систему

$$\left[E-X(\omega,\ 0)-H_1^{(1)}(\mu,\ \lambda)-H_2^{(1)}(\mu,\ \alpha)\right]\alpha=g(\lambda)+o\left(|\hat{z}|^2\right),\ \hat{z}=(\alpha,\ \lambda).$$

Заметим, что $rank[X(\omega,\ 0)-E]=1<2$, следовательно, ответ на поставленный вопрос может дать теорема 2.4.

Система $[E-X(\omega,\ 0)]\alpha=0$ имеет решением вектор $(0,1)$. Тогда с помощью замены $\alpha=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\beta$, $\beta\in R$ предыдущую систему можно привести к виду

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2\lambda_3}{a}\left(e^{a\omega}-1\right)+\dfrac{\beta}{a}\left(e^{a\omega}-1\right)\right)\beta+\dfrac{\lambda_1\lambda_3}{a}\left(e^{a\omega}-1\right)=o\left(|\hat{z}_\beta|^2\right), \\ \left((2\lambda_1+\lambda_2)\omega+\beta\,\omega\right)\beta+\lambda_2^2\,\omega=o\left(|\hat{z}_\beta|^2\right), \end{cases}$$

где $\hat{z}_\beta=(\beta,\ \lambda)$.

Обозначим $u(\hat{z}_\beta)=\begin{pmatrix} \left(\dfrac{2\lambda_3}{a}\left(e^{a\omega}-1\right)+\dfrac{\beta}{a}\left(e^{a\omega}-1\right)\right)\beta+\dfrac{\lambda_1\lambda_3}{a}\left(e^{a\omega}-1\right) \\ \left((2\lambda_1+\lambda_2)\omega+\beta\,\omega\right)\beta+\lambda_2^2\,\omega \end{pmatrix}$, тогда предыдущая система примет вид $u(\hat{z}_\beta)=o\left(|\hat{z}_\beta|^{\bar{p}}\right)$.

Сделаем замену переменных $\hat{z}_\beta = \rho e$, $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, $\rho = |\hat{z}_\beta| > 0$, $|e| = 1$, тогда предыдущую систему можно записать

$$u(e) = \frac{o(\rho^2)}{\rho^2}.$$

Заметим, что вектор $e^* = \left(e_1, -\frac{e_1^2 + e_1 e_3 + e_3^2}{2e_1}, e_3, \frac{e_1^3}{e_3^2 + e_1 e_3 - \frac{3}{2} e_1^2} \right)$ будет решением системы $u(e) = 0$.

Найдем значение матрицы Якоби вектор-функции $u(e)$ в точке $e = e^*$:

$$U(e^*) = \begin{pmatrix} \frac{2(e^{a\omega}-1)}{a}\left(\frac{e_1^3}{e_3^2 + e_1 e_3 - \frac{3}{2}e_1^2} + e_1 \right) & \frac{(e^{a\omega}-1)}{a} \frac{e_1^3}{e_3^2 + e_1 e_3 - \frac{3}{2}e_1^2} & 0 & \frac{(e^{a\omega}-1)}{a}\left(2e_1 - \frac{e_1^2 + e_1 e_3 + e_3^2}{2e_1} \right) \\ \omega\left(2e_1 - \frac{e_1^2 + e_1 e_3 + e_3^2}{e_1} + e_3 \right) & 2\omega e_1 & \omega(e_1 + 2e_3) & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $e_1 = 1$ и $e_3 = -\frac{1}{2}$, тогда $e^* = \left(1, -\frac{3}{8}, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{7}\right)$,

$$U(e^*) = \begin{pmatrix} \frac{6(e^{a\omega}-1)}{7a} & -\frac{4(e^{a\omega}-1)}{7a} & 0 & \frac{19(e^{a\omega}-1)}{8a} \\ \frac{9\omega}{4} & 2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det\begin{pmatrix} \frac{6(e^{a\omega}-1)}{7a} & -\frac{4(e^{a\omega}-1)}{7a} \\ \frac{9\omega}{4} & 2\omega \end{pmatrix} = \frac{17\omega(e^{a\omega}-1)}{7a} \neq 0$, то $rank U(e^*) = 2$. Таким образом, для вектора $e^* = \left(1, -\frac{3}{8}, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{7}\right)$ выполнены условия теоремы 2.4, значит система дифференциальных уравнений (2.18) имеет малое ненулевое решение двухточечной краевой задачи.

Глава III

Математические модели.

В главе рассмотрены частный случай системы (1.3) и приложения теории, разработанной в предыдущих главах. В первом параграфе рассмотрена система (1.3) частного вида и для этой системы получены достаточные условия существования и отсутствия ненулевого решения двухточечной краевой задачи в малой окрестности нулевого решения. Во втором параграфе построена и исследована математическая модель динамического взаимодействия сегментов финансового рынка. Найдены условия, при которых исследуемая система возвращается в первоначальное положение. В третьем параграфе рассмотрена математическая модель противовирусного иммунного ответа.

§3.1. Исследование системы (1.3) при $\tilde{f}(t, \lambda) \equiv 0$ в критическом случае

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием (1.3) частного вида

$$\dot{x} = A(t)x + F_1(t, x, T_\mu x, \lambda)x + F_2(t, x, T_\mu x, \lambda)T_\mu x. \qquad (3.1)$$

Пусть $F_1(t, x, y, \lambda) = \left[\left(h_{ij}^1(t), \lambda\right) + o(|\lambda|)\right]$, $F_2(t, x, y, \lambda) = \left[\left(h_{ij}^2(t), \lambda\right) + o(|\lambda|)\right]$, где $h_{ij}^1(t)$ и $h_{ij}^2(t)$ – непрерывные m-мерные вектор-функции $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$, $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение векторов. Тогда, согласно следствию 1.5, решение системы (3.1) в момент времени $t = \omega$ можно записать в виде $x(\omega) = \left(X(\omega, 0) + \Phi^*(\mu, \alpha, \lambda)\right)\alpha$, $\Phi^*(\mu, \alpha, \lambda) = \Phi_1(\mu, \alpha, \lambda) + O(|\lambda|)$,

$$\Phi_1(\mu, \alpha, \lambda) = \int_0^\omega X(\omega, s)\big[F_1(s, x(s), T_\mu x(s), \lambda)X(s, 0) + F_2(s, x(s), T_\mu x(s), \lambda)T_\mu X(s, 0)\big]ds =$$

$$= \int_0^\omega X(\omega, s)\big\{\big[(h_{ij}^1(s), \lambda)\big]X(s, 0) + \big[(h_{ij}^2(s), \lambda)\big]T_\mu X(s, 0)\big\}ds + O(|\lambda|).$$

Введем обозначение

$$\overline{\Phi}(\lambda) = \int_0^\omega X(\omega, s)\big\{\big[(h_{ij}^1(s), \lambda)\big]X(s, 0) + \big[(h_{ij}^2(s), \lambda)\big]T_\mu X(s, 0)\big\}ds = \big[(\psi_{ij}, \lambda)\big],$$

где $\psi_{ij} = \sum_{k_1,\, k=1}^{n} \int_0^\omega x_{ik_1}(\omega, s)\big[x_{kj}(s, 0)h_{k_1,k}^1(s) + x_{kj}(\mu_k(s), 0)h_{k_1,k}^2(s)\big]ds$ – постоянные m-мерные векторы, $X(t, s) = \big[x_{ij}(t, s)\big]_1^n$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(s, s) = E$.

Для решения двухточечной краевой задачи $x(\omega) = x(0) = \alpha$ будем иметь уравнение

$$\big(X(\omega, 0) - E + \overline{\Phi}(\lambda) + O(|\lambda|)\big)\alpha = 0. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. *Если* $\det(X(\omega, 0) - E) \neq 0$*, то система (3.1) не имеет малого ненулевого решения двухточечной краевой задачи.*

Доказательство. Так как по условию $\det(X(\omega, 0) - E) \neq 0$, то существует число $\delta > 0$ такое, что $\det\big(X(\omega, 0) - E + \overline{\Phi}(\lambda) + O(|\lambda|)\big) \neq 0$ при $|\lambda| \leq \delta$. Следовательно, $\alpha = 0$ – единственное решение системы (3.2) при $|\lambda| \leq \delta$, это значит, что система (3.1) не имеет ненулевого решения двухточечной краевой задачи при $|\lambda| \leq \delta$. Теорема доказана.

Пусть $rank(X(\omega, 0) - E) = r < n$. Будем считать, что $X(\omega, 0) - E = (G \quad 0)$, G – $n \times r$-матрица, $rankG = r$. Такое представление матрицы $X(\omega, 0) - E$ всегда можно сделать, введя замену переменной $\alpha = P\beta$, $\det P \neq 0$ такую, что $(X(\omega, 0) - E)P = (G \quad 0)$. Составим $(n \times m)$-

матрицы $\Psi_i = \left(\psi_{1,i}, \psi_{2,i}, ..., \psi_{n,i}\right)^{\text{Т}}$, $\left(i = \overline{1, n}\right)$.

Теорема 3.2. *Пусть существует номер* $q \in \{r+1, ..., n\}$ *такой, что* $rank\Psi_q = n$, $m > n$. *Тогда существует такое* $\delta > 0$, *что для любого* λ^*, $\left|\lambda^*\right| \le \delta$ *существует* $\alpha^* \ne 0$, *для которых малое решение* $x = \bar{x}\left(t, \mu, \alpha^*, \lambda^*\right)$ *системы (3.1) удовлетворяет условию* $\bar{x}\left(0, \mu, \alpha^*, \lambda^*\right) = \bar{x}\left(\omega, \mu, \alpha^*, \lambda^*\right)$.

Доказательство. Пусть номер $q \in \{r+1, ..., n\}$ такой, что $rang\Psi_q = n$. Заметим, что решение уравнения $\Psi_q\lambda = o(|\lambda|)$, $\left(q = \overline{r+1, n}\right)$ обнуляет столбец с номером q матрицы $\left(X(\omega, 0) - E + \overline{\Phi}(\lambda) + O(|\lambda|)\right)$, следовательно, вектор $\alpha = \left(0, 0, ..., \alpha_q, 0, ..., 0\right)$ будет при $\alpha_q \ne 0$ ненулевым решением системы (3.2).

Предположим, что минор n-го порядка матрицы Ψ_q уже находится слева (перестановкой столбцов этого всегда можно достичь). Вектор λ разобьем на два: $\hat{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ и $\tilde{\lambda} = \left(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, ..., \tilde{\lambda}_{m-n}\right) = (\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, ..., \lambda_m)$. Получим уравнение $\overline{\Psi}_q\hat{\lambda} = o(|\lambda|) + \overline{\overline{\Psi}}_q\tilde{\lambda}$, где $\overline{\Psi}_q$ – неособенная $(n \times n)$-матрица.

Зададим оператор $\Gamma\left(\hat{\lambda}\right) = o(|\lambda|) + \overline{\Psi}_q^{-1}\overline{\overline{\Psi}}_q\tilde{\lambda}$. Выберем такое число $\bar{\delta} > 0$, чтобы выполнялось неравенство $\left|o(|\lambda|)\right| \le \dfrac{\bar{\delta}}{2}$ при $|\lambda| \le \bar{\delta}$. Пусть $\left|\hat{\lambda}\right| \le \bar{\delta}$, выберем число $\bar{\bar{\delta}} > 0$ таким, чтобы при $\left|\tilde{\lambda}\right| \le \bar{\bar{\delta}}$ выполнялось неравенство $\left|\overline{\Psi}_q^{-1}\overline{\overline{\Psi}}_q\tilde{\lambda}\right| \le \dfrac{\bar{\delta}}{2}$. Тогда при $\left|\tilde{\lambda}\right| \le \bar{\bar{\delta}}$ в области $\left|\hat{\lambda}\right| \le \bar{\delta}$ оператор Γ имеет неподвижную точку $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}^*\left(\tilde{\lambda}\right)$ (при $\tilde{\lambda} \to 0$, $\hat{\lambda}^*\left(\tilde{\lambda}\right) \to 0$). Значит, q-й столбец матрицы системы (3.2) равен нулю. Это означает, что система (3.2) имеет ненулевое решение

$\alpha^* = (0,\ 0,\ ...,\ \alpha_q,\ 0,\ ...,\ 0)$, поэтому решение системы (3.1) $x = \bar{x}(t,\ \mu,\ \alpha^*,\ \lambda^*)$, где $\lambda^* = (\hat{\lambda}_1^*,\ \hat{\lambda}_2^*,\ ...,\ \hat{\lambda}_n^*,\ \tilde{\lambda}_1,\ \tilde{\lambda}_2,\ ...,\ \tilde{\lambda}_{m-n})$ с начальными условиями $\bar{x}(0,\ \mu,\ \alpha^*,\ \lambda^*) = \alpha^*$ удовлетворяет условию $\bar{x}(0,\ \mu,\ \alpha^*,\ \lambda^*) = \bar{x}(\omega,\ \mu,\ \alpha^*,\ \lambda^*)$. Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Если существуют число k, $1 \le k \le n - r$ и набор номеров $i_1, i_2, \cdots, i_k$, $r < i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ такие, что $rank\Psi = kn$,*

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{i_1} \\ \Psi_{i_2} \\ \vdots \\ \Psi_{i_k} \end{pmatrix},$$

$m > kn$, то система дифференциальных уравнений (3.1) имеет малое решение $x = \bar{x}(t,\ \mu,\ \alpha^*,\ \lambda^*)$, $\alpha^* = (0, 0, ..., \alpha_{i_1}, 0, ..., 0, \alpha_{i_2}, 0, ..., 0, \alpha_{i_k}, 0, ..., 0)$, удовлетворяющее условию $\bar{x}(0,\ \mu,\ \alpha^*,\ \lambda^*) = \bar{x}(\omega,\ \mu,\ \alpha^*,\ \lambda^*)$.

Доказательство. Заметим, что решение системы kn уравнений

$$\begin{cases} \Psi_{i_1}\lambda = o(|\lambda|), \\ \Psi_{i_2}\lambda = o(|\lambda|), \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ \Psi_{i_k}\lambda = o(|\lambda|), \end{cases}$$

обнуляет столбцы с номерами $i_1, i_2, \cdots, i_k$ матрицы $(X(\omega,\ 0) - E + \overline{\Phi}(\lambda) + O(|\lambda|))$, следовательно, вектор $\alpha = (0, 0, ..., \alpha_{i_1}, 0, ..., 0, \alpha_{i_2}, 0, ..., 0, \alpha_{i_k}, 0, ..., 0)$ будет при $\alpha_{i_j} \ne 0$, $j = \overline{1, k}$ ненулевым решением системы (3.2).

Предположим, что минор kn-го порядка матрицы Ψ уже находится слева (перестановкой столбцов этого всегда можно достичь). Вектор λ разобьем на два: $\hat{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{kn})$ и

$\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, ..., \tilde{\lambda}_{m-kn}) = (\lambda_{kn+1}, \lambda_{kn+2}, ..., \lambda_m)$. Получим систему уравнений $\overline{\Psi}\hat{\lambda} = o(|\lambda|) + \overline{\overline{\Psi}}\tilde{\lambda}$, где $\overline{\Psi}$ – неособенная $(kn \times kn)$-матрица.

Зададим оператор $\Gamma(\hat{\lambda}) = o(|\lambda|) + \overline{\Psi}^{-1}\overline{\overline{\Psi}}\tilde{\lambda}$. Выберем такое число $\bar{\delta} > 0$, чтобы выполнялось неравенство $|o(|\lambda|)| < \frac{\bar{\delta}}{2}$ при $|\lambda| \le \bar{\delta}$. Пусть $|\hat{\lambda}| \le \bar{\delta}$, выберем число $\bar{\bar{\delta}} > 0$, $\bar{\bar{\delta}} \le \bar{\delta}$ таким, чтобы при $|\tilde{\lambda}| \le \bar{\bar{\delta}}$ выполнялось неравенство $|\overline{\Psi}^{-1}\overline{\overline{\Psi}}\tilde{\lambda}| \le \frac{\bar{\delta}}{2}$. Тогда при $|\tilde{\lambda}| \le \bar{\bar{\delta}}$ в области $|\hat{\lambda}| \le \bar{\delta}$ оператор Γ имеет неподвижную точку $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}^*(\tilde{\lambda})$ (при $\tilde{\lambda} \to 0$, $\hat{\lambda}^*(\tilde{\lambda}) \to 0$). Значит, столбцы с номерами $i_1, i_2, \cdots, i_k$ матрицы системы (3.2) равны нулю. Это означает, что система (3.2) имеет при $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}^*(\tilde{\lambda})$, $|\tilde{\lambda}| \le \bar{\bar{\delta}}$ ненулевое решение $\alpha^* = (0, 0, ..., \alpha_{i_1}, 0, ..., 0, \alpha_{i_2}, 0, ..., 0, \alpha_{i_k}, 0, ..., 0)$, поэтому решение системы (3.1) $x = \bar{x}(t, \mu, \alpha^*, \lambda^*)$, $\lambda^* = (\hat{\lambda}_1^*, \hat{\lambda}_2^*, ..., \hat{\lambda}_{kn}^*, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, ..., \tilde{\lambda}_{m-kn})$ с начальным условием $\bar{x}(0, \mu, \alpha^*, \lambda^*) = \alpha^*$ удовлетворяет равенству $\bar{x}(0, \mu, \alpha^*, \lambda^*) = \bar{x}(\omega, \mu, \alpha^*, \lambda^*)$. Теорема доказана.

Пусть $F_1(t, x, y, \lambda) = \left[h_{ij}^1(t, \lambda) + o(|\lambda|^{p_1})\right]$, $F_2(t, x, y, \lambda) = \left[h_{ij}^2(t, \lambda) + o(|\lambda|^{p_2})\right]$, где $h_{ij}^1(t, \lambda)$ и $h_{ij}^2(t, \lambda)$ – непрерывные m-мерные вектор-функции, формы по λ порядков p_1 и p_2 соответственно $(i, j = \overline{1, n})$. Тогда, согласно следствию 1.5, решение системы (3.1) в момент времени $t = \omega$ можно записать в виде $x(\omega) = (X(\omega, 0) + \Phi^*(\mu, \alpha, \lambda))\alpha$, $\Phi^*(\mu, \alpha, \lambda) = \Phi_1(\mu, \alpha, \lambda) + O(|\lambda|)$,

$$\Phi_1(\mu, \alpha, \lambda) = \int_0^\omega X(\omega, s)\left[F_1(s, x(s), T_\mu x(s), \lambda)X(s, 0) + F_2(s, x(s), T_\mu x(s), \lambda)T_\mu X(s, 0)\right]ds =$$

$$=\int_0^{\omega} X(\omega, s)\left\{\left[h_{ij}^1(s, \lambda)\right]X(s, 0)+\left[h_{ij}^2(s, \lambda)\right]T_\mu X(s, 0)\right\}ds+O\left(|\lambda|^p\right),\ p=\min\{p_1, p_2\}.$$

Введем обозначение

$$\overline{\Phi}(\lambda)=\begin{cases}\int_0^{\omega} X(\omega, s)\left\{\left[h_{ij}^1(s, \lambda)\right]X(s, 0)+\left[h_{ij}^2(s, \lambda)\right]T_\mu X(s, 0)\right\}ds, \text{ если } p_1=p_2,\\ \int_0^{\omega} X(\omega, s)\left[h_{ij}^1(s, \lambda)\right]X(s, 0)ds, \text{ если } p_1<p_2,\\ \int_0^{\omega} X(\omega, s)\left[h_{ij}^2(s, \lambda)\right]T_\mu X(s, 0)ds, \text{ если } p_1>p_2.\end{cases}$$

где $X(t, s)=\left[x_{ij}(t, s)\right]_1^n$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x}=A(t)x$, $X(s, s)=E$. Матрица $\overline{\Phi}(\lambda)$ является формой по λ порядка p.

Как и в предыдущем случае, для решения двухточечной краевой задачи $x(\omega)=x(0)=\alpha$ будем иметь систему (3.2).

Далее будем предполагать, что $rank(X(\omega, 0)-E)=r<n$ и $X(\omega, 0)-E=(G \quad 0)$, G – $n\times r$-матрица, $rankG=r$ (см. абзац перед теоремой 3.2). Пусть $\overline{\varphi_i}(\lambda)$ $\left(i=\overline{1, n}\right)$ – столбцы матрицы $\overline{\Phi}(\lambda)$.

Введем замену переменной: $\lambda=\rho e$, $\rho=|\lambda|>0$, $|e|=1$.

Теорема 3.4. *Если существуют вектор* $e_0, |e_0|=1$ *и номер* k, $r<k\le n$ *такие, что* $\overline{\varphi_k}(e_0)=0$ *и* $rank\Omega_k(e_0)=n$, $\Omega_k(e)=\dfrac{\partial\overline{\varphi_k}(e)}{\partial e}$ *– матрица Якоби,* $m>n$, *то система дифференциальных уравнений (3.1) имеет малое ненулевое решение двухточечной краевой задачи.*

Доказательство. Заметим, что решение системы

$$\overline{\varphi_k}(\lambda)=o\left(|\lambda|^p\right) \qquad (*)$$

обнуляет столбец с номером k матрицы $\left(X(\omega, 0)-E+\overline{\Phi}(\lambda)+O(|\lambda|)\right)$, следовательно, вектор $\alpha=(0, 0, ..., \alpha_k, 0, ..., 0)$ при $\alpha_k\ne 0$ будет ненулевым решением системы (3.2).

Так как $\overline{\varphi_k}(\lambda)$ является формой порядка p, то $\overline{\varphi_k}(\rho e)=\rho^p\overline{\varphi_k}(e)$.

Следовательно, система (*) равносильна системе

$$\overline{\varphi}_k(e) = \frac{o(\rho^p)}{\rho^p}. \qquad (**)$$

Разложим вектор-функцию $\overline{\varphi}_k(e)$ в окрестности точки $e = e_0$ в ряд Тейлора: $\overline{\varphi}_k(e) = \Omega_k(e_0)\Delta e + o(|\Delta e|)$, $\Delta e = e - e_0$ и подставим полученную формулу в систему (**), будем иметь систему

$$\Omega_k(e_0)\Delta e = o(|\Delta e|) + \frac{o(\rho^p)}{\rho^p}.$$

Предположим, что минор n-го порядка матрицы $\Omega_k(e_0)$ уже находится слева (перестановкой столбцов этого всегда можно достичь). Вектор Δe разобьем на два: $\Delta\hat{e} = (\Delta e_1, \Delta e_2, ..., \Delta e_n)$ и $\Delta\widetilde{e} = (\Delta\widetilde{e}_1, \Delta\widetilde{e}_2, ..., \Delta\widetilde{e}_{m-n}) = (\Delta e_{n+1}, \Delta e_{n+2}, ..., \Delta e_m)$. Получим систему уравнений $\overline{\Omega}_k(e_0)\Delta\hat{e} = \overline{\overline{\Omega}}_k(e_0)\Delta\widetilde{e} + o(|\Delta e|) + \frac{o(\rho^p)}{\rho^p}$, где $\overline{\Omega}_k(e_0)$ – неособенная $n \times n$-матрица.

Зададим оператор $\Gamma : \Delta\hat{e} \to \overline{\Omega}_k^{-1}(e_0)\overline{\overline{\Omega}}_k(e_0)\Delta\widetilde{e} + o(|\Delta e|) + \frac{o(\rho^p)}{\rho^p}$. Выберем такое число $\delta > 0$, чтобы выполнялось неравенство $|o(|\Delta e|)| \le \frac{\delta}{3}$ при $|\Delta e| \le \delta$. Пусть $|\Delta\hat{e}| \le \delta$, выберем числа $\delta_1 > 0$, $\delta_1 \le \delta$ и $\delta_2 > 0$ такими, чтобы выполнялись неравенства $\left|\overline{\Omega}_k^{-1}(e_0)\overline{\overline{\Omega}}_k(e_0)\Delta\widetilde{e}\right| < \frac{\delta}{3}$ при $|\Delta\widetilde{e}| \le \delta_1$ и $\frac{o(\rho^p)}{\rho^p} \le \frac{\delta}{3}$ при $\rho \le \delta_2$. Тогда при $|\Delta\widetilde{e}| \le \delta_1$ и $\rho \le \delta_2$ в области $|\Delta\hat{e}| \le \delta$ оператор Γ имеет неподвижную точку $\Delta\hat{e} = \Delta\hat{e}^*$. Значит, столбец с номером k матрицы системы (3.2) равен нулю при $\lambda = \rho\Delta e^*$, $\Delta e^* = (\Delta\hat{e}^*, \Delta\widetilde{e})$, $|\Delta\widetilde{e}| \le \delta_1$, $\rho \le \delta_2$. Это означает, что система (3.2) имеет при $\lambda = \rho\Delta e^*$ ненулевое решение $\alpha^* = (0, 0, ..., \alpha_k, 0, ..., 0)$, поэтому решение системы (3.1) $x = \overline{x}(t, \mu, \alpha^*, \lambda)$, $\lambda = \rho\Delta e^*$ с начальным условием

$\bar{x}(0,\ \mu,\ \alpha^*,\ \lambda) = \alpha^*$ удовлетворяет равенству $\bar{x}(0,\ \mu,\ \alpha^*,\ \lambda) = \bar{x}(\omega,\ \mu,\ \alpha^*,\ \lambda)$. Теорема доказана.

Теорема 3.5. *Если существуют вектор* $e_0, |e_0| = 1$ *и номера* $i_1, i_2, \cdots, i_k$, $r < i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, $1 \le k \le n - r$ *такие, что* $\bar{\varphi}_{i_j}(e_0) = 0$ *и*

$$rank\Omega(e_0) = kn,\ \Omega(e) = \begin{pmatrix} \Omega_{i_1}(e) \\ \Omega_{i_2}(e) \\ \cdots \\ \Omega_{i_k}(e) \end{pmatrix},\ \Omega_{i_j}(e) = \frac{\partial \bar{\varphi}_{i_j}(e)}{\partial e}$$ *– матрица Якоби* $\left(j = \overline{1, k}\right)$,

$m > kn$*, то система дифференциальных уравнений (3.1) имеет ненулевое малое решение двухточечной краевой задачи.*

Доказательство. Решение системы

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_{i_1}(\lambda) = o\left(|\lambda|^p\right), \\ \bar{\varphi}_{i_2}(\lambda) = o\left(|\lambda|^p\right), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \bar{\varphi}_{i_k}(\lambda) = o\left(|\lambda|^p\right) \end{cases} \tag{***}$$

делает нулевыми столбцы с номерами $i_1, i_2, \cdots, i_k$ матрицы $\left(X(\omega,\ 0) - E + \bar{\Phi}(\lambda) + O(|\lambda|)\right)$, следовательно, вектор $\alpha^* = \left(0, 0, ..., \alpha_{i_1}, 0, ..., 0, \alpha_{i_2}, 0, ..., 0, \alpha_{i_k}, 0, ..., 0\right)$ при $\alpha_{i_j} \ne 0$, $j = \overline{1, k}$ ненулевым решением системы (3.2).

Так как $\bar{\varphi}_{i_j}(\lambda)$ является формой порядка p, то $\bar{\varphi}_{i_j}(\rho\, e) = \rho^p \bar{\varphi}_{i_j}(e)$, $j = \overline{1, k}$. Следовательно, система (***) равносильна системе

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_{i_1}(e) = \dfrac{o(\rho^p)}{\rho^p}, \\ \bar{\varphi}_{i_2}(e) = \dfrac{o(\rho^p)}{\rho^p}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \bar{\varphi}_{i_k}(e) = \dfrac{o(\rho^p)}{\rho^p}. \end{cases} \tag{****}$$

Разложим вектор-функции $\overline{\varphi}_{i_j}(e)$ в окрестности точки $e = e_0$ в ряд Тейлора: $\overline{\varphi}_{i_j}(e) = \Omega_{i_j}(e_0)\Delta e + o(|\Delta e|)$, $j = \overline{1, k}$, $\Delta e = e - e_0$ и подставим полученные формулы в систему (****), будем иметь систему

$$\Omega(e_0)\Delta e = o(|\Delta e|) + \frac{o(\rho^p)}{\rho^p}.$$

Как и раньше, предположим, что минор kn-го порядка матрицы $\Omega_k(e_0)$ уже находится слева. Вектор Δe разобьем на два: $\Delta\hat{e} = (\Delta e_1, \Delta e_2, ..., \Delta e_{kn})$ и $\Delta\tilde{e} = (\Delta\tilde{e}_1, \Delta\tilde{e}_2, ..., \Delta\tilde{e}_{m-kn}) = (\Delta e_{kn+1}, \Delta e_{kn+2}, ..., \Delta e_m)$. Получим систему уравнений

$$\overline{\Omega}(e_0)\Delta\hat{e} = \overline{\overline{\Omega}}(e_0)\Delta\tilde{e} + o(|\Delta e|) + \frac{o(\rho^p)}{\rho^p},$$

где $\overline{\Omega}(e_0)$ – неособенная $kn \times kn$-матрица.

Зададим оператор $\Gamma : \Delta\hat{e} \to \overline{\Omega}^{-1}(e_0)\overline{\overline{\Omega}}(e_0)\Delta\tilde{e} + o(|\Delta e|) + \frac{o(\rho^p)}{\rho^p}$. Выберем такое число $\delta > 0$, чтобы выполнялось неравенство $|o(|\Delta e|)| \le \frac{\delta}{3}$ при $|\Delta e| \le \delta$. Пусть $|\Delta\hat{e}| \le \delta$, выберем числа $\delta_1 > 0$, $\delta_1 \le \delta$ и $\delta_2 > 0$ такими, чтобы выполнялись неравенства $\left|\overline{\Omega}^{-1}(e_0)\overline{\overline{\Omega}}(e_0)\Delta\tilde{e}\right| < \frac{\delta}{3}$ при $|\Delta\tilde{e}| \le \delta_1$ и $\frac{o(\rho^p)}{\rho^p} \le \frac{\delta}{3}$ при $\rho \le \delta_2$. Тогда при $|\Delta\tilde{e}| \le \delta_1$ и $\rho \le \delta_2$ в области $|\Delta\hat{e}| \le \delta$ оператор Γ имеет неподвижную точку $\Delta\hat{e} = \Delta\hat{e}^*$, так как $|\Gamma\,\Delta\hat{e}| < \delta$. Значит, столбцы с номерами $i_1, i_2, \cdots, i_k$ матрицы системы (3.2) равны нулю при $\lambda = \rho\Delta e^*$, $\Delta e^* = (\Delta\hat{e}^*, \Delta\tilde{e})$, $|\Delta\tilde{e}| \le \delta_1$, $\rho \le \delta_2$. Это означает, что система (3.2) имеет при $\lambda = \rho\Delta e^*$ ненулевое решение $\alpha^* = (0, 0, ..., \alpha_{i_1}, 0, ..., 0, \alpha_{i_2}, 0, ..., 0, \alpha_{i_k}, 0, ..., 0)$, поэтому решение системы (3.1) $x = \overline{x}(t, \mu, \alpha^*, \lambda)$, $\lambda = \rho\Delta e^*$ с начальным условием $\overline{x}(0, \mu, \alpha^*, \lambda) = \alpha^*$ удовлетворяет равенству $\overline{x}(0, \mu, \alpha^*, \lambda) = \overline{x}(\omega, \mu, \alpha^*, \lambda)$. Теорема доказана.

Пример 3.1.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием второго порядка

$$\dot{x} = Ax + F_1(x,\ T_\mu x,\ \lambda)x + F_2(x,\ T_\mu x,\ \lambda)T_\mu x,$$

где $x = (x_1,\ x_2)$, $\lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T_\mu x(t) = (x_1(\mu_1 t),\ x\ (\mu_2 t))$,

$$F_1(x,\ y,\ \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1^2 x_1 - \lambda_2^3 y_2^2 & 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_2^3 x_2^3 \\ \lambda_3 - \lambda_1 + \lambda_2^2 x_1 & 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3^2 y_1 \end{pmatrix},$$

$$F_2(x,\ y,\ \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_1^2 x_2 - \lambda_2^3 y_2 & 2\lambda_2 + 3\lambda_1 + \lambda_3^4 y_1^3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_3^3 x_1 - \lambda_1^3 y_1 & 2\lambda_3 + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_1^3 y_2 \end{pmatrix},$$

$h_{11}^1(t) = (1,\ 1,\ 0)$, $h_{12}^1(t) = (0,\ 3,\ 1)$, $h_{21}^1(t) = (-1,\ 0,\ 1)$, $h_{22}^1(t) = (2,\ -1,\ 0)$,
$h_{11}^2(t) = (1,\ 1,\ -1)$, $h_{12}^2(t) = (3,\ 2,\ 0)$, $h_{21}^2(t) = (0,\ 1,\ -1)$, $h_{22}^2(t) = (-1,\ 1,\ 2)$.

Фундаментальная матрица системы $\dot{x} = Ax$ равна $X(t,\ s) = \begin{pmatrix} e^{a(t-s)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем векторы ψ_{ij}, $(i,\ j = 1,\ 2)$:

$$\psi_{ij} = \sum_{k_1,\ k=1}^{2} \left[\int_0^\omega x_{ik_1}(\omega,\ s) x_{kj}(s,\ 0) ds\, h_{k_1,k}^1 + \int_0^\omega x_{ik_1}(\omega,\ s) x_{kj}(\mu_k s,\ 0) ds\, h_{k_1,k}^2 \right],$$

$$\psi_{11} = \sum_{k_1,\ k=1}^{2} \left[\int_0^\omega x_{1k_1}(\omega,\ s) x_{k1}(s,\ 0) ds h_{k_1,k}^1 + \int_0^\omega x_{1k_1}(\omega,\ s) x_{k1}(\mu_k s,\ 0) ds h_{k_1,k}^2 \right] =$$

$$= \int_0^\omega e^{a(\omega - s)} e^{as} ds \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^\omega e^{a(\omega - s)} e^{\mu_1 as} ds \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \omega\, e^{a\omega} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{e^{a\omega} - e^{\mu_1 a\omega}}{a(1-\mu_1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \omega\, e^{a\omega} + \dfrac{e^{a\omega} - e^{\mu_1 a\omega}}{a(1-\mu_1)} \\ \omega\, e^{a\omega} + \dfrac{e^{a\omega} - e^{\mu_1 a\omega}}{a(1-\mu_1)} \\ -\dfrac{e^{a\omega} - e^{\mu_1 a\omega}}{a(1-\mu_1)} \end{pmatrix},$$

$$\psi_{12}=\sum_{k_1,\,k=1}^{2}\left[\int_0^{\omega}x_{1k_1}(\omega,\,s)x_{k2}(s,\,0)dsh^1_{k_1,k}+\int_0^{\omega}x_{1k_1}(\omega,\,s)x_{k2}(\mu_k s,\,0)dsh^2_{k_1,k}\right]=$$

$$=\int_0^{\omega}e^{a(\omega-s)}ds\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}+\int_0^{\omega}e^{a(\omega-s)}ds\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}=\frac{e^{a\omega}-1}{a}\left[\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\dfrac{3\left(e^{a\omega}-1\right)}{a}\\\dfrac{5\left(e^{a\omega}-1\right)}{a}\\\dfrac{e^{a\omega}-1}{a}\end{pmatrix},$$

$$\psi_{21}=\sum_{k_1,\,k=1}^{2}\left[\int_0^{\omega}x_{2k_1}(\omega,\,s)x_{k1}(s,\,0)dsh^1_{k_1,k}+\int_0^{\omega}x_{2k_1}(\omega,\,s)x_{k1}(\mu_k s,\,0)dsh^2_{k_1,k}\right]=$$

$$=\int_0^{\omega}e^{as}ds\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\int_0^{\omega}e^{\mu_1 as}ds\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac{e^{a\omega}-1}{a}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{e^{\mu_1 a\omega}-1}{\mu_1 a}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{e^{a\omega}-1}{a}\\\dfrac{e^{\mu_1 a\omega}-1}{\mu_1 a}\\\dfrac{e^{a\omega}-1}{a}-\dfrac{e^{\mu_1 a\omega}-1}{\mu_1 a}\end{pmatrix},$$

$$\psi_{22}=\sum_{k_1,\,k=1}^{2}\left[\int_0^{\omega}x_{2k_1}(\omega,\,s)x_{k2}(s,\,0)dsh^1_{k_1,k}+\int_0^{\omega}x_{2k_1}(\omega,\,s)x_{k2}(\mu_k s,\,0)dsh^2_{k_1,k}\right]=$$

$$=\int_0^{\omega}ds\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+\int_0^{\omega}ds\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}=\omega\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+\omega\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega\\0\\2\omega\end{pmatrix}.$$

Составим (2×3)-матрицы:

$$\Psi_1=\left(\psi_{11},\,\psi_{21}\right)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\omega\,e^{a\omega}+\dfrac{e^{a\omega}-e^{\mu_1 a\omega}}{a(1-\mu_1)} & \omega\,e^{a\omega}+\dfrac{e^{a\omega}-e^{\mu_1 a\omega}}{a(1-\mu_1)} & -\dfrac{e^{a\omega}-e^{\mu_1 a\omega}}{a(1-\mu_1)}\\-\dfrac{e^{a\omega}-1}{a} & \dfrac{e^{\mu_1 a\omega}-1}{\mu_1 a} & \dfrac{e^{a\omega}-1}{a}-\dfrac{e^{\mu_1 a\omega}-1}{\mu_1 a}\end{pmatrix},$$

$$\Psi_2=\left(\psi_{12},\,\psi_{22}\right)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\dfrac{3\left(e^{a\omega}-1\right)}{a} & \dfrac{5\left(e^{a\omega}-1\right)}{a} & \dfrac{e^{a\omega}-1}{a}\\\omega & 0 & 2\omega\end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\det\begin{pmatrix}\dfrac{3\left(e^{a\omega}-1\right)}{a} & \dfrac{5\left(e^{a\omega}-1\right)}{a}\\\omega & 0\end{pmatrix}=-\dfrac{5\omega\left(e^{a\omega}-1\right)}{a}\neq 0$, следовательно, $rank\Psi_2=2$.

Таким образом, выполнены условия теоремы 3.2, значит, существует ненулевое решение $x=\bar{x}\left(t,\,\mu,\,\alpha^*,\,\lambda^*\right)$, $\alpha^*=\left(0,\,\alpha_2\right)$,

$\lambda^* = \left(\hat{\lambda}_1^*(\lambda_3),\, \hat{\lambda}_2^*(\lambda_3),\, \lambda_3\right)$ рассматриваемой системы дифференциальных уравнений, являющееся решением двухточечной краевой задачи.

Пример 3.2.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\dot{x} = Ax + F_1(x,\, T_\mu x,\, \lambda)x + F_2(x,\, T_\mu x,\, \lambda)T_\mu x\,,$$

где $x = (x_1,\, x_2)$, $\lambda = (\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3)$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T_\mu x(t) = (x_1(\mu_1 t),\, x\ (\mu_2 t))$,

$$F_1(x,\, y,\, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^3 x_1^2 - \lambda_3^4 y_2^2 & 3\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^3 x_2^3 \\ \lambda_2\lambda_3 - \lambda_1^2 + \lambda_2^3 x_1 & 2\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3^3 y_1^3 \end{pmatrix},$$

$$F_2(x,\, y,\, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 + \lambda_1^3 x_2 - \lambda_2^4 y_2 & 2\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3^3 y_1^3 \\ \lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2 + \lambda_3^3 x_1 - \lambda_1^3 y_1 & 2\lambda_3^2 - \lambda_1^2 + \lambda_1^4 y_2 \end{pmatrix},$$

$h_{11}^1(\lambda) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$, $\quad h_{12}^1(\lambda) = 3\lambda_1\lambda_2$, $\quad h_{21}^1(\lambda) = \lambda_2\lambda_3 - \lambda_1^2$, $\quad h_{22}^1(\lambda) = 2\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3$,
$h_{11}^2(\lambda) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2$, $h_{12}^2(\lambda) = 2\lambda_2\lambda_3$, $h_{21}^2(\lambda) = \lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2$, $h_{22}^2(\lambda) = 2\lambda_3^2 - \lambda_1^2$.

Фундаментальная матрица системы $\dot{x} = Ax$ равна $X(t,\, s) = \begin{pmatrix} e^{a(t-s)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Согласно теории, обозначим матрицу

$$\overline{\Phi}(\lambda) = \int_0^\omega X(\omega,\, s)\left\{\left[h_{ij}^1(s,\, \lambda)\right]X(s,\, 0) + \left[h_{ij}^2(s,\, \lambda)\right]T_\mu X(s,\, 0)\right\}ds =$$

$$= \begin{pmatrix} h_{11}^1\omega\, e^{a\omega} + \dfrac{e^{a\omega} - e^{\mu_1 a\omega}}{a(1-\mu_1)}h_{11}^2 & \dfrac{e^{a\omega}-1}{a}\left(h_{12}^1 + h_{12}^2\right) \\ \dfrac{e^{a\omega}-1}{a}h_{21}^1 + \dfrac{e^{\mu_1 a\omega}-1}{a\mu_1}h_{21}^2 & \left(h_{22}^1 + h_{22}^2\right)\omega \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \omega\, e^{a\omega}\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right) + \dfrac{e^{a\omega} - e^{\mu_1 a\omega}}{a(1-\mu_1)}\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2\right) & \dfrac{e^{a\omega}-1}{a}\left(3\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2\lambda_3\right) \\ \dfrac{e^{a\omega}-1}{a}\left(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1^2\right) + \dfrac{e^{\mu_1 a\omega}-1}{a\mu_1}\left(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2\right) & \left(\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_3^2\right)\omega \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(\lambda)=\begin{pmatrix} \omega e^{a\omega}\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)+\dfrac{e^{a\omega}-e^{\mu_1 a\omega}}{a(1-\mu_1)}\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2-\lambda_3^2\right) \\ \dfrac{e^{a\omega}-1}{a}\left(\lambda_2\lambda_3+\lambda_1^2\right)+\dfrac{e^{\mu_1 a\omega}-1}{a\mu_1}\left(\lambda_1\lambda_2-\lambda_3^2\right) \end{pmatrix},$$

$$\varphi_2(\lambda)=\begin{pmatrix} \dfrac{e^{a\omega}-1}{a}\left(3\lambda_1\lambda_2+2\lambda_2\lambda_3\right) \\ \left(\lambda_1^2-\lambda_2\lambda_3+2\lambda_3^2\right)\omega \end{pmatrix}.$$

Введем замену переменной: $\lambda=\rho e$, $\rho=|\lambda|>0$, $|e|=1$.

Заметим, что вектор $e_0=\left(-\dfrac{3}{11},\,1,\,\dfrac{9}{22}\right)$ является решением системы $\varphi_2(e)=0$. Найдем значение матрицы Якоби вектор-функции $\varphi_2(e)$ в точке $e=e_0$:

$$\Omega_2(e_0)=\begin{pmatrix} \dfrac{3\left(e^{a\omega}-1\right)}{a} & 0 & \dfrac{2\left(e^{a\omega}-1\right)}{a} \\ -\dfrac{6\omega}{11} & -\dfrac{9\omega}{22} & \dfrac{7\omega}{11} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $rank\Omega_2(e_0)=2$, тогда для вектора e_0 выполнены условия теоремы 3.4. Следовательно, рассматриваемая система дифференциальных уравнений имеет малое ненулевое решение двухточечной краевой задачи.

§3.2. Модель в экономике

При построении модели динамического взаимодействия сегментов финансового рынка следует принять условия:

- средний уровень доходности сегментов на достаточно протяженном интервале времени можно считать одинаковым;
- ликвидность, риск и налоговая политика остаются неизменными на интервале моделирования.

Модель является условной, так как она не привязана к конкретным показателям деятельности банков или к показателям баланса конкретного банка.

Введем непрерывные дифференцируемые функции времени $x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)$, которые в каждый момент времени принимают значения, равные объему операций на определенном сегменте финансового рынка в рублях, n – количество сегментов.

Определим коэффициенты p_{ij} по формуле:

$$p_{ij} = \frac{2S}{\pi} arctg(L_i - L_j),$$

где S – коэффициент, зависящий от ставки рефинансирования и от величины налоговых отчислений (этот параметр модно принять равным ставке рефинансирования, уменьшенной пропорционально налоговым отчислениям), L_i – коэффициент, характеризующий привлекательность финансового сегмента (коэффициент ликвидности). Составим матрицу $P = [p_{ij}]_1^n$.

Знак коэффициента p_{ij} определяет направление перемещения фондов между секторами: при $L_i > L_j$ средства переходят из j-го сегмента в i-й.

Изменение денежной массы сегмента в результате инфляции или эмиссии, а также в результате операций внутри данного сектора определяют параметры λ_i, $i = \overline{1,\ n}$, которые численно равны относительным приращениям объемов сегментов в денежном выражении после выплаты необходимых налоговых отчислений.

Тогда для описания динамики объемов сегментов финансового рынка, с учетом запаздываний, получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = B(\lambda)T_\mu x + f(x,\ T_\mu x), \tag{3.3}$$

где $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ – m-мерный вектор ($m=n$), $T_\mu x(\cdot)=(x_1(\mu_1(\cdot)), x_2(\mu_2(\cdot)), \dots, x_n(\mu_n(\cdot)))$, $B(\lambda)=diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $f(x, y)=diag(x_1, x_2, \dots, x_n)Py$.

Ставится задача поиска условий, при которых исследуемая система за время $t=\omega$ самопроизвольно перейдет в исходное состояние (решение двухточечной краевой задачи $x(0)=x(\omega)$).

Решение системы (3.3) в момент времени $t=\omega$, согласно теореме 1.6, можно представить в виде

$$x(\omega, \mu, \alpha, \lambda)=[E+H(\lambda)]\alpha+\bar{f}(\alpha)+o\left(|\hat{z}|^2\right),$$

где $H(\lambda)=\omega B(\lambda)$, $\bar{f}(\alpha)=\omega\, diag(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P\alpha$, $\hat{z}=(\alpha, \lambda)$.

Тогда условие существования решения двухточечной краевой задачи представляет система уравнений

$$H(\lambda)\alpha+\bar{f}(\alpha)+o\left(|\hat{z}|^2\right)=0.$$

Заметим, что $rang(E-X(\omega, 0))=0<n$, тогда исследования будем вести аналогично §2.2 второй главы.

Обозначим вектор-функцию $u(\hat{z})=H(\lambda)\alpha+\bar{f}(\alpha)$.

Сделаем замену переменных $\hat{z}=\rho e$, e – $2n$-мерный вектор, $|e|=1$, $\rho=|\hat{z}|>0$, тогда предыдущую систему можно записать

$$u(e)=\frac{o(\rho^2)}{\rho^2}. \tag{3.4}$$

Найдем решения системы уравнений $u(e)=0$. С этой целью заметим, что эта система эквивалентна системе

$$\left(diag(e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_{2n})+diag(e_1, e_2, \dots, e_n)P\right)\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}=0,$$

или в развернутом виде

$$\begin{cases} (e_{n+1} + p_{12}e_2 + \cdots + p_{1n}e_n)e_1 = 0, \\ (e_{n+2} + p_{21}e_1 + \cdots + p_{2n}e_n)e_2 = 0, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ (e_{2n} + p_{n1}e_1 + \cdots + p_{n,n-1}e_{n-1})e_n = 0. \end{cases}$$

Решением предыдущей системы будет вектор

$\bar{e} = \big(e_1, e_2, ..., e_n, -(p_{12}e_2 + \cdots + p_{1n}e_n), -(p_{21}e_1 + \cdots + p_{2n}e_n), ..., -(p_{n1}e_1 + \cdots + p_{n,n-1}e_{n-1})\big).$

Матрица Якоби для вектор-функции $u(e)$ имеет вид

$$U(\bar{e}) = \begin{pmatrix} 0 & p_{12}e_1 & \dots & p_{1n}e_1 & e_1 & 0 & \dots & 0 \\ p_{21}e_2 & 0 & \dots & p_{2n}e_2 & 0 & e_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}e_n & p_{n2}e_n & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & e_n \end{pmatrix},$$

откуда непосредственно следует, что $rank U(\bar{e}) = n$ при $e_1 e_2 \dots e_n \neq 0$.

Теорема 3.6. *Пусть существуют числа $e_1, e_2, ..., e_n$ такие, что выполнены неравенства $0 < e_1 \leq 1$, $0 < e_2 \leq 1$, . . ., $0 < e_n \leq 1$, $|p_{12}e_2 + \cdots + p_{1n}e_n| \leq 1$, $|p_{21}e_1 + \cdots + p_{2n}e_n| \leq 1$, $|p_{n1}e_1 + \cdots + p_{n,n-1}e_{n-1}| \leq 1$, где хотя бы в одном из предыдущих неравенств выполнено равенство.*

Тогда система (3.3) имеет ненулевое решение двухточечной задачи.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что существует вектор e_0, $|e_0| = 1$:

$e_0 = \big(e_1, e_2, ..., e_n, -(p_{12}e_2 + \cdots + p_{1n}e_n), -(p_{21}e_1 + \cdots + p_{2n}e_n), ..., -(p_{n1}e_1 + \cdots + p_{n,n-1}e_{n-1})\big),$

притом $rank U(e_0) = n$. Тогда выполнены условия теоремы 2.4, следовательно, система (3.4) имеет ненулевое решение $\hat{z}^* = (\alpha^*, \lambda^*)$, а система дифференциальных уравнений (3.3) имеет ненулевое решение $x = x(t, \mu, \alpha^*, \lambda^*)$, удовлетворяющее равенству $x(\omega, \mu, \alpha^*, \lambda^*) = \alpha^*$. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Если запаздывания носят периодический (сезонный) характер с периодом ω, то решение двухточечной краевой задачи $x(0)=x(\omega)$ будет периодическим решением исследуемой системы.

§3.3. Моделирование в иммунологии

Математические модели в биологии рассмотрены в работах Марри Дж. [37], Марчука Г.И. [38], Митропольского Ю.А. [39], Романовского Ю.М., Степановой Н.В., Чернавского Д.С. [55], Coel N.S., Maitra S.C., Montroll E.W. [76], Cunningham W.J. [77], MacDonald N. [78]. В работах [38, 79] подробно описан процесс построения математической модели противовирусного иммунного ответа. Этим вопросом занимался так же Никишов А.А. [46]. Модель представляется системой дифференциальных уравнений с малым постоянным запаздыванием [38]

$$
\begin{aligned}
&\dot V_f = nb_E C_V E + pb_m C_V - \gamma_m M V_f - \gamma_f V_f F - k\sigma C V_f,\\
&\dot M_V = \gamma_M M V_f - \alpha_M M_V - b_M M_V E,\\
&\dot H_E = b_H\left[\xi(m)\rho_H M_V(t-\tau_H)H_E(t-\tau_H) - M_V H_E\right] - b_p M_V H_E E + \alpha_H\left(H_E^* - H_E\right),\\
&\dot H_B = b_H^{(B)}\left[\xi(m)\rho_H^{(B)} M_V\left(t-\tau_H^{(B)}\right)H_B\left(t-\tau_H^{(B)}\right) - M_V H_B\right] - b_H^{(B)} M_V H_B B + \alpha_H^{(B)}\left(H_B^* - H_B\right),\\
&\dot E = b_p\left[\xi(m)\rho_E M_V(t-\tau_E)H_E(t-\tau_E)E(t-\tau_E) - M_V H_E E\right] - \eta_C b_E C_V E - \eta_M b_M M_V E + \alpha_E\left(E^* - E\right),\\
&\dot B = b_p^{(B)}\left[\xi(m)\rho_B M_V(t-\tau_B)H_B(t-\tau_B)B(t-\tau_B) - M_V H_B B\right] + \alpha_B\left(B^* - B\right), \qquad (3.5)\\
&\dot P = b_p^{(B)}\left[\xi(m)\rho_p M_V(t-\tau_B)H_B(t-\tau_B)B(t-\tau_B) - M_V H_B B\right] + \alpha_p\left(P^* - P\right),\\
&\dot F = \rho_f P - \eta_f \gamma_f V_f F - \alpha_f F,\\
&\dot C_V = \sigma C V_f - b_E C_V E - b_m C_V,\\
&\dot m = \mu b_E C_V E + \eta b_m C_V - \lambda m,
\end{aligned}
$$

где $V_f(t)$ – количество «свободных» вирусов; $M_V(t)$ – количество стимулированных макрофагов; $H_E(t)$ – количество T-лимфоцитов-помощников, принимающих участие в клеточном ответе; $H_B(t)$ – количество T-лимфоцитов-помощников, принимающих участие в гуморальном ответе; $E(t)$ – количество T-клеток-эффекторов (киллеров); $B(t)$ – количество иммунокомпетентных B-лимфоцитов, способных принять сигнал к стимуляции от стимулированных макрофагов M_V и помощников H_B; $P(t)$ – количество плазматических клеток; $F(t)$ – количество антител; $C_V(t)$ – количество зараженных вирусом клеток органа; $m(t)$ – нефункционирующая часть пораженного вирусом органа.

Положительные константы n и p означают среднее число освобождающихся вирусов из одной зараженной клетки, погибшей в результате лизиса эффекторами и вирусного поражения соответственно. Константа b_E характеризует степень взаимодействия между C_V и E, b_m – часть зараженных клеток, гибнущих за счет вирусного поражения, M – число макрофагов в организме, γ_m – коэффициент взаимодействия между макрофагами и V_f, C – число здоровых клеток в органе, σ – характеристика взаимодействия между C и V_f, k – количество вирусов, проникающих в одну здоровую клетку, $\gamma_M = \delta \gamma_m$, $\delta \le 1$, δ – величина, обратная количеству свободных вирусов, которое может провзаимодействовать с одним макрофагом, α_M – величина, обратная времени жизни стимулированных макрофагов, коэффициенты b_H, $b_H^{(B)}$, b_P, $b_P^{(B)}$ характеризуют взаимодействия, $\xi(m)$ описывает влияние степени поражения органа на стимуляцию иммунной системы, ρ_H и $\rho_H^{(B)}$ – среднее число образовавшихся клеток в одном клоне, τ_H и $\tau_H^{(B)}$ – времена образования соответствующего клона, α_H и $\alpha_H^{(B)}$ – величины, обратные временам клона, α_H и $\alpha_H^{(B)}$ – величины, обратные временам жизни соответственно помощников H_E и H_B, H_E^* и H_B^* – постоянные уровни соответствующих помощников в здоровом организме, η_C и η_M – количество T-киллеров E, необходимое для уничтожения одной зараженной клетки и макрофага.

Для построения модели будем предполагать, что запаздывания являются некоторыми функциями времени, которые удовлетворяют двойному неравенству $0 \le \mu_i(t) \le t$ на промежутке моделирования.

Задача состоит в нахождении условий, при которых зараженный малой дозой вирусов орган через время $t = \omega$ восстановится до первоначального состояния без медицинского вмешательства.

Введем новые обозначения:

$$k = k_1,\ p = k_2,\ n = k_3,\ M\gamma_m = \lambda_1,\ \gamma_M = k_4\lambda_1,\ k_4 \le 1,\ \sigma C = \lambda_2,\ b_m = \lambda_3,\ \gamma_f = \lambda_4,$$

$$b_E = \lambda_5,\ \alpha_M = \lambda_6,\ b_m = \lambda_7,\ \alpha_H = \lambda_8,\ b_H = \lambda_9,\ \rho_H = \lambda_{10},\ b_P = \lambda_{11},\ \alpha_H^{(B)} = \lambda_{12},$$

$$b_H^{(B)} = \lambda_{13},\ \rho_H^{(B)} = \lambda_{14},\ b_P^{(B)} = \lambda_{15},\ \alpha_E = \lambda_{16},\ \eta_C = \lambda_{17},\ \eta_M = \lambda_{18},\ \rho_E = \lambda_{19},\ \alpha_B = \lambda_{20},$$

$$\rho_B = \lambda_{21},\ \alpha_P = \lambda_{22},\ \rho_P = \lambda_{23},\ \rho_f = \lambda_{24},\ \alpha_f = \lambda_{25},\ \eta_f V_f = \lambda_{26},\ \eta = \lambda_{27},\ \lambda = \lambda_{28},$$

$$\mu = \lambda_{29};\ V_f = x_1,\ M_V = x_2,\ H_E = x_3,\ H_B = x_4,\ E = x_5,\ B = x_6,\ P = x_7,\ F = x_8,$$

$$C_V = x_9,\ m = x_{10}.$$

Тогда система (3.5) запишется в виде

$$\dot{x}_1 = -(\lambda_1 + k_1\lambda_2)x_1 + k_2\lambda_3 x_9 - \lambda_4 x_1 x_8 + k_3\lambda_5 x_5 x_9,$$

$$\dot{x}_2 = k_4\lambda_1 x_1 - \lambda_6 x_2 - \lambda_7 x_2 x_5,$$

$$\dot{x}_3 = \lambda_8\left(x_3^0 - x_3\right) + \lambda_9\left[\lambda_{10}\xi(x_{10})x_2(\mu_1)x_3(\mu_1) - x_2x_3\right] - \lambda_{11}x_2x_3x_5,$$

$$\dot{x}_4 = \lambda_{12}\left(x_4^0 - x_4\right) + \lambda_{13}\left[\lambda_{14}\xi(x_{10})x_2(\mu_2)x_4(\mu_2) - x_2x_4\right] - \lambda_{15}x_2x_4x_6,$$

$$\dot{x}_5 = \lambda_{16}\left(x_5^0 - x_5\right) - \lambda_5\lambda_{17}x_5x_9 - \lambda_7\lambda_{18}x_2x_5 + \lambda_{11}\left[\lambda_{19}\xi(x_{10})x_2(\mu_3)x_3(\mu_3)x_5(\mu_3) - x_2x_3x_5\right],$$

$$\dot{x}_6 = \lambda_{20}\left(x_6^0 - x_6\right) + \lambda_{15}\left[\lambda_{21}\xi(x_{10})x_2(\mu_4)x_4(\mu_4)x_6(\mu_4) - x_2x_4x_6\right],$$

$$\dot{x}_7 = \lambda_{22}\left(x_7^0 - x_7\right) + \lambda_{15}\lambda_{23}\xi(x_{10})x_2(\mu_4)x_4(\mu_4)x_6(\mu_4),$$

$$\dot{x}_8 = \lambda_{24}x_7 - \lambda_{25}x_8 - \lambda_{26}x_1x_8,$$

$$\dot{x}_9 = \lambda_2 x_1 - \lambda_3 x_9 - \lambda_5 x_5 x_9,$$

$$\dot{x}_{10} = \lambda_3\lambda_{27}x_9 - \lambda_{28}x_{10} + \lambda_5\lambda_{29}x_5x_9,$$

или в векторной форме

$$\dot{x} = A(\lambda)x + \widetilde{f}(\lambda) + f(x,\, T_\mu x,\, \lambda), \tag{3.6}$$

где

$$T_\mu x = \left(x_2(\mu_1),\, x_2(\mu_2),\, x_2(\mu_3),\, x_2(\mu_4),\, x_3(\mu_1),\, x_3(\mu_3),\, x_4(\mu_2),\, x_4(\mu_4),\, x_5(\mu_3),\, x_6(\mu_4)\right),$$

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + k_1\lambda_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2\lambda_3 & 0 \\ k_4\lambda_1 & -\lambda_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{24} & -\lambda_{25} & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3\lambda_{27} & -\lambda_{28} \end{pmatrix},$$

$$f(x,\, y,\, \lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda_4 x_1 x_8 + k_3\lambda_5 x_5 x_9 \\ -\lambda_7 x_2 x_5 \\ \lambda_9\left[\lambda_{10}\xi(x_{10})y_1 y_5 - x_2 x_3\right] - \lambda_{11}x_2x_3x_5 \\ \lambda_{13}\left[\lambda_{14}\xi(x_{10})y_2 y_7 - x_2 x_4\right] - \lambda_{15}x_2x_4x_6 \\ -\lambda_5\lambda_{17}x_5x_9 - \lambda_7\lambda_{18}x_2x_5 + \lambda_{11}\left[\lambda_{19}\xi(x_{10})y_3y_6y_9 - x_2x_3x_5\right] \\ \lambda_{15}\left[\lambda_{21}\xi(x_{10})y_4y_8y_{10} - x_2x_4x_6\right] \\ \lambda_{15}\lambda_{23}\xi(x_{10})y_4y_8y_{10} \\ -\lambda_{26}x_1x_8 \\ -\lambda_5 x_5 x_9 \\ \lambda_5\lambda_{29}x_5x_9 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{f}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_8 b_1 \\ \lambda_{12}b_2 \\ \lambda_{16}b_3 \\ \lambda_{20}b_4 \\ \lambda_{22}b_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$b_1 > 0,\, b_2 > 0,\, b_3 > 0,\, b_4 > 0,\, b_5 > 0$ – постоянные числа.

Решение системы (3.5), согласно теореме 1.6 первой главы, в момент времени $t=\omega$ можно представить в виде

$$x(\omega, \mu, \alpha, \lambda)=[E+H(\lambda)]\alpha+\bar{f}(\lambda)+o\left(|\hat{z}|^2\right),$$

где $H(\lambda)=\omega\, A(\lambda)$, $\bar{f}(\lambda)=\omega\,\tilde{f}(\lambda)$, $\hat{z}=(\alpha,\ \lambda)$.

Тогда условие существования решения двухточечной краевой задачи представляет собой систему уравнений $H(\lambda)\alpha+\bar{f}(\lambda)+o(|\hat{z}|)=0$.

Обозначим вектор-функцию $u(\hat{z})=H(\lambda)\alpha+\bar{f}(\lambda)$, тогда система примет вид

$$u(\hat{z})=o\left(|\hat{z}|^2\right). \qquad (3.7)$$

Рассмотрим уравнение $u(\hat{z})=0$, или в развернутом виде

$$\begin{cases} -(\lambda_1+k_1\lambda_2)\alpha_1+k_2\lambda_3\alpha_9=0, \\ k_4\lambda_1\alpha_1-\lambda_6\alpha_2=0, \\ \lambda_8(b_1-\alpha_3)=0, \\ \lambda_{12}(b_2-\alpha_4)=0, \\ \lambda_{16}(b_3-\alpha_5)=0, \\ \lambda_{20}(b_4-\alpha_6)=0, \\ \lambda_{22}(b_5-\alpha_7)=0, \\ \lambda_{24}\alpha_7-\lambda_{25}\alpha_8=0, \\ \lambda_2\alpha_1-\lambda_3\alpha_9=0, \\ \lambda_3\lambda_{27}\alpha_9-\lambda_{28}\alpha_{10}=0. \end{cases}$$

Система имеет решение $\alpha_0=\left(0,\ 0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ \dfrac{\lambda_{24}}{\lambda_{25}}b_5,\ 0,\ 0\right)$.

Матрица Якоби вектор-функции $u(\hat{z})$ имеет вид $U=\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}=A(\lambda)$.

Заметим, что $rankU=10$, если $\lambda_1\neq(k_2-k_1)\lambda_2$ и $\lambda_i>0$ $\left(i=\overline{1,\ 28}\right)$, следовательно, справедлива

Теорема 3.7. *Если* $\lambda_1\neq(k_2-k_1)\lambda_2$ *и* $\lambda_i>0$ $\left(i=\overline{1,\ 28}\right)$, *то система дифференциальных уравнений (3.6) имеет ненулевое решение двухточечной краевой задачи.*

Доказательство. Из условия следует, что $rankU=10$. Разложим вектор-функцию $u(\hat{z})$ в ряд Тейлора в близи точки $\alpha = \alpha_0$:

$$u(\hat{z}) = U\Delta\alpha + o(|\Delta\alpha|).$$

Подставим это разложение в систему (3.7), получим систему

$$U\Delta\alpha = o(|\Delta\alpha|) + o(|\hat{z}|^2).$$

Так как $\det U = \det A(\lambda) \neq 0$, то будем иметь систему

$$\Delta\alpha = A^{-1}(\lambda) o(|\Delta\alpha|) + A^{-1}(\lambda) o(|\hat{z}|^2).$$

Подберем числа $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < |\alpha_0|$ и $\delta_2 > 0$, $\delta_2 \leq \delta_1$ такие, что бы выполнялись неравенства: $\left|A^{-1}(\lambda) o(|\Delta\alpha|)\right| \leq \frac{\delta_1}{2}$ при $|\Delta\alpha| \leq \delta_1$ и $\left|A^{-1}(\lambda) o(|\hat{z}|^2)\right| \leq \frac{\delta_1}{2}$ при $|\hat{z}| \leq \delta_2$.

Тогда используя принцип неподвижной точки Шаудера, заключим, что оператор $\Gamma: \Delta\alpha \to A^{-1}(\lambda) o(|\Delta\alpha|) + A^{-1}(\lambda) o(|\hat{z}|^2)$ имеет в области $|\Delta\alpha| \leq \delta_1$ неподвижную точку $\Delta\alpha^*$ при $|\hat{z}| \leq \delta_2$. Следовательно, система (3.6) имеет ненулевое решение $x = x(t,\ \mu,\ \alpha^*,\ \lambda^*)$, $\alpha^* = \alpha_0 + \Delta\alpha^*$, $|\lambda^*| \leq \delta_2$, для которого выполняется равенство $x(0,\ \mu,\ \alpha^*,\ \lambda^*) = x(\omega,\ \mu,\ \alpha^*,\ \lambda^*)$. Теорема доказана.

Если все компоненты вектора α^* неотрицательны, то решение двухточечной краевой задачи будет иметь физический смысл. В этом случае исследуемая система противовирусного иммунного ответа за время $t = \omega$ самопроизвольно вернется в первоначальное состояние. В частности, если запаздывания являются периодическими функциями периода кратного ω, то в данной системе будут наблюдаться колебательные явления, характеризующие хроническое течение заболевания.

Приложение

Приложение посвящено численному решению систем с запаздыванием. Разработан алгоритм численного решения систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, написана программа в среде Delphi 4.0. Результаты представлены в виде графиков.

1. Характеристики программы.

Программа состоит из трех блоков:

1. Ввод с клавиатуры или загрузка из ранее сохраненного файла и обработка системы, начальных данных и параметров.
2. Численное решение системы дифференциальных уравнений.
3. Графическое представление решения.

Рассмотрим эти блоки подробнее.

В первом блоке для обработки системы написан алгоритм – «Компилятор строки» (функция StrToGraf(A: string; var Err_Leks, Err_Num: byte): PGraf). Компилятор по символьному выражению правой части системы (динамический массив Sys_S[0..N-1]) и начальным данным (X0_S[0..N-1]) строит графы (Sys_G[0..N-1], X0_G[0..N-1]), который позволяет вычислять правые части введенной системы (функция GrafToValue). В функции StrToGraf заложены 15 стандартных функций ('sqrt', 'sqr', 'exp', 'ln', 'lg', 'sin', 'cos', 'tg', 'ctg', 'arcsin', 'arccos', 'arctg', 'arcctg', 'abs', 'sigma') и одна специальная функция 'x', которая в простейшем случае (отсутствие запаздывания) выступает как независимая переменная. Функция StrToGraf распознает независимые переменные и параметры, обозначенные символами 'x', 'X', 'y', 'Y' и 'k', 'K', 'm', 'M', 'p', 'P', 'q', 'Q', 'h', 'H', 'g', 'G' соответственно. Номер компоненты пишется справа от символа.

В процедуре SearchPoint вычисляется значение функции $x(t)$ в любой точке промежутка, где функция уже определена (динамический массив MasX[0..n-1][0..NPoints]). Для этого используется алгоритм интерполяции кубическими сплайнами ближайших точек. Выбор интерполяции сплайнами не случаен, сначала производилась линейная аппроксимация, но этот способ показал худшие результаты. Если точки лежат достаточно плотно, то искажения не значительные. Если же шаг велик, то за счет погрешности интерполяции мы можем получить неверный результат. С этой целью в программе предусмотрен верхний предел шага h.

Во втором блоке используется измененный явный метод Рунге-Кутта 4(5) порядка с автоматическим управлением длиной шага (процедура RKF45). Процедура учитывает машинное ипсилон.

Третий блок использует визуальные компоненты Delphi 4.0 (TChart – для построения графика, TStringGrid – для ввода данных и другие). Программа позволяет как сохранять данные в файле, так и считывать их из файла.

2. Данные тестирования.

Программа тестировалась на примерах, которые допускают аналитическое решение.

Тест 1. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = x(\mu t). \tag{П.1}$$

Из исследований главы 1 следует, что это решение системы (П.1) имеет вид $x(t,\, \mu,\, \alpha) = \Phi(t,\, \mu)\alpha$, где $\Phi(t,\, \mu) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \Phi_k(t,\, \mu)$,

$$\Phi_k(t,\ \mu) = \int_0^t T_\mu \Phi_{k-1}(s,\ \mu)ds \ \ (k = 1,\ 2,\ ...),\ \Phi_0(t,\ \mu) \equiv 1 .$$

Заметим, что

$$\Phi_1(t,\ \mu) = \int_0^t T_\mu \Phi_0(s,\ \mu)ds = t ,$$

$$\Phi_2(t,\ \mu) = \int_0^t T_\mu \Phi_1(s,\ \mu)ds = \int_0^t \mu s ds = \mu \frac{t^2}{2} ,$$

$$\Phi_3(t,\ \mu) = \int_0^t T_\mu \Phi_2(s,\ \mu)ds = \int_0^t \mu \frac{(\mu s)^2}{2} ds = \mu^{1+2} \frac{t^3}{3!} \text{ и т.д.}$$

Для $\Phi_k(t, \mu)$ получим выражение $\Phi_k(t, \mu) = \mu^{\sum_{i=1}^{k-1} i} \frac{t^k}{k!} = \mu^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{t^k}{k!}$, следовательно, решение будет иметь вид $x(t) = \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{t^k}{k!}$.

Полученный ряд сходится при $|\mu| \le 1$ и $t \in R$.

Пусть $\alpha = 1$, $\mu = \frac{1}{2}$, тогда получим решение $x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{t^k}{k!}$.

Вычислить на компьютере подобное выражение не составляет большого труда.

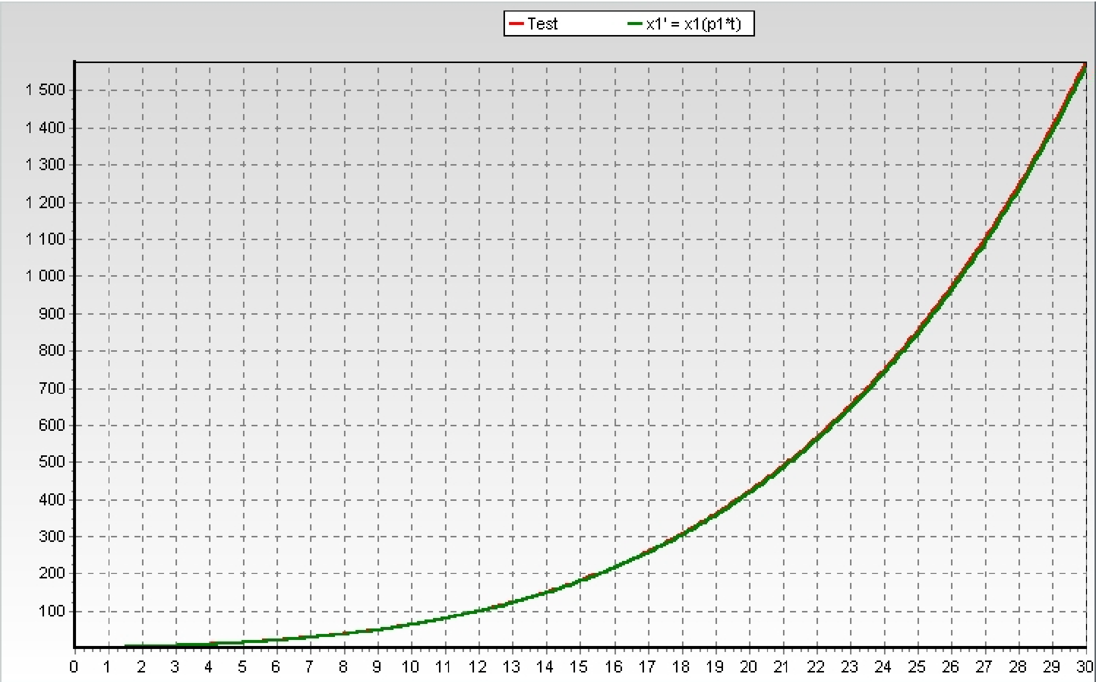
Результаты расчета:

Вводимые данные

- система (f1(t,x,p)=) x1(p1*t);
- начальные условия (x01(t,p)=) 1;
- параметры (p1=) 0,5;
- интервал времени [0; 20].

Графики решений (рассчитанного программой и точного) изображены на рисунке 3.1.

Рис. 3.1.



На рисунке 3.1 не видны отклонения рассчитанного решения от точного, для того чтобы их увидеть, увеличим масштаб (см. Рис. 3.2).

Рис. 3.2.

Видно, что отклонения незначительные, относительная погрешность $\varepsilon = 0{,}0084\%$. Точность алгоритма сильно зависит от шага и качества интерполяции кубическими сплайнами.

Тест 2. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = -4\sin(t)x\left(\frac{t}{2}\right). \qquad (\text{П}.2)$$

Непосредственно проверяется, что система (П.2) имеет решением функцию $x(t) = \cos(2t) + C$. Если учесть, что $x(0) = 1 + C$, то решение примет вид $x(t) = \cos(2t) + x(0) - 1$ или $x(t) = -2\sin^2(t) + x(0)$.

Пусть заданы начальные условия $x(0) = 1$, тогда решение системы (П.2) примет вид $x(t) = \cos(2t)$.

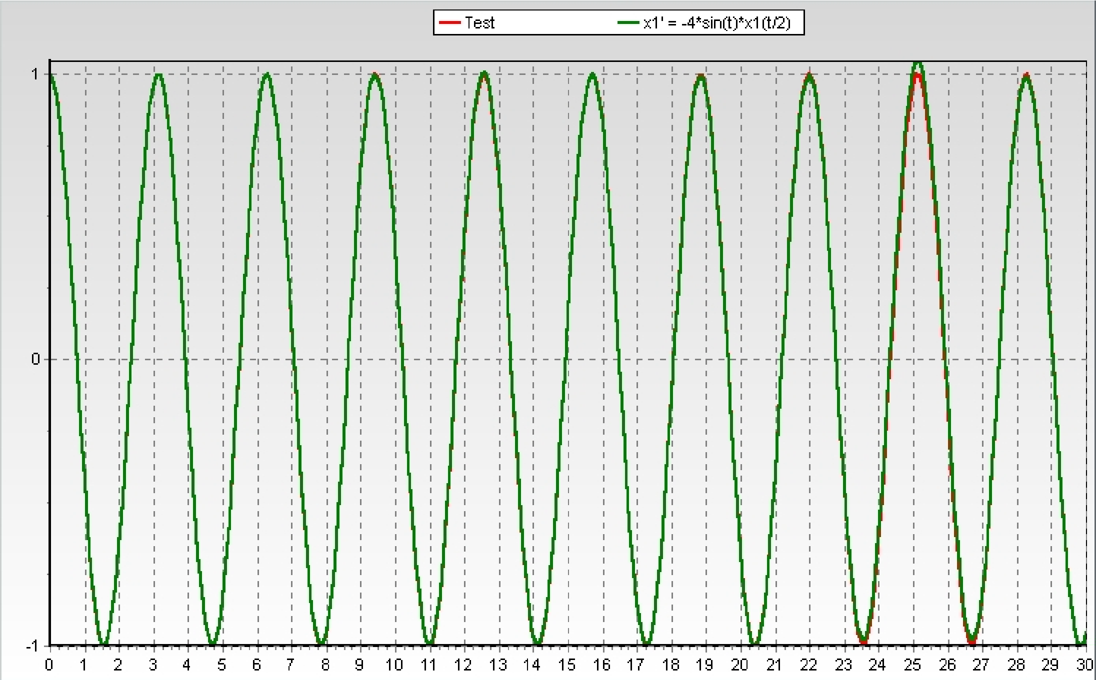
Результаты расчета:

Вводимые данные

- система (f1(t,x,p)=) -4*sin(t)*x1(t/2);
- начальные условия (x01(t,p)=) 1;
- параметры нет;
- интервал времени [0; 30].

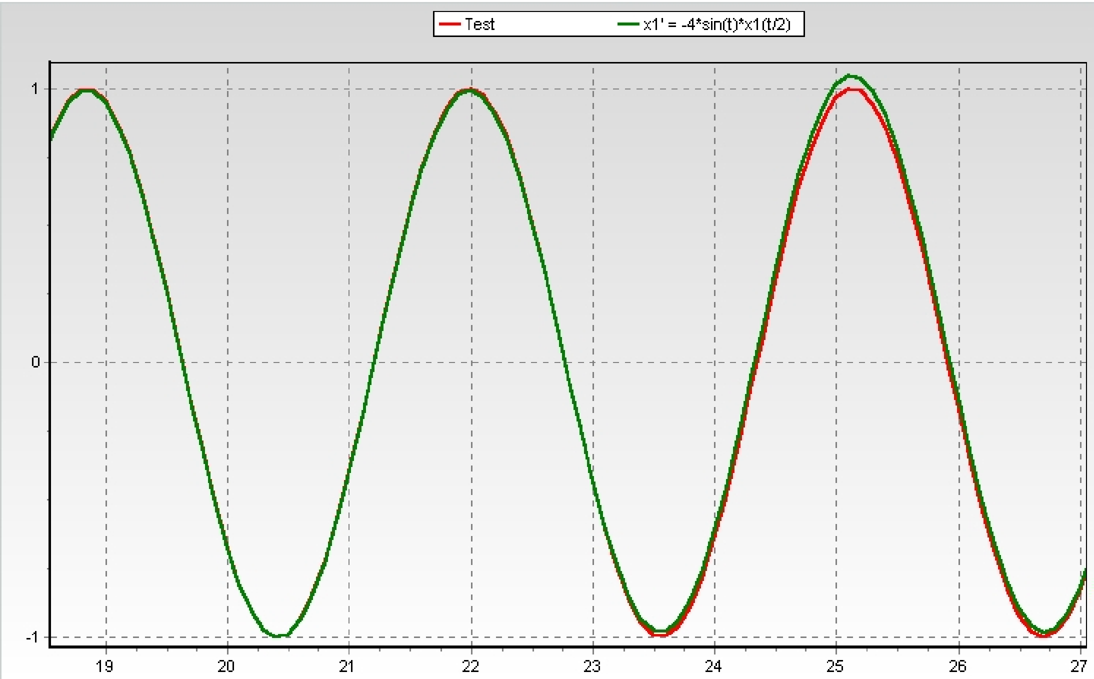
Графики решений (рассчитанного программой и точного) изображены на рисунке 3.3.

Рис. 3.3.



На рисунке 3.3 плохо видны отклонения рассчитанного решения от точного. Увеличенный масштаб рисунка 3.3 представлен на рисунке 3.4.

Рис. 3.4.



Абсолютная погрешность $\Delta = 0{,}05$.

Тест 3. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = -x\left(t - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (\text{П.3})$$

Если на начальном промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\, 0\right]$ задана начальная функция $\varphi(t) = \sin(t)$, то система (П.3) имеет решение $x(t) = \sin(t)$.

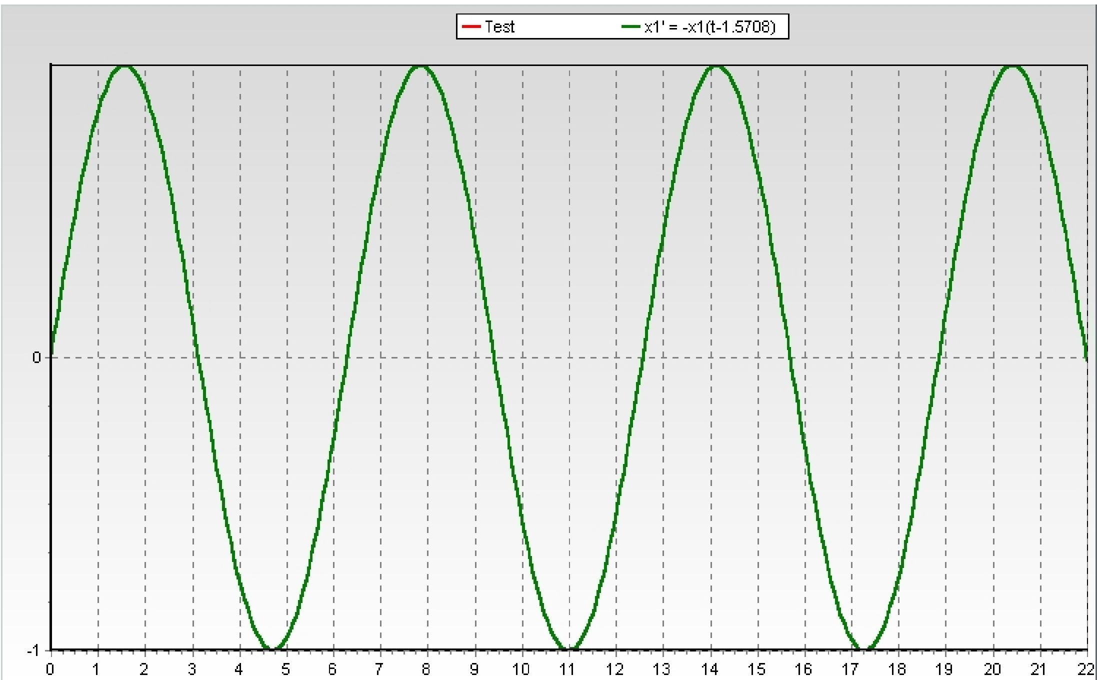
Результаты расчета:

Вводимые данные

- система (f1(t,x,p)=) -x1(t-1.5708);
- начальные условия (x01(t,p)=) sin(t);
- параметры нет;
- интервал времени [0; 22].

Графики решений системы (П.3) рассчитанного программой и точного решения изображены на рисунке 3.5. Абсолютная погрешность $\Delta = 4 \cdot 10^{-5}$, поэтому на рисунке 3.5 не видно тестовой кривой.

Рис. 3.5.



Модель 1. Рассмотрим модель, построенную во втором параграфе третьей главы. Предположим, что модель динамического взаимодействия сегментов финансового рынка состоит из 4-х сегментов, тогда система дифференциальных уравнений с запаздыванием, описывающая изменение объемов этих сегментов имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(\mu_1(t)) + x_1(t)[p_{12}x_2(\mu_2(t)) + p_{13}x_3(\mu_3(t)) + p_{14}x_4(\mu_4(t))], \\ \dot{x}_2(t) = \lambda_2 x_2(\mu_2(t)) + x_2(t)[p_{21}x_1(\mu_1(t)) + p_{23}x_3(\mu_3(t)) + p_{24}x_4(\mu_4(t))], \\ \dot{x}_3(t) = \lambda_3 x_3(\mu_3(t)) + x_3(t)[p_{31}x_1(\mu_1(t)) + p_{32}x_2(\mu_2(t)) + p_{34}x_4(\mu_4(t))], \\ \dot{x}_4(t) = \lambda_4 x_4(\mu_4(t)) + x_4(t)[p_{41}x_1(\mu_1(t)) + p_{42}x_2(\mu_2(t)) + p_{43}x_3(\mu_3(t))]. \end{cases}$$

Пусть $L_1 = 10$, $L_2 = 5$, $L_3 = 7$, $L_4 = 9$, $S = 1$, тогда получим

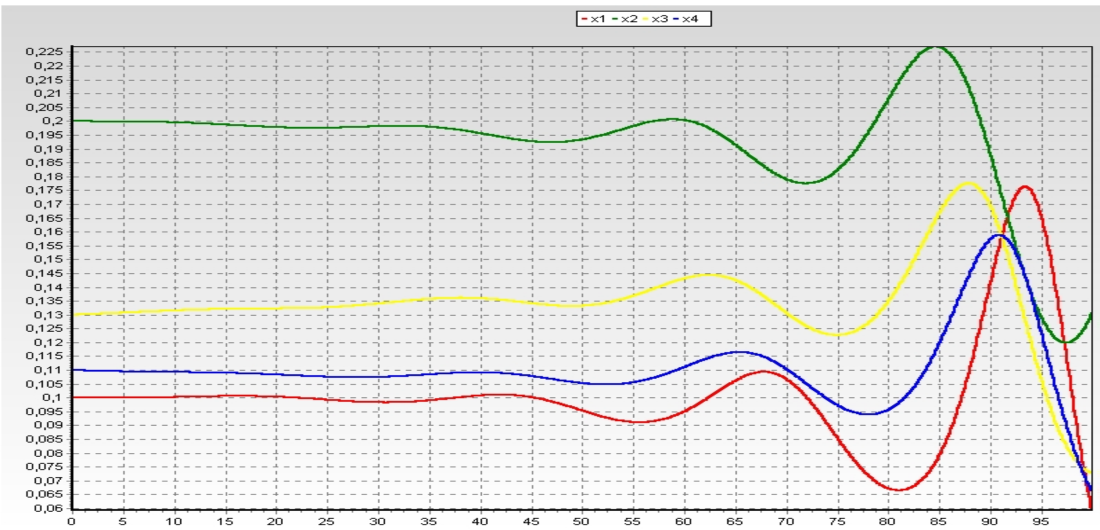
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0,87 & 0,79 & 0,5 \\ -0,87 & 0 & -0,7 & -0,84 \\ -0,79 & 0,7 & 0 & -0,7 \\ -0,5 & 0,84 & 0,7 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = (-0,3318,\ 0,2703,\ 0,017,\ -0,21),$$

$$\mu_1(t) = t - arctg(t), \qquad \mu_2(t) = t - \frac{1}{2}arctg(t), \qquad \mu_3(t) = t - \frac{1}{3}arctg(t),$$

$$\mu_4(t) = t - \frac{1}{4}arctg(t),\ t \in [0,\ 100].$$

Решение данной системы с начальным условием $x(0) = \alpha$, $\alpha = (0.1,\ 0.2,\ 0.13,\ 0.11)$ представлено на рисунке 3.6.

Рис. 3.6.



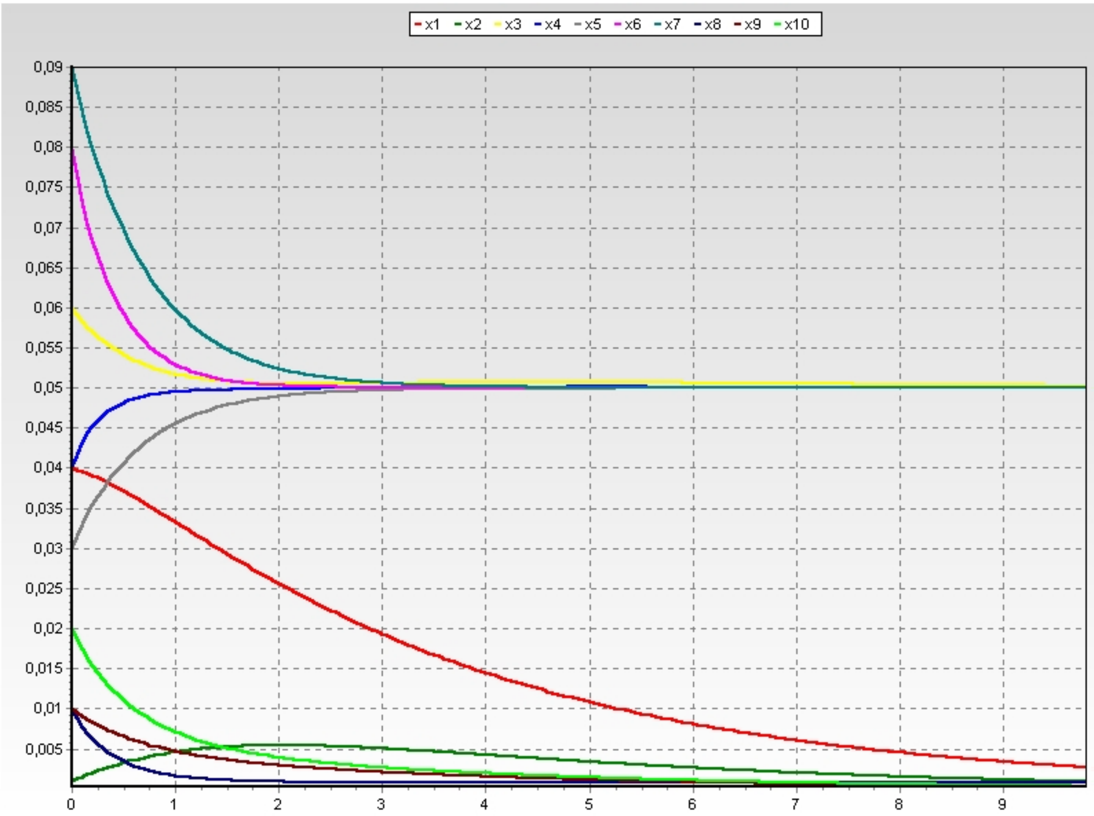
Из рисунка 3.6 видно взаимодействие сегментов. Построенная модель по своему виду напоминает систему «хищник-жертва».

Модель 2. Рассмотрим модель противовирусного иммунного ответа, построенную в третьем параграфе третьей главы.

Пусть в системе дифференциальных уравнений с запаздыванием (3.6) $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0.05$, $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.12$, $\lambda_3 = 1.4$, $\lambda_4 = 0.6$, $\lambda_5 = 0.4$, $\lambda_6 = 0.7$, $\lambda_7 = 1$, $\lambda_8 = 1.7$, $\lambda_9 = 4$, $\lambda_{10} = 2$, $\lambda_{11} = 1.2$, $\lambda_{12} = 3.4$, $\lambda_{13} = 5.3$, $\lambda_{14} = 1.1$, $\lambda_{15} = 2$, $\lambda_{16} = 1.5$, $\lambda_{17} = 1$, $\lambda_{18} = 0.5$, $\lambda_{19} = 0.7$, $\lambda_{20} = 2.3$, $\lambda_{21} = 5$, $\lambda_{22} = 1.4$, $\lambda_{23} = 2$, $\lambda_{24} = 0.04$, $\lambda_{25} = 2.5$, $\lambda_{26} = 3$, $\lambda_{27} = 2.4$, $\lambda_{28} = 3$, $\lambda_{29} = 1$, $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $k_4 = 0.8$, $\xi(z) = e^{-z}$, $\mu(t) = t - arctg(t)$.

Решение системы (3.6) на промежутке $t \in [0, 10]$ с начальным условием $x(0) = \alpha$, $\alpha = (0.04, 0.001, 0.06, 0.04, 0.03, 0.08, 0.09, 0.01, 0{,}01, 0.02)$ представлено на рисунке 3.7.

Рис. 3.7.



Заключение

Работа посвящена изучению системы n функционально-дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = A(t)x + \widetilde{A}(t, \lambda)x + \widetilde{B}(t, \lambda)T_\mu x + \widetilde{f}(t, \lambda) + f\big(t, x, T_\mu x, \lambda\big), \qquad (1)$$

в которой $A(t)$, $\widetilde{A}(t, \lambda)$, $\widetilde{B}(t, \lambda)$– непрерывные $(n \times n)$ – матрицы, $\widetilde{f}(t, \lambda)$, $f(t, x, y, \lambda)$ – непрерывные n-мерные вектор-функции, T_μ – оператор сдвига.

Цель работы найти достаточные условия существования ненулевых решений двухточечной задачи системы (1). В результате исследований изучена структура решений системы (1), получена система нелинейных не дифференциальных уравнений, которая исследована с помощью построения операторных уравнений относительно начальных условий и параметра, определяющих искомые решения, а также с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке. Рассмотрены случаи, когда задача решается по свойствам нелинейной части.

Приложение содержит программу, позволяющую находить численные решения системы (1), а так же решения систем с оператором типа Вольтерра и постоянными запаздываниями. Решения представляются графически.

Литература

1. Аваков Е.Р. Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения // Мат. заметки. – 1990. – Т. 47, вып. 5. С. 3-13.
2. Азбелев Н.В., Максимов В.П. Априорные оценки решений задачи Коши и разрешимость краевых задач для уравнений с запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15, № 10. С. 1731-1747.
3. Азбелев Н.В., Максимов В.П. Уравнения с запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 12. С. 2027-2050.
4. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. Функционально-дифференциальные уравнения // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14, № 5. С. 771-797.
5. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 278 с.
6. Азбелев Н.В. Краевая задача для одного класса квазилинейных уравнений // Труды МИХМа. Выпуск 64. Автоматизация химических производств на базе математического моделирования. Тезисы докладов. Под ред. Азбелева Н.В. Москва, 1975. С. 52 – 54.
7. Андронов А.А. Собрание трудов. Изд. АН СССР, 1956.
8. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
9. Бенуа Е.Ю. Автоколебательные режимы в системах экстремального регулирования с запаздыванием // Ученые записи Ленинградского госпединститута им. Герцена, 1960, т. 218.
10. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические ме-

тоды в теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1955. 344 с.

11. Бойчук А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач. Киев.: Наук. думка, 1990. 96 с.

12. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.

13. Веретенников В.Г. Устойчивость и колебания нелинейных систем. М.: Наука, 1984. 320с.

14. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 286 с.

15. Воскресенский Е.В. Асимптотическое равновесие, периодические решения и прямой метод Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 6. С. 729-732.

16. Воскресенский Е. В. О периодических решениях возмущенных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1991. № 1. С. 11-14.

17. Воскресенский Е. В. О периодических решениях нелинейных систем и методе сравнения // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 4. С. 571-576.

18. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

19. Гребенщиков Б.Г. О почти периодических решениях одной нестационарной системы с линейным запаздыванием // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 3. С. 531–537.

20. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

21. Измаилов А.Ф., Третьяков А.А. Факторанализ нелинейных отображений. – М.: Физматлит, 1994. 336 с.

22. Каменков Г.В. Избранные труды. т. I. М.: Наука, 1971. 214с.

23.Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 572 с.

24.Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 332 с.

25.Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975. 511 с.

26.Красовский Н.Н. О периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием времени. // Докл. АН СССР, 1957. т. 114 № 2.

27.Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. Изд. АН УССР, Киев. 1937.

28. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: ГИФМЛ, 1963. 432 с.\

29. Кюн О.И. Краевая задача для системы нейтральных уравнений нейтрального типа // Труды МИХМа. Выпуск 64. Автоматизация химических производств на базе математического моделирования. Тезисы докладов. Под ред. Азбелева Н.В. Москва, 1975. С. 8 – 11.

30. Лернер А.Я. Автоколебания в системах с нелинейной скоростной связью при наличии запаздывания в регуляторе. Сб. статей по автомат. и электротехн., Изд. АН СССР, 1956.

31.Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 510с.

32. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. 471 с.

33. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1956. 365 с.

34. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.532 с.

35. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470с.
36.Мандельштам Л.И. Полное собрание трудов. Изд. АН СССР, тт. 1-3, 1948-1952.
37. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. М.: Мир, 1983. 397 с.
38.Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. – М.: Наука, 1980.
39.Митропольский Ю.А. Математические методы в биологии. Киев, 1983.
40.Митропольский Ю.А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964.
41.Митропольский Ю.А. Лекции по методу усреднения в нелинейной механике. Киев.: Наукова думка, 1966.
42.Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
43. Мышкис А.Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Успехи матем. наук, 1950, 5, № 2 (36), С. 148-154.
44. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. 471 с.
45. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1949. 550 с.
46.Никишов А.А. Исследование системы с отклоняющимся аргументом, описывающей реакцию иммунной системы организма на появление в нем вируса // Дифференциальные уравнения. Рязань, 1994. С.75–78.
47.Папалекси Н.Д. Собрание трудов. Изд. АН СССР, 1948.

48.Перов А.И. Признаки устойчивости в критических случаях. // Устойчивость и управление для нелинейных трансформирующихся систем: 2-я Международная конференция, Москва, 25 – 28 сентября, 2000: Тезисы доклада. М. 2000, С. 36.
49.Перов А.И. Достаточные условия устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами в критических случаях. // Автоматика и телемеханика. 2000, № 10. С. 49 – 59.
50.Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.-Л.: Наука, 1964. 367 с.
51. Плисс В.А. О существовании периодических решений у некоторых нелинейных систем // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. №5. С. 1060-1073.
52. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 332 с.
53. Пуанкаре А. Избранные труды. М.: Наука, 1971. Т.1. 771 с.
54.Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики. М.: Наука, 1977. 336 с.
55.Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика. М.: Наука, 1984. 304 с.
56.Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.
57.Рубаник В.П. Резонансные явления в квазилинейных колебательных системах с запаздывающими аргументами // Изв. ВУЗ СССР. Математика, 1962. № 5 (30).
58.Сафонов Л.А., Стрыгин В.В. Метод осреднения в линейно-квадратичных задачах управления // Докл. РАН. 2000. 375, № 2, С. 166 – 168.
59.Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических со-

обществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
60.Смит Дж.М. Модели в экологии. М.: Мир, 1976. 184 с.
61.Стрыгин В.В., Есипенко Д.Г. Гибридный метод построения асимптотики для нелинейной сингулярно возмущенной задачи Коши с быстро осциллирующими условно-периодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1998. – 34, № 3. С. 320 – 325.
62.Терехин М.Т. О решениях дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 4. С. 597-602
63.Терехин М.Т. О существовании неподвижной точки одного нелинейного оператора // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20, № 9. С. 1561-1565.
64.Терехин М.Т. Бифуркация периодических решений функционально-дифференциальных уравнений // Известия высших учебных заведений. Математика. № 10 (449). 1999. С. 37–42.
65.Терехин М.Т., Насыхова Л.Г. Существование бифуркационного значения параметра системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. 1997, Т. 49. № 6. С. 799–805.
66.Тетельбаум С.М., Рапопорт Г.Н. К вопросу о применении метода разложения по степеням малого параметра для исследования автоколебательных систем с элементами запаздывания // Сб. научно-техн. статей Инст. электротехн. АН УССР, вып. 2, 1948.
67. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.
68. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1966. Т.2. 608 с.

69.Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. (Под ред. Рубаника В.П.) М.: Мир, 1971. 313 с.
70. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1980. 720 с.
71.Хейл Дж. К. Колебания в нелинейных системах. М.: Мир, 1966. 230 с.
72.Шевело В.Н. Осциляция решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Киев: Наук. думка, 1978. 156 с.
73.Шиманов С.Н. К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием // Прикл. математ. и механ., 1959, т. 23, вып. 5.
74.Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964. 128 с.
75.Эльсгольц Л.Э. Качественные методы в математическом анализе. М.: Физматгиз, 1955.
76.Coel N.S., Maitra S.C., Montroll E.W. On the Valterra and other nonlinear models of interacting populations. // Revs Mod. Phys., 1971, 43, № 2, p. 1, p. 231-276.
77.Cunningham W.J. A nonlinear differential-difference equation of growth. // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1954, 40, p. 708–713.
78.Mac-Donald N. Time lags in biological models. Lect. Notes Biomath., 1978, № 27. 112 p.
79.Marchuk G.I., Petrov R.V. The mathematical model of the antiviral immune response. – In: Mathematical modeling. – North-Holland, 1983, p. 161–174.
80.Теняев В.В. Двухточечная задача неоднородной системы с линейным запаздыванием / Ряз. гос. пед. ун-т. – Рязань, 2001. – 9 с. – Деп. в ВИНИТИ 02.03.2001 г., № 550 – В2001.
81.Теняев В.В. Двухточечная задача нелинейной системы с линей-

ным запаздыванием / Ряз. гос. пед. ун-т. – Рязань, 2001. – 9 с. – Деп. в ВИНИТИ 02.03.2001 г., № 551 – В2001.

82.Теняев В.В. непрерывная зависимость решений от начальных данных и параметра нелинейной системы с запаздыванием / Ряз. гос. пед. ун-т. – Рязань, 2001. – 12 с. – Деп. в ВИНИТИ 02.03.2001 г., № 552 – В2001.

83. Теняев В.В. Оценки и представление решений систем дифференциальных уравнений с линейным запаздыванием // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. / РГПУ. Рязань, 2001. № 4. С. 96–102.

84. Теняев В.В. Условия существования и отсутствия решения двухточечной краевой задачи нелинейной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. / РГПУ. Рязань, 2001. № 4. С. 103–107.

85. Теняев В.В. Об одной задаче системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. / РГПУ. Рязань, 2001. № 5. С. 165–171.

86. Теняев В.В. Двухточечная задача нелинейной системы с запаздыванием // VIII международная конференция «Математика, компьютер, образование» (г. Пущино, 31.01 – 05.02.2001 г. Тезисы докладов. Москва: Прогресс-Традиция. 2001 г. С. 236. Тираж 550 экз.

87. Теняев В.В. Двухточечная задача системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Современные методы в теории краевых задач «Понтрягинские чтения». Воронеж, ВГУ, 2001. С. 151 – 152. Тираж 300 экз.

88. Теняев В.В. Достаточные условия существования решения двухточечной краевой задачи нелинейной системы с запаздыва-

нием // Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании (НИТ-2001). VI Всероссийская научно-техническая конференция студентов, молодых учёных и специалистов. Рязань: РГРТА, 2001. С. 16 – 17. Тираж 110 экз.

89. Теняев В.В. Условия существования решений двухточечной задачи нелинейной системы с линейным запаздыванием. Математика. Компьютер. Образование. Вып. 8. Часть II. Сборник научных трудов / Под редакцией Г.Ю. Ризниченко. – М.: «Прогресс-Традиция», 2001. С. 443 – 449. Тираж 200 экз.