На правах рукописи

Жуков Анзор Людинович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СНЕЖНОГО ПОКРОВА НА ОСНОВЕ МЕТОДА ГРАНУЛЯЦИИ

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ,

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Таганрог – 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Южный федеральный университет».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор, Сухинов Александр Иванович
Официальные оппоненты:	Куповых Геннадий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, Технологический институт ФГАОУ ВПО «Южный федеральный университет» в г. Таганроге, зав. кафедрой физики
	Чикин Алексей Львович, доктор физико-математических наук, с.н.с, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт аридных зон» Южного научного центра Российской академии наук, главный научный сотрудник
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение «Высокогорный геофизический институт» Федеральной службы России по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды (ФГБУ «ВГИ»)

Защита состоится «3» июля 2012 г. в 10^{20} на заседании диссертационного совета Д.212.208.22 при Южном федеральном университете по адресу:
347928, Ростовская обл., г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44, ауд. Д-406

С диссертацией можно ознакомиться в зональной научной библиотеке ЮФУ по адресу: 344000, Ростов-на-Дону, ул. Пушкинская, 148.

Автореферат разослан «22» мая 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета А.Н. Целых

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Снег – это природное минеральное образование, отличающееся от других минералов тем, что его существование протекает вблизи тройной точки воды, поэтому процессы его образования содержат неопределенность, а метаморфизм происходит значительно быстрее, чем у других минералов. Снег играет исключительно важную роль в жизни дефляционных регионов земного шара, составляющих значительную часть поверхности суши, особенно в нашей стране. В связи с этим изучение и предсказание свойств естественного состояния снега в природе – снежного покрова (СП) – имеет исключительно важное народнохозяйственное значение.

Основы снеговедения (хионологии) заложены в России А. И. Воейковым. Уже в XIX в. в России исследуется проблема снежных заносов, разрабатывается теория метелей (Н. Е. Жуковский). В 30-х-40-х годах XX в. основная задача при изучении СП была связана с обеспечением гидрологических прогнозов, исследованием процессов таяния и водоотдачи (П. П. Кузьмин и др.). В 50-х и 60-х годах большой вклад в изучение СП внесли Г.К. Тушинский, Г.К. Сулаквелидзе, В.М. Котляков, К.Ф. Войтковский, А.К. Дюнин и ряд других исследователей. В Японии основополагающий вклад в изучение снега внес U. Nakaya, в США – M. Atwater, в Швейцарии – M. De Quervain, а также значительное количество исследователей из других стран. Теоретическое изучение физических свойств СП было проведено в работах М.А. Долова, В.А. Халкечева и ряда других исследователей. В последние годы развивается теория процессов в средах фрактальной структуры, физика которых рассматривается в работах Б.М. Смирнова, Р.И. Нигматулина и др., а математические модели рассматриваются в работах А.М. Нахушева, В.Д. Бейбалаева и др.

Важнейшей задачей хионологии является создание математических моделей и численных методов, позволяющих корректно отображать процессы: возникновения и роста элементов СП (снежинок); формирования СП и его первичного уплотнения; метаморфизма и уплотнения снежного покрова под действием различных факторов; таяния (абляции) снежного покрова, что определяет цель диссертационной работы.

Целью диссертационной работы является разработка математических моделей этапов полного процесса существования снежного покрова – от формирования его элементов до завершения их метаморфизма в составе снежного покрова. Эти модели должны строиться на основе современных теорий описания сред сложной структуры (фрактальных сред) и должны обеспечивать разработку математически корректных численных методов и эффективных программных средств моделирования процессов формирования и метаморфизма снежного покрова, а также моделирование процессов переноса внутри снежного покрова, определяющих его свойства.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

– Разработка общей математической модели формирования фрактальных кластеров, учитывающей совместное действие процессов агрегации и диссипации элементов кластера и численного метода имитационного моделирования процесса образования кластера;

– Разработка новой математической модели регулярного фрактального объекта (снежинки) как элемента фрактальной среды (снежного покрова) формируемой из отдельных кластеров и численного метода определения параметров такого объекта;

– Разработка общей структурной модели представления фрактальной среды в гранулированной форме (в виде укладки гранул), корректно описывающей структуру такой среды (снежного покрова) и оценивать ее параметры;

– Разработка численного метода расчета аномальных процессов переноса для фрактальных сред, учитывающего качественно новые черты процессов переноса во фрактальных средах в сравнении с процессами в сплошных средах;

– Создание программного комплекса на базе разработанных численных методов, обеспечивающего моделирование всех этапов существования снежного покрова как фрактальной среды.

Объектом исследования в диссертационной работе являются общие математические модели физических процессов, сопровождающих формирование, перенос, уплотнение, метаморфизм, а также физических свойств снежного покрова, разработанные на основе теории грануляции (позволяющей учитывать неопределенность в данных), а также численные методы решения задач на указанных моделях.

Методологическую основу работы составляют теория процессов во фрактальных средах, термодинамика, теория теплопереноса, а также теория грануляции, позволяющая корректно решать ряд задач, ранее изучаемых экспериментальным путем и не лежавших в сфере математического моделирования. Использование теории грануляции позволяет создать математические модели физических процессов в СП на единой основе.

Новыми научными результатами диссертационной работы, выносимыми на защиту, являются:

– Обобщенная математическая модель формирования фрактальных кластеров, которая учитывает совместное влияние процессов агрегации и диссипации на формирование кластера и разработанный на ее основе численный метод имитационного моделирования процесса образования кластера, позволяющий моделировать процессы формирования снежинок (с. 38-44);

– Новая математическая модель регулярного фрактального объекта (снежинки) как элемента фрактальной среды (снежного покрова) формируемой из отдельных кластеров, связывающая геометрические характеристики объекта с его физическими свойствами, а также численный метод определения параметров модели фрактального объекта, построенный на основе разработанной модели (с. 56-66);

– Общая структурная модель представления составной фрактальной среды в гранулированной форме (в виде укладки гранул, содержащих отдельные фрактальные кластеры), корректно описывающая структуру такой среды (снежного покрова как укладки снежинок) и позволяющая находить ее параметры (с. 95-104);

– Численный метод расчета аномальных процессов переноса для фрактальных сред, обладающий абсолютной устойчивостью и эффективно моделирующий качественно новый характер процессов переноса во фрактальных средах в сравнении с процессами в сплошных средах (с. 111-119);

– Программный комплекс на базе разработанных численных методов, обеспечивающий моделирование этапов существования снежного покрова как фрактальной среды и изучать процессы переноса в снежном покрове (с. 129-132).

Теоретическая значимость результатов исследований заключаются во введении нового типа математических моделей элементов снежного покрова на основе синтеза теории фракталов и теории грануляции; разработке математической модели структуры снежного покрова и применении их в задачах изучения аномальных процессов переноса внутри снежного покрова.

Практическая ценность работы определена разработкой эффективных алгоритмов и программ, позволяющих оперативно моделировать на различных вычислительных платформах характеристики жизненного цикла снежного покрова (в условиях неопределенности параметров), а также рассчитывать физические характеристики снежного покрова и процессы в нем. Эти результаты приводят к значительному повышению качества и оперативности анализа данных по состоянию снежного покрова в процессе их оперативной обработки и анализа.

Апробация работы. Научные и практические результаты, полученные в диссертации, изложены в 24 статьях и 5 тезисах, апробированных на всесоюзных и международных конференциях, из них 6 – в изданиях Перечня ВАК.

Основные результаты докладывались и обсуждались на следующих всероссийских и международных научных конференциях:

– Международной научно-практической конференции «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте», Коломна 2009, 2011 гг.;

– V Международной научной конференции «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения», Дагестан, Махачкала, 2011 г.;

– Международном конгрессе «Интеллектуальные системы и информационные технологии» (AIS-IT'10), Геленджик-Дивноморское 2009-2011 гг.;

– Всероссийской конференции молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик, 2008-2011 гг.;

– Всероссийской научно-технической конференции «Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях» (ИАМП-2011), Бийск, 2011 г.;

– Международном симпозиуме «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик, 2008-11 гг.;

– Всероссийской научной конференции «Интерактивные системы: Проблемы человеко-компьютерного взаимодействия» (ИС-2011) Ульяновск 2011 г.;

– VIII Школе молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики», Нальчик-Хабез 2010 г.;

– Международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии» ИСТ-2010, Нижний Новгород 2010 г.;

– Научной сессии МИФИ-2010, Москва 2010 г.;

– Международной алгебраической конференции, посвященной 80-летию со дня рождения А.И. Кострикина, Нальчик 2009 г.;

Тема диссертационной работы поддержана грантом РФФИ № 11-01-90700-моб_ст.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех тематических глав, заключения, списка литературы и приложений. Работа содержит 153 стр., а также 48 рисунков, 7 таблиц, список литературы из 154 наименований, 72 стр. приложений.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, ее новизна, практическая значимость. Дается обзор основных направлений исследования по изучаемой тематике. Сформулированы цель и задачи исследования, представлены основные положения, выносимые на защиту, охарактеризована структура диссертации.

В первой главе рассматривается агрегационный подход в моделировании различных природных сред, подчиняющихся степенным зависимостям от параметров. Фрактальные свойства этих объектов с математической точки зрения выражаются в том, что если выбрать одну из связанных частиц в качестве центра сферы, радиус которой R существенно превышает размер отдельной частицы среды, то масса вещества m, сосредоточенная внутри сферы, зависит от радиуса по степенному закону

$$m(R) \sim R^D, \qquad (1)$$

где параметр D является фрактальной размерностью (ФР) объекта, т.е. имеет *дробное значение* (в отличие от твердых тел, для которых размерность имеет целое значение). Для реальных снежинок, представляющих собой фрактальные кластеры (ФК) этот параметр находится в пределах $1{,}7 \le D \le 2{,}5$. Из (1) ясно, что размеры ФК ограничены, однако объект может состоять из отдельных ФК (снежный покров). Вводя корреляционную функцию ФК в виде

$$C_\Omega(r) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\rho(r_i)\rho(r_i + r) = \frac{\langle \rho(r')\rho(r'+r)\rangle}{\langle \rho(r')\rangle}, \ \rho_i = \begin{cases} 1, if\ x_i \in \Omega; \\ 0, if\ x_i \notin \Omega. \end{cases}, \ i = 1,2,...,N, \qquad (2)$$

где N – число элементов ФК Ω, i – номер элемента, ρ – дискретная плотность в точке, мы можем представить ее в степенном виде

$$C_\Omega(r) = const/r^\alpha, \ D_\alpha = d - \alpha, \ r \gg r_0. \qquad (3)$$

В области радиусов $R \gg r \gg r_0$, где R – размер ФК, (2) удовлетворяет (3), (2) есть средняя плотность ФК на расстоянии r от произвольной точки, принадлежащей ФК. Средняя плотность внутри произвольной сферы также определяется степенным законом $\rho(r) = const/r^{\alpha}$. Запишем зависимости между размером кластера R и числом входящих в него частиц N (массой кластера) в виде:

$$R \sim N^{\beta}, \ N \sim R^{D_{\beta}}, \ \beta = 1/D_{\beta}. \tag{4}$$

Поскольку средняя плотность вещества ФК в сфере радиуса r оценивается с учетом (4) как $\overline{\rho}(r) = \rho_0 (r_0/r)^{3-D_\beta}$, то физически это значит, что с ростом r в объеме ФК будут возникать пустоты. В этом случае граничный размер ФК оценивается также степенным законом $R \propto r_0 (\rho_0/\rho)^{3-D_\beta}$, как оценка максимального размера ФК в пористой среде. На основании степенных законов могут моделироваться характеристики пористых сред (таких, как снежный покров) в области $\overline{R} \gg r \gg r_0$ для ФК, состоящих из частиц с характерным размером r_0 и с максимальным радиусом пор $\overline{R}$. Максимальный размер пор $\overline{R}$ может быть оценен как

$$\overline{R} \sim r_0 \left(\rho_0/\overline{\rho}\right)^{\frac{1}{3-D_\beta}}. \tag{5}$$

Фрактальная размерность кластера D_β характеризует также функцию распределения по размерам пор. Пусть пористая среда занимает объем V_0 и, соответственно, имеет массу $\overline{\rho} V_0$. Выделим элемент объема, находящийся на расстоянии $r \ll \overline{R}$ от ФК:

$$V(r) \sim \overline{\rho} V_0 / \rho(r) \sim V_0 \left(r/\overline{R}\right)^{3-D_\beta}. \tag{6}$$

На основании законов (1)-(6) возможна оценка важнейших для практики свойств фрактальных сред (снежного покрова). Для использования этих оценок достаточно знать ФР среды. Для СП такие оценки даются на основе алгоритмов оценки ФР снежинок, разработанного в работе.

Численные модели процессов роста концентрации частиц $N(t)$ непрерывной среды за счет диффузии вводятся на основании первого закона Фика и уравнения неразрывности в виде:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + divF = 0, \tag{7}$$

где плотность потока частиц F определяется уравнением $F = -K \nabla N$, где K – коэффициент диффузии. Уравнение (7) решается в ограниченной прямоугольной области $\Omega : \{0 \le x \le l_1, \ \ 0 \le y \le l_2\}$ с границей Γ на прямоугольной сетке $x_i = ih_1, \ \ i = 0,1,...,n, \ \ y_i = jh_2, \ \ j = 0,1,...,m, \ \ h_1 = l_1/n, \ \ h_2 = l_2/m$. Граничные условия задают в виде Дирихле: $N(0,y) = \mu_1(y), \ \ N(l_2,y) = \mu_2(y), \ \ y \in [0,l_2]$, $N(x,0) = \mu_3(x), N(x,l_1) = \mu_4(x), x \in [0,l_1]$ где f, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 – заданные функции. Из (7) получаем уравнение диффузии вещества в пространстве:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = K\nabla^2 N . \tag{8}$$

Для случая моделирования роста в неравновесных условиях (8) следует дополнить граничным условием, описывающим скорость роста на границе объекта в виде:

$$\upsilon = \lambda \, \mathbf{n} \nabla N , \tag{9}$$

где λ – числовой коэффициент, а $\mathbf{n}$ – нормальный вектор границы ФК. Как развитие (9) в работах R. Kobayashi предложен подход к моделированию только на границе области роста (*potential field method*) в виде

$$\frac{\partial N}{\partial t} = a^2 \nabla^2 CN + R , \tag{10}$$

с анизотропным коэффициентом диффузии $K = a^2 C$, и дополнительной функцией R , определенной на границе области роста (потенциальная функция).

Модель агрегации на основе уравнения диффузии не описывает все возможные механизмы формирования ФК. Поэтому широкое распространение получили методы имитационного моделирования процесса агрегации. В работе предложена новая вероятностная модель конструирования ФК на плоскости в полярной системе координат, что соответствует симметрии снежинок. Следующий рисунок демонстрирует движение частицы диаметра d на полярной плоскости, разбитой по радиусам на n_{m} колец $r_n = nd$, $n = 1, 2, ..., n_m$.

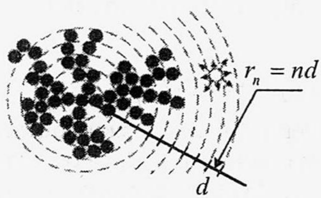


Рис. 1. Дискретные направления движения частицы в полярной модели.

При очередном переходе частица может присоединиться к кластеру (агрегация с вероятностью p_1) или выбить из кластера частицу (диссипация с вероятностью $p_2 = (1 - p_1)$). На полярной плоскости, разбитой кольцами на $M_n = \lfloor 2\pi r_n / d \rfloor$ ячеек, оценим вероятность агрегации-диссипации в грануле как:

$$P_n = \frac{1}{w} \sum_{k=-1}^{1} \left(\frac{K_n}{M_n} + \frac{k}{w_n} \left(1 + \frac{kd}{r_n} \right) \right), \; p_n = \frac{K_n}{M_n} . \tag{11}$$

Построенный таким образом кластер представляет собой набор слоев, каждый из которых характеризуется тройкой параметров N_n , M_n и $w_n \in \{0, 1, ..., 8\}$ (в отличие от известной модели, которой учитываются только N_n и M_n). Тогда масса модели кластера M связана с массой частицы μ размера d как

$M = \mu \sum_{n=1}^{n_{max}} N_n$ и фрактальную размерность модели ФК можно определить в виде:

$$d_F\left(n_{\max}\right) = d\log M\left(n_{\max}\right)/d\log n\left(n_{\max}\right), \qquad (12)$$

В зависимости от выбранного параметра диссипации w_n значение d_F модели кластера будет меняться (моделирование степени рыхлости кластера).

Основные идеи принципа гранулирования были заложены в ряде работ L. Zadeh. В них определена роль покрытий подмножеств пространства гранулами, представляющими собой декартовы произведения разбиений координатных осей (*декартовы гранулы* (рис. 2а)). Задав на плоскости проекции произвольной гранулы G как $pr_x G$ и $pr_y G$, инкапсулирующую декартову гранулу G^+ будем считать точной верхней гранью: $G^+ = pr_x G \times pr_y G$ для G (рис. 2b).

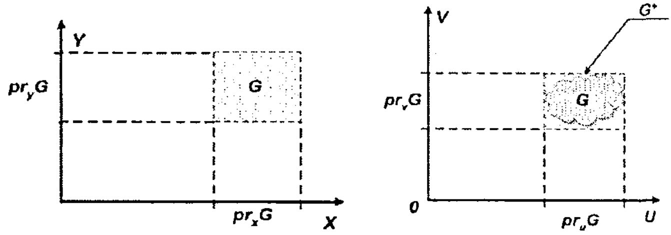


Рис. 2. Декартова гранула (а) и инкапсулирующая декартова гранула G^+ для произвольного множества точек плоскости (b).

В ряде наших работ было введено алгебраическое определение декартовых гранул в пространстве размерности n, заданным с помощью $n+1$ упорядоченной точки в виде:

$$G_n = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_n^1 & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & 1 \\ x_1^{n+1} & x_2^{n+1} & \cdots & x_n^{n+1} & 1 \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Модель двумерной гранулы G_2^{Polar} типа (13) в полярной ($n=2$) и цилиндрической ($n=3$) системах координат может быть определена заданием предельных значений полярных радиусов ρ^1 и ρ^2 и полярных углов φ^1 и φ^2 в виде:

$$G_2^{Polar} = \begin{pmatrix} \rho^1 & \rho^2 & 0 \\ \varphi^1\rho^2 & \varphi^1\rho^1 & 1 \\ \varphi^2\rho^2 & \varphi^2\rho^1 & 1 \end{pmatrix}, G_3^{Cyl} = \begin{pmatrix} z^1 & z^2 & 0 & 0 \\ \rho^2 & \rho^2 & \rho^2 & 0 \\ \varphi^2\rho^1 & \varphi^2\rho^1 & \varphi^2\rho^2 & 1 \\ \varphi^1\rho^1 & \varphi^1\rho^1 & \varphi^1\rho^2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Три базовые меры на двумерной грануле G_2 (14), имеющие очевидный геометрический смысл, задаются в виде:

$$\eta^1_{G_2} = \begin{vmatrix} x_1^2 & 1 \\ x_2^2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \eta^2_{G_2} = \begin{vmatrix} x_1^1 & 1 \\ x_2^1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \eta^3_{G_2} = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & 1 \\ x_1^3 & x_2^3 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

В частности, $\eta^3_{G_2}$ используется в анализе размерности фрактальных структур. Введенные модели позволяют строить параметризованные модели фрактальных структур для моделирования снежного покрова. Рис. 3 показывает структуру сегмента предложенного в работе нового типа фрактала – кругового.

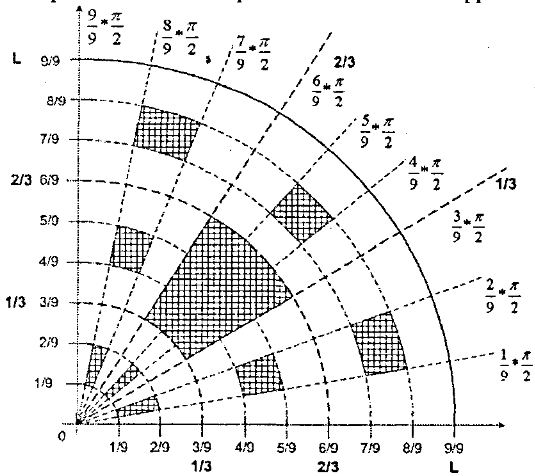


Рис. 3. Базовый элемент параметризованной модели фрактала в полярной системе координат (затравка модели регулярного фрактала)

Используя (14) и (15), мы можем получить уравнения численного метода для вычисления площадей параметризованных моделей предфракталов, зависящих от номера поколения T, от $T = 0$ (затравка фрактала по рис. 3) в виде:

$$\eta^N_{Polar} = \sum_{T=1}^{N} \left(\sum_{j=0}^{K^T} \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{L}{K^T} & 0 \\ \dfrac{(j+1)\Phi}{K^T} \cdot \dfrac{L}{K^T} & 0 & 1 \\ \dfrac{(j+2)\Phi}{K^T} \cdot \dfrac{L}{K^T} & 0 & 1 \end{vmatrix} + \sum_{j=0}^{K^T-1} \begin{vmatrix} \dfrac{L}{K^T} & \dfrac{(K-1)^T L}{K^T} & 0 \\ \dfrac{(j+2)\Phi}{K^T} \cdot \dfrac{(K-1)^T L}{K^T} & \dfrac{(j+2)\Phi}{K^T} \cdot \dfrac{L}{KT} & 1 \\ \dfrac{(j+1)\Phi}{K^T} \cdot \dfrac{(K-1)^T L}{K^T} & \dfrac{(j+1)\Phi}{K^T} \cdot \dfrac{(K-1)^T L}{K^T} & 1 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{K^T} \begin{vmatrix} \dfrac{(K-1)^T L}{K^T} & \dfrac{K^T L}{KT} & 0 \\ \dfrac{j\Phi}{K^T} \cdot \dfrac{K^T L}{K^T} & \dfrac{j\Phi}{K^T} \cdot \dfrac{(K-1)^T L}{K^T} & 1 \\ \dfrac{(j+1)\Phi}{K^T} \cdot \dfrac{K^T L}{K^T} & \dfrac{(j+1)\Phi}{K^T} \cdot \dfrac{(K-1)^T L}{K^T} & 1 \end{vmatrix} \right), \; j = 0,3,7,\ldots,\left\lfloor \frac{K^T}{P} \right\rfloor,\ldots,K^T. \qquad (16)$$

Значение индекса j значащего отрезка одномерного фрактального объекта в зависимости от поколения t определяется параметром $P \le (K-1)$. На рис. 3 $\Phi = \pi/2$ соответственно. Численный метод (16) используется для вычисления размерности подобия:

$$D_S = -\lim_{N\to\infty}\left(\ln N / \ln \eta^{N}_{Polar}\right). \qquad (17)$$

Если параметры L, K, P выбраны таким образом, что моделируемый фрактал является самоподобным, то для него размерность Хаусдорфа-Безиковича $D = D_S$.

Во второй главе на основании основных задач, сформулированных во введении и основных положений моделей фрактальных структур, на основе грануляции разработана модель морфологии снежинок, формирующих СП.

Такие физические свойства снега, как плотность, теплопроводность, теплоемкость, пористость, влажность, диэлектрическая постоянная, скорость распространения звука и т. д., для снега принципиально не могут длительно сохраняться, так как меняются формы и размеры снежинок, их связность. Такие особенности снега объясняются тем, что вода на Земле существует в условиях, близких к тройной точке фазовых переходов. Ее состояние определяется метеорологическими параметрами. Относительная влажность воздуха определяется как:

$$RH = \left(p_{(H_2O)} / p^{*}_{(H_2O)}\right) \times 100\%, \qquad (18)$$

где RH – относительная влажность смеси воздуха и водяного пара; $p_{(H_2O)}$ – парциальное давление паров воды в смеси, $p^{*}_{(H_2O)}$ – равновесное давление насыщенного пара. Если известны температура T и температура точки росы T_d (в градусах Цельсия), то можно записать

$$RH = \left(e_p / e_s\right) \times 100\%, \qquad (19)$$

где $e_p = e^{\frac{(a\times T_d)}{(273.3+T_d)}}$, $e_s = e^{\frac{(b\times T)}{(273.3+T)}}$ – парциальное давление водяного пара и давление пара при температуре T_d и T соответственно, а коэффициенты a и b выбираются из справочной литературы. Используя (19), мы можем формализовать модель эмпирической диаграммы, разработанной U. Nakaya. Лингвистические значения относительной влажности и температуры есть пятерки $\langle L, T(L), \Omega, M\rangle$, где L – имя ЛП; $T(L)$ – множество названий (термов), Ω – базовое множество, M – семантическое правило, отображающее каждый терм (название) в нечеткое подмножество Ω. Переменная 1 – температура воздуха (в градусах по Цельсию):

$$\left\langle \textit{Температура}, \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9\}, [0,30], M_T \right\rangle, \qquad (20)$$

где семантическая функция M_T задается с помощью набора ФП термов $A_1 - A_9$. Переменная 2 – относительная влажность воздуха (19):

$$\left\langle \textit{Влажность}, \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}, [0,1.5], M_{RH} \right\rangle, \tag{21}$$

где M_{RH} задается с помощью набора ФП термов $B_1 - B_6$ (см. рис. 4).

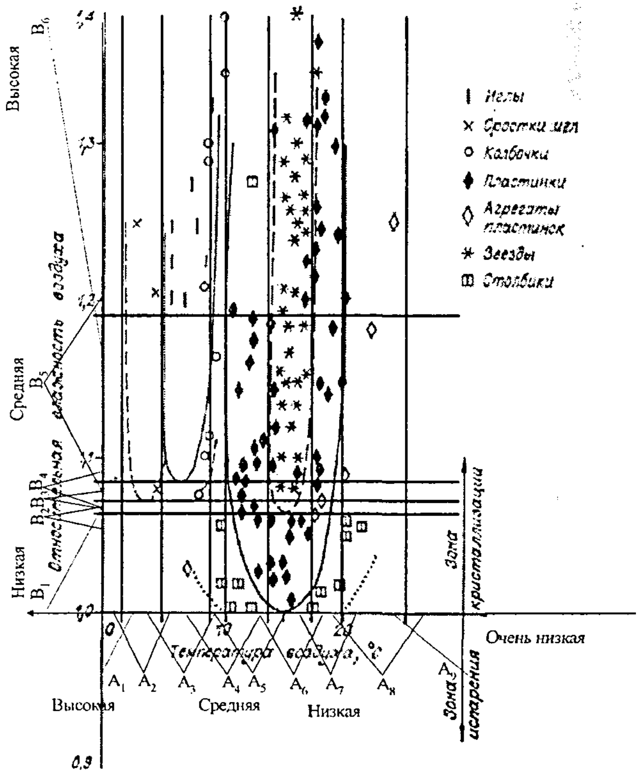
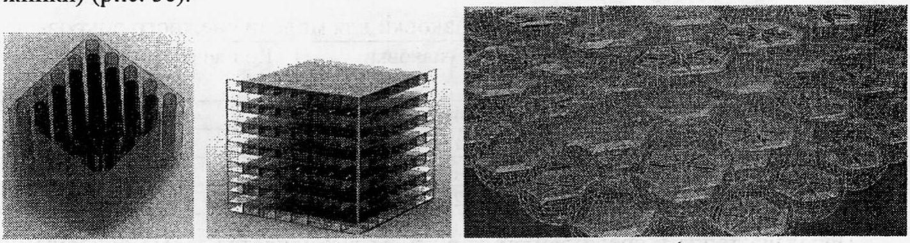


Рис. 4. Диаграмма Nakaya и терм-множества температуры и влажности для нее

В результате задача классификации снежных осадков по метеорологическим данным сводится к задаче представления нечеткого графика, моделирующего рис. 4, с помощью нечеткой нейронной сети. Для оценки качества гранулированного представления данных использован информационный подход.

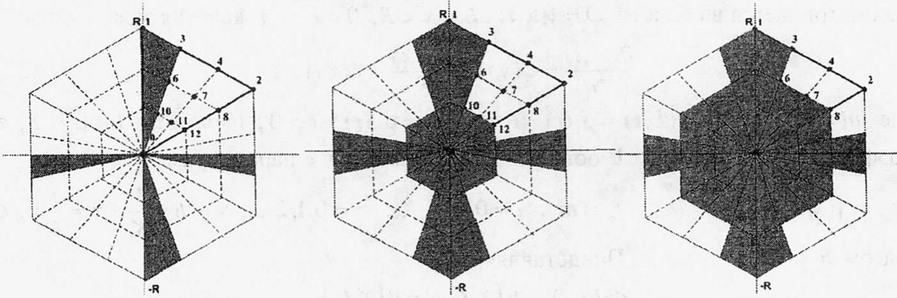
В третьей главе рассматривается существование снежинок после завершения фазы транзита из высоких слоев атмосферы и попадания в снежный покров, который имеет тепловой контакт с почвой снизу и с приземными слоями атмосферы сверху. В работах по физике СП, были предложены модели снежного покрова в виде регулярных геометрических структур (рис. 5а и 5b). Модель рис. 5а представляет собой систему регулярно расположенных цилиндров постоянного диаметра, соединяющих верхнюю и нижнюю поверхности СП. Температура и пар распределяются вдоль цилиндров. В модели рис. 5b объем снега представляется пакетом пластинок, расположенных перпендикулярно к направлению температурного градиента. Очевидно, что они не отражают фрактальные свойства СП. Нами предложена новая структурная модель снежного покрова в виде упаковки сфер, содержащих в себе отдельные фрактальные образования (снежинки) (рис. 5c).



a) b) (c

Рис. 5. Регулярные геометрические модели снежного покрова

Характеристики содержимого сфер (гранул) рис. 6 могут оцениваться по (1)-(6) на основе значения ФР снежинок, получаемой из диаграммы Nakaya (рис. 4). Для оценки проницаемости снежинок используем геометрические модели элементов содержимого сфер (рис. 6), которые отображают этапы метаморфизма снежинки в составе снежного покрова – округление – от рис. 6а до рис. 6с в результате диффузии водяного пара и т.д.



a) b) c)

Рис. 6. Гранулированные модели состояний снежного кристалла

Результаты вычислений для моделей рис. 6 приведены в таблице.

Таблица 1

Значения проницаемости гранулы для моделей формы снежных кристаллов

Вид модели кристалла	Проницаемость гранулы
Модель 1 (рис. 6а)	0,893
Модель 2	0,785
Модель 3 (рис. 6b)	0,774
Модель 4 (рис. 6с)	0,719
Полная гранула	0,173

Изучение табл. 1 показывает, что процесс округления приводит к уменьшению проницаемости гранул, что соответствует экспериментально выявленным свойствам СП.

В рамках используемой структурной модели СП по рис. 5c мы можем, решать исследовать возможные механизмы уплотнения СП за счет изменения типа упаковки сфер, что отображено в следующей таблице.

Таблица 2

Значения градаций плотности упаковки для модели снежного покрова

Вид упаковки	Плотность упаковки μ	Кол-во соприкасающихся шаров
Наиболее плотная	0,740	12
Кубическая	0,513	6
Тетраэдральная	0,340	4
Наименее плотная	0,123	4

Передача тепла в среде любой структуры выполняется тремя основными способами: *теплопроводностью*, *конвекцией*, *излучением*. Именно наличие всех трех механизмов переноса тепла требует использования модели аномального теплопереноса. В диссертационной работе рассматривается модель переноса тепла во фрактальной среде, подробно исследованная в работах А.М. Нахушева, В.Д. Бейбалаева и др. Эта модель является общей, поскольку путем выбора граничных условий можно учесть физические условия, связанные с различными направлениями распространения тепла внутри снежного покрова, а путем выбора параметров можно учесть свойства составляющих снежного покрова. В работе рассматривается в области $D = \{(x,t\} : L < x < R,\ 0 < t < T\}$ краевая задача вида:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = C(x,t)\frac{\partial^{\beta} u(x,t)}{\partial x^{\beta}} + f(x,t), \tag{22}$$

где $u(x,0) = \varphi(x)$, $u(L,t) = \mu_1(t)$ и $u(R,t) = \mu_2(t)$, $t > 0$, параметр $1 < \beta \le 2$, а коэффициент $C(x,t) \ge 0$. В области D введем сетку с параметрами:

$\varpi_{h\tau} = \{(x_i, t_n):\ x_i = ih\ ,\ ,t_n = n\tau\ ,\ i = 0,1,...,K\ ,\ n = 0,1,2,...,N\ ,\ h = \frac{1}{K},\ \tau = \frac{T}{N}\}$, с шагом h по x и τ по t. Представляя

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u(x,t_{n+1}) - u(x,t_n)}{\tau} \tag{23}$$

и используя (22), получим

$$\frac{u(x,t_{n+1}) - u(x,t_n)}{\tau} = C(x,t)\frac{\partial^{\beta} u(x,t)}{\partial x^{\beta}} + f(x,t) + o(\tau). \tag{24}$$

В данном уравнении используется производная Римана порядка β :

$$\frac{d^{\beta} f(x)}{dx^{\beta}} = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\frac{d^n y}{dx^n}\int_L^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{\beta+1-n}}d\xi, \tag{25}$$

где n – целое число $n-1 < \varepsilon < n$. Для аппроксимации (25) используется формула Grünwald, дискретизирующая (25):

$$\frac{d^{\beta} u(x,t)}{dx^{\beta}} = \frac{1}{\Gamma(-\beta)}\lim_{N_x \to \infty}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{N_x}\frac{\Gamma(k-\beta)}{\Gamma(k+1)}u((x-(k-1)h),t), \tag{26}$$

где N_x – число узлов решетки по x, $h = (x - x_L)/N_x$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция. В

(26) используются нормализованные коэффициенты Grünwald:

$$g_{\beta,k} = (-1)^k \frac{(\beta)(\chi-1)\cdots(\beta-k+1)}{k!}, \quad k = 1,2,... \tag{27}$$

На основании (24) и (27) получим неявную схему с опережением на шеститочечном шаблоне вида:

$$u_i^{n+1} = b \cdot C_i^n g_0 \cdot u_{i+1}^n + (1 + b \cdot C_i^n g_{\beta,1}) u_i^n + b C_i^n \sum_{k=2}^{i+1} g_{\beta,k} u_{i-k+1}^n + f_i^n \cdot \tau, \tag{28}$$

где $i = 1,2,...,K-1$, $n = 0,1,2,...,N-1$, $b = \tau / h^\beta$. В матричной форме (28) можно записать в виде системы линейных уравнений:

$$AU^{n+1} = U^n + \tau f^n, \tag{29}$$

где $U^{n+1} = \left[u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, ..., u_K^{n+1}\right]^T$, $U^n = \left[u_0^n, u_1^n, ..., u_K^n\right]^T$, $f^n = \left[0, f_1^n, f_2^n, ..., f_{K-1}^n, 0\right]^T$.

Теорема 3.1 Неявная разностная схема (28) с матрицей (29) *безусловно* устойчива.

Доказательство. Собственные значения матрицы (29) находятся в соединении K кругов с центрами в точках a_{ii} и с радиусами r_i, определяемыми нормализованными коэффициентами (27):

$$r_i = \sum_{k=0,k\neq i}^{K} a_{ik} = \sum_{k=0,k\neq i}^{i+1} \xi_i g_{\beta,k} < \xi_i \beta, \tag{30}$$

$$a_{ii} = 1 - \xi_i g_{\beta,1} = 1 + \xi_i \beta > 1. \tag{31}$$

В силу (30), (31) все собственные значения матрицы (29) будут больше единицы, а собственные значения обратной матрицы положительны и меньше единицы. Следовательно, разностная схема (28) *безусловно устойчива.*

Для проверки разностной схемы в работе использован тестовый пример задачи аномального теплопереноса, имеющей аналитическое решение. Погрешность решения не превосходит $\varepsilon = 0.01$.

В четвертой главе рассматриваются вопросы реализации полученных численных методов.

Алгоритм оценки фрактальной размерности элементов СП использует метод оценки размерности Хаусдорфа для фрактальных структур, дополненный схемой покрытий фракталов типовыми гранулами (13) в виде

$$\eta_{G_2^3}^3 = \begin{vmatrix} \left(\min\left(\left(x_1^1\right)_i, \left(x_1^1\right)_j\right)\right) & \left(\min\left(\left(x_2^1\right)_i, \left(x_2^1\right)_j\right)\right) & 1 \\ \left(\max\left(\left(x_1^2\right)_i, \left(x_1^2\right)_j\right)\right) & \left(\max\left(\left(x_2^2\right)_i, \left(x_2^2\right)_j\right)\right) & 1 \\ \left(\max\left(\left(x_1^3\right)_i, \left(x_1^3\right)_j\right)\right) & \left(\min\left(\left(x_2^3\right)_i, \left(x_2^3\right)_j\right)\right) & 1 \end{vmatrix}, \quad i = 1,...,N, \quad j = 1,...,N. \tag{32}$$

С помощью этого алгоритма были исследованы изображения снежинок из базы данных, что позволило оценить параметры размерности реальных снежинок, соответствующих различным зонам диаграммы Nakaya.

Разработан также численный метод имитации роста кластера с помощью модели агрегации-диссипации (11), (12).

Разработан метод численной оценки проницаемости фрактальных структур.

Разработан численный метод оценки размерности регулярного фрактала базирующийся на соотношениях (16). Он позволяет исследовать модели фрактальных структур, отличающихся различными параметрами (и, соответственно, геометрией).

Для разностной схемы аномального теплопереноса разработан алгоритм численного расчета процессов аномального теплопереноса для фрактальных структур на основе соотношений (22)–(29). Исследованы различные виды процессов переноса по вертикальному разрезу снежного покрова.

На базе разработанных алгоритмов создан комплекс программ для исследования аномальных процессов во фрактальных структурах на языке высокого уровня Java, позволяющий получить универсальные программные модули, реализуемые на различных платформах. С его помощью был проведен ряд численных экспериментов. Установлено, что в процессе метаморфизма СП изменяется его плотность (табл. 2), и, соответственно температуропроводность C , а также геометрия снежинок, что приводит к изменению параметра ФР для снежной среды β в (22). Следующие рисунки изображают временные слои решения задачи аномальной теплопроводности для СП.

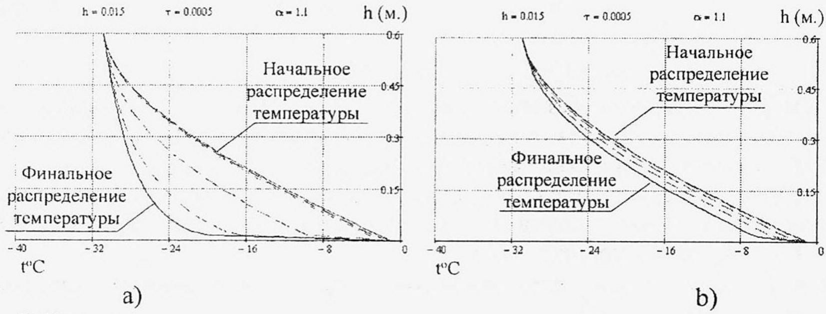


Рис. 7. Численное моделирование распределения температуры по вертикальному разрезу снежного покрова при $\beta = 1.1$, $C \equiv 1$ (a) и $C \equiv 0.1$ (b)

Сравнение рис. 7a и 7b показывает, что при достаточно малой величине β образуется зона высокой температуры у основания, что приводит к ускоренному метаморфизму нижних слоев (*глубинный иней*). В плотном снегу аномальность теплопереноса выражается более явно, что хорошо согласуется с эмпирическим описанием процессов метаморфизма СП. Результаты исследования численной модели СП на основе уравнений аномального теплопереноса хорошо согласуются с опытными данными по свойствам СП и позволяют количественно моделировать крайне важные для практических применений вопросы метаморфизма СП.

Заключение содержит выводы по работе.

Приложения содержат результаты исследования модели агрегации-диссипации, результаты экспериментального исследования фрактальной размерности снежинок, результаты моделирования проницаемости снежинок, тексты программного комплекса исследования процессов во фрактальных средах.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

– Разработана обобщенная математическая модель формирования фрактальных кластеров, которая учитывает совместное влияние процессов агрегации и диссипации на формирование кластера. Применение этой модели позволяет учитывать тот факт, что, в отличие от известных искусственных фрактальных сред (аэрогели и т.д.) в процессе формирования снежинок молекулы воды могут как агрегировать к кластеру, так и диссипировать от него, что и приводит к разнообразию форм снежинок (с. 38-44);

– Разработана математическая модель регулярного фрактального объекта как элемента снежного покрова формируемого из отдельных кластерных образований (снежинок), которая связывает геометрические характеристики снежинки с ее физическими свойствами и дает возможность с помощью разработанного численного метода определять физические параметры моделируемого фрактального объекта, в то время как известные модели снежинок являются не физическими, а визуальными (с. 56-66);

– Предложена структурная модель представления составной фрактальной среды (снежного покрова) в виде укладки гранул, содержащих отдельные фрактальные кластеры (снежинки), которая физически более корректно описывает структуру снежного покрова и ее параметры, чем это допускают известные модели, представляющие собой системы трубок, плоскостей и т.п. (95-104);

– Разработан численный метод расчета аномальных процессов переноса для фрактальных сред, который обладает абсолютной устойчивостью и высокой точностью и дает возможность численно изучать качественно новый характер процессов переноса во фрактальных средах в сравнении с процессами переноса в сплошных средах. Этот метод носит универсальный характер, поскольку путем выбора параметров он может использоваться и для решения классической задачи теплопереноса (111-119);

– Создан программный комплекс, выполняющий моделирование этапов существования снежного покрова как фрактальной среды и позволяющий изучать процессы переноса в снежном покрове для значительно более широкого класса моделей, чем известные ранее. Он отличается модульностью и расширяемостью за счет использования возможностей современных программных средств (129-132).

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Публикации в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Бутенков С.А., Жуков А.Л., Кривша Н.С., Джинави Я.А. Математические модели сред с фрактальной структурой на основе методов пространственной грануляции // Журнал «Известия ЮФУ. Технические науки», №9, 2011, с. 209-218.
2. Бутенков С.А., Жуков А.Л. Численный метод моделирования процессов

агрегации для не декартовых координат // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. – Нальчик:2011, т.13, №2, с. 77-81.

3. Жуков А.Л. Метод построения теоретических фракталов и численного оценивания их свойств // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. – Нальчик:2011, т.13, №2, с. 86-89.

4. Жуков А.Л. Интеллектуальный прогноз и классификация состава свежевыпавшего снега // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. – Нальчик:2010, т.12, №2, с. 99-103.

5. Сухинов А.И., Бутенков С.А., Жуков А.Л. Моделирование снежного покрова на кластерных вычислительных системах с использованием методов гранулирования многомерных данных // Журнал «Известия ЮФУ. Технические науки», №8, 2009, с. 213-223.

6. Бутенков С.А., Жуков А.Л. Гранулирование геометрических данных в задачах автоматизированного проектирования // Журнал «Известия ЮФУ. Технические науки», №9, 2008, с. 87-92.

Основные публикации в других изданиях:

7. Жуков А.Л. Математическая модель переноса тепла в снежном покрове на основе фрактальных моделей // В сб. трудов V международной научной конференции "Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения", Республика Дагестан, Махачкала, 26-29 сентября 2011 г., с. 113-122.

8. Жуков А.Л., Бутенков С.А. Геометрический метод моделирования снежных кристаллов в составе снежного покрова // Материалы Всероссийской конференции молодых ученых "Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики", Нальчик, 06-09 декабря 2011 г., с. 89-93.

9. S. Butenkov, A, Zhukov, Y. Ginawi, N. Krivsha Fuzzy model using geometrical optics for purpose of observation ocean surface under conditions of wind generated waves // "Interactive systems and Technologies: the problems of Human-Computer Interaction", Collection of scientific papers, Ulianovsk: UlSTU, 2011, p. 153-156.

10. Бутенков С.А., Жуков А.Л., Кривша Н.С. Алгебраический подход в теории информационной и пространственной грануляции на базе элементов Грассманна // Сб. трудов Международного конгресса "Интеллектуальные системы и информационные технологии IS&IT-2011", Геленджик-Дивноморское, 02-09 сентября 2011., с. 396-403.

11. Жуков А.Л. Численный метод оценки размерностей для фрактальных моделей с заданными геометрическими свойствами // Материалы IX Международной школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы анализа и информатики", Нальчик, 25-27 мая 2011, с. 45-49.

12. Жуков А.Л., Бутенков С.А. Общая модель фрактального объекта для различной размерности вмещающего пространства // В сб. тр. Второго международного Российско-Казахского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики", Нальчик, 23-27 мая 2011, с. 48-51.

13. Жуков А.Л., Бутенков С.А. О модели формирования фрактальных кластеров с помощью процессов диффузии-диссипации // Материалы Всероссийской

конференции молодых ученых “Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики”, Кабардино-Балкарская республика, Приэльбрусье, 06-09 декабря 2011 г., с. 59-62.

14. Жуков А.Л. Моделирование составляющих снежного покрова с учетом неопределенности // Материалы VIII Международной школы молодых ученых ”Нелокальные краевые задачи и проблемы анализа и информатики”, Нальчик, 25-30 июня 2010, с. 42-43.

15. Бутенков С.А., Жуков А.Л., Джинави Я.А. Искусственные нейронные сети на базе нейронов Грассманна // Сб. трудов Международного конгресса ”Интеллектуальные системы и информационные технологии AIS-IT’09”, Геленджик-Дивноморское, 03-10 сентября 2009., с. 82-89.

16. Бутенков С.А., Жуков А.Л. Информационная грануляция на основе изоморфизма алгебраических систем // Сб. трудов Международной алгебраической конференции, посвященной 80-летию со дня рождения А.И. Кострикина, Нальчик 12-18 июля 2008, с. 106-113.

17. Бутенков С.А., Жуков А.Л., Джинави Я.А. Топологические модели в задачах информационной грануляции // Сб. трудов V Международной научно-практической конференции ”Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте”, Коломна, 28-30 мая 2009., с. 312-324.

18. Жуков А.Л. Свидетельство об официальной регистрации в Роспатенте программы для ЭВМ «Программный комплекс для расчета процессов теплопереноса во фрактальных средах» № 2012614335, 16 мая 2012 г.

В работах, опубликованных в соавторстве, А.Л. Жукову принадлежат следующие результаты: в [1] разработан численный метод оценивания ФР модели; в [2] разработан алгоритм агрегации-диссипации; в [5] разработан метод разбиения диаграммы Nakaya; в [6] предложена модель полярных гранул; в [8] разработан численный метод оценивания проницаемости; в [9] разработан алгоритм оценивания качества модели; в [10] исследованы свойства гранулированной модели; в [12] предложена обобщенная модель снежинки; в [13] предложен метод параметризации модели; в [15] предложено использование модели перцептрона с гранулированием; в [16] введены теоретические основы грануляции в алгебраических системах; в [17] разработана модель минимизации неопределенности на гранулированных моделях.

Соискатель А.Л. Жуков

Подписано в печать «___» ________ 2012г. Формат 60x84/16
Бумага офсетная. Усл. п.л. 1,1.
Тираж 100 экз. Заказ № 162.
Отпечатано в типографии Технологического института
Южного федерального университета в г. Таганроге.
Адрес типографии: 347928, Ростовская обл., г.Таганрог, ул. Энгельса, 1.