



На правах рукописи

Бадиков Руслан Николаевич

**РАСЧЁТНО - ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО -
ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И РЕЗОНАНСНЫХ РЕЖИМОВ
ВРАЩЕНИЯ ВИНТОВЫХ ПРУЖИН В ПРУЖИННЫХ МЕХАНИЗМАХ**

Специальность:

01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

5 14.09 2009

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва — 2009

Работа выполнена в МГТУ им. Н.Э. Баумана на кафедрах «Прикладная механика» и «Основы конструирования и детали машин»

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Ф.Д. Сорокин

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор
Г.Я. Пановко
доктор технических наук, профессор
М.Н. Захаров

Ведущая организация: ОАО «НПК «Механобр – техника»» (Санкт-Петербург)

Защита состоится « 26 » ноября 2009 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 002.059.01 при Учреждении Российской академии наук Институте машиноведения им. А.А. Благонравова РАН по адресу: 101990, г. Москва, Малый Харитоньевский пер., д.4

E-mail: vmbzrv@bk.ru

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИМАШ РАН по адресу: г.Москва, ул. Бардина, 4, тел. (499) 135-5516

Автореферат разослан «23 октября» 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета.

 Бозров В.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Винтовые цилиндрические пружины в машиностроении обычно используются в качестве упругих элементов. Кроме того, прямые или изогнутые цилиндрические пружины используются как гибкие валы, шнеки и измельчающие элементы. Нетрадиционное использование пружин порождает множество новых задач, которые ранее исследователей винтовых пружин не интересовали. При разгоне и выбеге двигателя, вращающего пружину, возможно возникновение резонанса. Обычно это явление нежелательно, однако существуют измельчающие механизмы, в которых процесс измельчения материала с помощью вибрирующей цилиндрической пружины выполняется именно на резонансных режимах в связи с его высокой интенсивностью.

Другим специфическим явлением в пружинных механизмах (ПМ) является резкая смена конфигурации пружины с выходом из рабочей плоскости, которая вызывается возрастанием крутящего момента вследствие повышенного трения или заклинивания в ведомом подшипнике. Указанное явление в случае открытого кожуха приводит к высккиванию пружины из рабочей области и захватыванию ей окружающих предметов, что представляет опасность для окружающего персонала. При закрытом кожухе и высокой мощности двигателя пружину может заклинить в кожухе, что приводит к пластическим деформациям или разрушению пружины.

Указанные явления исследованы недостаточно. В ряде предшествующих работ по расчёту ПМ использовалась приближённая теория эквивалентного стержня, либо метод конечного элемента (МКЭ) с небольшим количеством витков в моделях пружины (размерность системы уравнений МКЭ возрастает с увеличением количества витков).

Диссертация является актуальной, так как применяемая в ней методика и программное обеспечение позволяют исследовать практически все механические явления в ПМ. При этом удаётся сравнительно легко обойти трудности, связанные с ограничением на максимальный угол поворота, встречающиеся в других методиках. Размерность разрешающей системы уравнений не зависит от количества витков, что выгодно отличает предлагаемую методику от МКЭ. Полученные результаты могут быть использованы при расчёте конструкций с вращающимися или вибрирующими пружинами.

Цель и задачи исследования состоят:

- в разработке комплекса компьютерных программ, предназначенных для решения задач статики, динамики и устойчивости предварительно деформированных винтовых пружин;

- в решении наиболее важных задач, возникающих при проектировании ПМ (расчет конфигурации деформированной пружины; определение частот и форм

собственных колебаний изогнутой пружины; исследование явления потери устойчивости при кручении изогнутой пружины; учёт контактирования витков пружины);

- в разработке стенда для экспериментальных исследований механических явлений в ПМ;

- в проведении экспериментальных исследований равновесных конфигураций, частот и форм колебаний предварительно деформированных винтовых пружин, явления потери устойчивости изогнутой пружины при кручении;

- в выводе удобных для практики приближенных соотношений, аппроксимирующих расчетные данные, полученные на основе 3-х мерной модели винтового стержня.

Научная новизна заключается в новых расчетных и экспериментальных данных, полученных для винтовых пружин, эксплуатируемых в нестандартных условиях, т.е. не в качестве упругого элемента, а в качестве инструмента измельчения и перемешивания сыпучей среды, либо для перемещения сыпучего материала или жидкости с включениями. Винтовые пружины в ПМ сильно деформированы. Ранее такие задачи решались, как правило, с использованием приема замены пружины эквивалентным стержнем либо МКЭ. В данной работе все результаты получены по точным 3-х мерным уравнениям механики стержней. При этом в ряде случаев учтено явление контактирования витков.

Новым является прием переноса граничных условий на ось захвата, что практически снимает проблему численной неустойчивости и значительно упрощает запись граничных условий.

Новизна заключается и в экспериментальном оборудовании, разработанном для наблюдения частот и форм колебаний деформированной пружины и других механических эффектов.

Новыми являются также приближенные формулы, аппроксимирующие точные решения 3-х мерных задач для предварительно деформированных винтовых пружин.

Научная и практическая значимость. Ценность диссертационной работы для практики заключается в том, что разработанное программное обеспечение позволяет предсказывать статические и динамические характеристики рабочих органов ПМ на этапе проектирования (геометрическая конфигурация изогнутой пружины, монтажный момент, частоты и формы собственных колебаний, критический крутящий момент). Использование разработанных расчетных методик значительно сокращает объем экспериментальных исследований и ускоряет сроки разработки новых конструкций ПМ. Получены и внедрены в производство удобные для практического использования

аналитические выражения, аппроксимирующие точные решения трехмерных уравнений для винтового гибкого стержня.

Результаты диссертации использованы при расчёте, создании и модификации ПМ, а также других родственных конструкций, содержащих винтовые пружины, что подтверждается актами внедрения.

Разработанный автором экспериментальный стенд рекомендуется использовать в высших технических учебных заведениях для демонстрации форм колебаний изогнутых пружин и явления потери устойчивости пружины при кручении с петлеобразованием или перехлёстом.

На защиту выносятся:

1. Экспериментально-теоретический метод исследования основных механических явлений в ПМ;

2. Исследование механических явлений в ПМ на основе точной 3х-мерной нелинейной модели винтового бруса, причём с относительным углом поворота захватов более 90° .

3. Новый приём замены цилиндрических захватов жесткими участками пружины, значительно упрощающий запись граничных условий для реальных случаев закрепления пружин;

4. Новые результаты для частот собственных колебаний и критического крутящего момента пружин с искривлённой или прямой осью, полученные на основе точных нелинейных 3-х мерных уравнений;

5. Методика построения приближённых инженерных формул, обобщающих точные решения задач динамики и устойчивости изогнутых пружин;

6. Решение контактной задачи для изогнутых пружин с использованием 3х-мерных уравнений винтового стержня и варианта итерационного метода Удзавы.

Достоверность полученных результатов. Достоверность научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных автором, вытекает из обоснованности использованных теоретических подходов, подтверждается решением многочисленных тестовых примеров, их сравнением с аналитическими и экспериментальными результатами, а также с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Материалы диссертационного исследования докладывались и обсуждались:

- на 7-й Всероссийская научно-техническая конференция «Состояние проблемы измерений» (МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000г.);

- на научных семинарах аспирантов кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э.Баумана (2002, 2003, 2004г.);

- на 15-й международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам-ВМСППС-2007 (г. Алушта, 2007 г.);

- на научном семинаре кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э.Баумана (2007, 2008г.);

- на научном семинаре ИМАШ им. А.А.Благодрава РАН (2009г.).

Публикации. Основное содержание диссертационного исследования опубликовано в 11 печатных работах (из них 10 научных статей в рецензируемых журналах).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 5-ти глав, заключения и выводов, списка литературы (90 наименований). Работа изложена на 149 страницах, содержит 70 рисунков и 5 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ (по главам)

Глава 1 посвящена введению в проблему моделирования статического и динамического поведения пружин в ПМ.

Приведены схемы ПМ: пружинных мельниц (рис.1), пружинных вибропросеивателей (рис. 2), пружинных шнеков (рис.3), пружинных транспортёров, пружинных насосов, пружинных гибких связей и т.п.

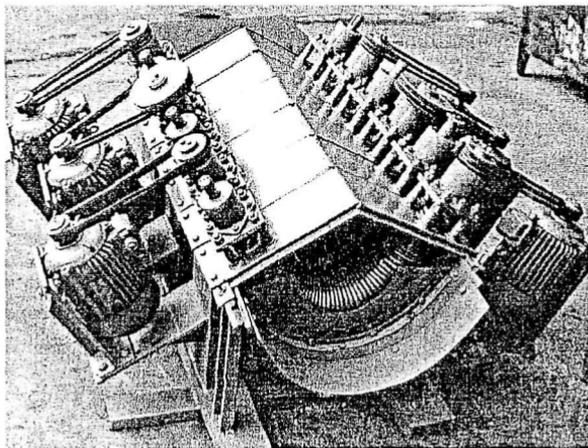


Рис. 1. Пружинная мельница непрерывного действия

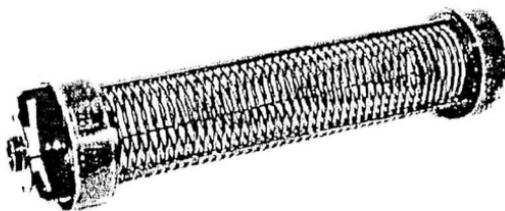


Рис. 2. Пружинный вибропросеиватель.

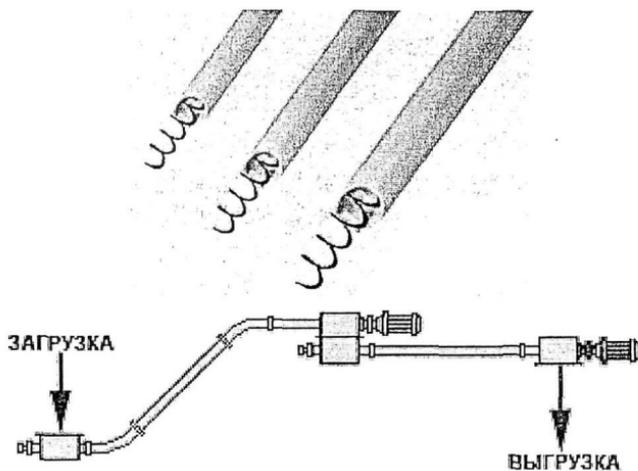


Рис.3. Пружинные гибкие шнеки.

Рассмотрены особенности конструкций ПМ и указаны основные механические явления, которые необходимо рассматривать при проектировании ПМ. Значительное внимание при этом уделяется разновидности ПМ - пружинным мельницам, которые были предложены в 1979 г. Сиваченко Л.А.

Очевидно, что начальной задачей, которая возникает при проектировании ПМ, является определение конфигурации деформированной пружины. Определение конфигурации важно при проектировании формы кожуха. В случае жёсткого кожуха, это важно для предотвращения контактирования пружины с кожухом. В случае гибкого кожуха (рис. 3) знание конфигурации изогнутой пружины необходимо в связи с тем, что гибкий кожух сам принимает форму деформированной пружины.

После определения конфигурации пружины в предварительно деформированном начальном состоянии важно рассмотреть рабочие режимы. Для пружинных вибропросеивателей характерны интенсивные вибрации. Для большинства других ПМ (пружинные мельницы, транспортеры, шнеки, насосы) основным рабочим режимом является вращение.

Известно, что разгон и выбег гибких валов могут сопровождаться интенсивными вибрациями при совпадении частоты вращения вала с одной из собственных частот колебаний вала. Аналогичные явления могут возникать (и возникают) в ряде ПМ, в частности, в пружинных мельницах. В большинстве случаев резонансные режимы вращения пружин в ПМ нежелательны, так как могут вызывать соударения пружины с кожухом и уменьшают ресурс работы ПМ. Однако в последнее время такие режимы вызывают пристальное внимание конструкторов пружинных мельниц из-за существенного повышения интенсификации процесса измельчения. Более того, некоторые пружинные мельницы конструируются специально для работы на резонансных режимах. Такие конструкции рассмотрены в монографии Л.А.Сиваченко и Д.М.Хононова (Вибрационные пружинные мельницы. (Препринт) - Могилев, 2004).

При эксплуатации ПМ пружина может резко сменить конфигурацию, что является следствием возрастания крутящего момента при повышенном трении или заклинивании в подшипнике. Резкая смена конфигурации (потеря устойчивости пружины при кручении) может сопровождаться петлеобразованием или перехлестом, что полностью выведет ПМ из строя. Очевидно, что это явление крайне нежелательно и поэтому при проектировании ПМ важно знать величину критического крутящего момента, чтобы не допускать его при эксплуатации.

Важным механическим явлением, которое характерно для ПМ с изогнутыми витками, является контактирование витков. Контактное взаимодействие витков существенно влияет на поведение пружины и весьма существенно усложняет расчёт.

Из сказанного выше следует, что для ПМ характерно множество механических явлений, которые могут возникать не только по отдельности, но и оказывать взаимное влияние одно на другое. Максимально подробное и точное исследование перечисленных явлений и является содержанием диссертации.

Для исследования указанных явлений должен привлекаться адекватный математический аппарат. В большинстве случаев пружины в ПМ исследовались на основе замены пружины стержнем с прямолинейной (в исходном состоянии) осью и приведёнными характеристиками – это, так называемая, схема эквивалентного бруса (СЭБ), предложенная R.Ziegler. В частности, СЭБ применялась в ряде работ

С.С.Гаврюшина, Д.Ганбата и др. В вопросах изучения колебаний винтовых цилиндрических пружин с применением СЭБ большая исследовательская расчетная и экспериментальная работа была проделана А.М.Багодеевой, Л.К.Воротынцевым, Д.Т.Габададзе, Р.И.Парцхаладзе под руководством и при непосредственном участии М.В.Хвингии в работе «Колебания и устойчивость упругих систем машин и приборов» (Мецниереба, 1974г.). Ещё раньше СЭБ можно встретить в работах А.Н.Крылова. Недостатком СЭБ является приближённый характер этой схемы. Точность СЭБ при больших перемещениях и поворотах практически не исследована.

Применение метода конечных элементов (МКЭ) даёт хорошие результаты (по точности) при расчёте ПМ, но приводит к весьма громоздким системам уравнений, причём количество степеней свободы тем больше, чем больше витков пружины. Каждый виток порождает не менее 120 степеней свободы, следовательно, пружина из сотен витков описывается математической моделью из десятков тысяч уравнений. Этот недостаток малозаметен при использовании промышленных конечноэлементных комплексов (ANSYS, NASTRAN и др.), однако эти комплексы дороги и довольно трудны в освоении для неспециалистов (конструкторов ПМ).

В связи со сказанным выше для моделирования пружины в диссертационной работе была выбрана схема пространственного винтового бруса, которая является практически точной с механической точки зрения, не приводит системам уравнений высокого порядка (как МКЭ) и позволяет разработать специализированное программное обеспечение доступное в использовании конструкторам ПМ.

В ранних работах по механике стержней и пружинам в основном применялись аналитические методы, в развитии которых для случая больших перемещений стержня в плоскости велика роль Е.П.Попова. В более поздних работах по пружинам можно также найти применение аналитических методов (работы М.Ю. Карповой, Д.Ф. Полищука, С.Д. Пономарева, Н.А. Чернышева, В.М. Макушина, Л.Е.Андреевой, В.Л.Бидермана, Малинина Н.Н. и др.), но всё более заметным становится стремление к численным методам. Проблемы динамики и прочности гибких стержней и пружин за рубежом рассматривались такими учеными, как Shimizu Hiroshi, Jnove Junkishi, A.B. Whitman, C.N. Desilva, Mizuno Masao, D.Danielson, D. Hodges, J. Besseling и др.

В разработке численных методов, применяемых к расчёту гибких стержней, большой вклад внёсен В.А.Светлицким и его школой. Отличительной особенностью уравнений, применяемых школой В.А.Светлицкого, является использование «самолётных» углов для описания больших поворотов (максимальный поворот ограничен углом 90°). Указанные уравнения (12-го порядка) и различные способы их решения

весьма подробно разработаны в многочисленных публикациях этой школы. В частности они систематически использовались при решении различных задач механики стержней в работах С.А.Лагозинского, Сазгарана, В.Н.Лукьяновой, С.А.Вороного, С.В.Яреско и др. Ряд задач геометрически нелинейного деформирования цилиндрических пружин со сравнительно небольшим количеством витков (до 25 штук) был решен А.М. Наумовым. В ПМ применяются пружины с намного большим количеством витков (до нескольких сотен), что может повлечь качественно новое механическое поведение пружины (петлеобразование, перехлест).

Вариант уравнений механики стержней В.А.Светлицкого далеко не единственный. Почти все аналогичные системы 12-го порядка, предлагаемые различными авторами, во многом похожи друг на друга, но отличаются способом описания больших поворотов. Практически современный вариант уравнений механики стержней с описанием больших поворотов углами Эйлера был предложен ещё в «Математической теории упругости» А.Лява. Там же приведён интеграл этих уравнений для винтового стержня (интеграл Кирхгофа) весьма удобный при контроле результатов. Отметим варианты уравнений механики стержней с векторным описанием больших поворотов: вектор Родрига (А.И.Лурье, М.Geradin, А.Cardano); вектор Эйлера (П.А.Жилин, А.Д.Сергеев, Т.П.Товстик, Ф.Д.Сорокин и др.). Недостатком всех этих вариантов является ограничение на величину максимального угла поворота (от 90° в случае самолётных углов до 360° в случае вектора Эйлера).

В связи с ограничением, накладываемых на максимальный угол поворота в системах 12-го порядка, ряд исследователей предлагают описывать большие повороты не углами, а направляющим косинусами единичных ортов сечения стержня (В.В.Гайдайчук, В.И.Гуляев, В.Л.Кошкин, В.И.Кравцов, Е.Э.Котенко и др.). Такой подход позволяет совершенно не заботиться о величине поворотов и путём последовательного изменения единичных ортов добиваться весьма больших поворотов (тысячи градусов). Следствием отказа от углов поворота (3 переменные) и явного введения в уравнения направляющих косинусов (9 переменных) является увеличение порядка системы до 18-го (иногда понижается до 15-го). При этом количество граничных условий неодинаково на краях стержня (12 условий в начальной точке и 6 – в конечной). В ряде случаев это приводит к усложнениям в записи граничных условий, но вполне преодолимым (см. ниже).

В связи с отсутствием ограничений на максимальный поворот в данной диссертационной работе выбран именно 18-й порядок уравнений, но сами уравнения значительно упрощены (по сравнению с вариантами В.В.Гайдайчука, В.И.Кравцова и Е.Э.Котенко).

Глава 2 посвящена подробному выводу уравнений, применяемых для расчёта ПМ и описанию граничных условий для них. Кроме того, приводятся тождественные соотношения, используемые для контроля результатов.

Полная система уравнений механики гибкого стержня 18-го порядка (статика) имеет следующий вид

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{P}}{ds} &= -\bar{q} \\ \frac{d\bar{M}}{ds} &= -(\bar{e}_1 \times \bar{P} + \bar{m}) \end{aligned} \quad (1)$$

Кинематические соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}}{ds} &= \bar{e}_1 \\ \frac{d\bar{e}_1}{ds} &= \bar{\chi} \times \bar{e}_1 \\ \frac{d\bar{e}_2}{ds} &= \bar{\chi} \times \bar{e}_2 \\ \frac{d\bar{e}_3}{ds} &= \bar{\chi} \times \bar{e}_3 \end{aligned}$$

Соотношения упругости

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{\bar{M} \cdot \bar{e}_1}{GJ_1} + \chi_{10} \\ \chi_2 &= \frac{\bar{M} \cdot \bar{e}_2}{EJ_2} + \chi_{20} \\ \chi_3 &= \frac{\bar{M} \cdot \bar{e}_3}{EJ_3} + \chi_{30} \end{aligned}$$

Соотношения перехода к неподвижному базису

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\chi} = k_1 \bar{i}_1 + k_2 \bar{i}_2 + k_3 \bar{i}_3$$

где s – дуга оси стержня; \bar{P} , \bar{M} – главный вектор и главный момент внутренних сил; \bar{q} , \bar{m} – векторы силовой и моментной распределённых нагрузок; \bar{r} – радиус-вектор оси

стержня; $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ - орты неподвижной системы координат; $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - орты оси и главных осей сечения стержня; $\bar{\chi}$ - вектор кривизны в деформированном состоянии; χ_1, χ_2, χ_3 - кручение и кривизны деформированного стержня (проекции $\bar{\chi}$ на $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$); k_1, k_2, k_3 - проекции $\bar{\chi}$ на $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$; GJ_1, EJ_2, EJ_3 - жесткости сечения на кручение и изгиб; $e_{\alpha\beta} = \bar{e}_\alpha \cdot \bar{i}_\beta$ - направляющие косинусы ($\alpha=1,2,3$; $\beta=1,2,3$); индекс «0» помечает исходное (недеформированное состояние).

Ось стержня принимается нерастяжимой. Следует отметить, что все уравнения приведенной выше системы хорошо известны и неоднократно приводились во многих работах по механике стержней. Обычно указанную систему значительно преобразовывают (например, к 12-му порядку) и только потом используют для решения задач. В данной диссертации система (1) используется практически без переработки. Для проведения численных расчётов система преобразуется к скалярному виду (в проекциях на оси неподвижной декартовой системы координат):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_1}{ds} = -q_1 \\ \frac{dP_2}{ds} = -q_2 \\ \frac{dP_3}{ds} = -q_3 \\ \frac{dM_1}{ds} = -(e_{12}P_3 - e_{13}P_2 + m_1) \\ \frac{dM_2}{ds} = -(e_{13}P_1 - e_{11}P_3 + m_2) \\ \frac{dM_3}{ds} = -(e_{11}P_2 - e_{12}P_1 + m_3) \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr_1}{ds} = e_{11} \\ \frac{dr_2}{ds} = e_{12} \\ \frac{dr_3}{ds} = e_{13} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{de_{11}}{ds} &= k_2 e_{13} - k_3 e_{12} \\ \frac{de_{12}}{ds} &= k_3 e_{11} - k_1 e_{13} \\ \frac{de_{13}}{ds} &= k_1 e_{12} - k_2 e_{11} \\ \frac{de_{21}}{ds} &= k_2 e_{23} - k_3 e_{22} \\ \frac{de_{22}}{ds} &= k_3 e_{21} - k_1 e_{23} \\ \frac{de_{23}}{ds} &= k_1 e_{22} - k_2 e_{21} \\ \frac{de_{31}}{ds} &= k_2 e_{33} - k_3 e_{32} \\ \frac{de_{32}}{ds} &= k_3 e_{31} - k_1 e_{33} \\ \frac{de_{33}}{ds} &= k_1 e_{32} - k_2 e_{31} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \chi_1 &= \frac{e_{11}M_1 + e_{12}M_2 + e_{13}M_3}{GJ_1} + \chi_{10} \\ \chi_2 &= \frac{e_{21}M_1 + e_{22}M_2 + e_{23}M_3}{EJ_2} + \chi_{20} \\ \chi_3 &= \frac{e_{31}M_1 + e_{32}M_2 + e_{33}M_3}{EJ_3} + \chi_{30} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} k_1 &= \chi_1 e_{11} + \chi_2 e_{21} + \chi_3 e_{31} \\ k_2 &= \chi_1 e_{12} + \chi_2 e_{22} + \chi_3 e_{32} \\ k_3 &= \chi_1 e_{13} + \chi_2 e_{23} + \chi_3 e_{33} \end{aligned} \right.$$

или в сокращённой форме записи

$$\frac{dy}{ds} = \mathbf{g}(s, \mathbf{y}) \quad (2a)$$

$$\mathbf{y}(s) = (P_1, P_2, P_3, M_1, M_2, M_3, r_1, r_2, r_3, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{31}, e_{32}, e_{33})^T$$

Для изучения малых колебаний в окрестности деформированного состояния пружины система (1) линеаризуется и на место вектора распределённой нагрузки

$$\bar{q} \text{ подставляется распределённая сила инерции } \bar{q} = -\rho A \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial t^2} \text{ (принцип Даламбера),}$$

где ρ - плотность материала, A - площадь поперечного сечения проволоки. Инерция поворотов при линейризации не учитывается (в связи с её незначительным влиянием на низшие частоты). Линейризованная система имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta \bar{P}}{\partial s} = \rho A \frac{\partial^2 \Delta \bar{F}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \Delta \bar{M}}{\partial s} = -(\bar{e}_1 \times \Delta \bar{P} + \Delta \bar{e}_1 \times \bar{P}) \\ \frac{\partial \Delta \bar{F}}{\partial s} = \Delta \bar{e}_1 \\ \frac{\partial \Delta \bar{e}_1}{\partial s} = \bar{\chi} \times \Delta \bar{e}_1 + \Delta \bar{\chi} \times \bar{e}_1 \\ \frac{\partial \Delta \bar{e}_2}{\partial s} = \bar{\chi} \times \Delta \bar{e}_2 + \Delta \bar{\chi} \times \bar{e}_2 \\ \frac{\partial \Delta \bar{e}_3}{\partial s} = \bar{\chi} \times \Delta \bar{e}_3 + \Delta \bar{\chi} \times \bar{e}_3 \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \chi_1 = \frac{\Delta \bar{M} \cdot \bar{e}_1 + \bar{M} \cdot \Delta \bar{e}_1}{GJ_1} \\ \Delta \chi_2 = \frac{\Delta \bar{M} \cdot \bar{e}_2 + \bar{M} \cdot \Delta \bar{e}_2}{EJ_2} \\ \Delta \chi_3 = \frac{\Delta \bar{M} \cdot \bar{e}_3 + \bar{M} \cdot \Delta \bar{e}_3}{EJ_3} \end{array} \right.$$

$$\Delta k_j = \sum_{i=1}^3 (\Delta \chi_i e_{ij} + \chi_i \Delta e_{ij})$$

$$\Delta \bar{\chi} = \Delta k_1 \bar{i}_1 + \Delta k_2 \bar{i}_2 + \Delta k_3 \bar{i}_3$$

где Δ помечает величины, являющиеся малыми отклонениями от их значений в деформированном состоянии.

Система (3) в диссертации применяется как для расчета собственных частот и форм прямых и изогнутых пружин, так и для расчётов деформированных пружин на устойчивость.

При расчёте частот и форм собственных колебаний первое уравнение в (3) заменяется на (4), а в оставшихся уравнениях $\frac{\partial}{\partial s}$ заменяется на $\frac{d}{ds}$

$$\frac{d\Delta\bar{P}}{ds} = -\rho A \omega^2 \Delta\bar{r} \quad (4)$$

где ω - круговая частота собственных колебаний.

Как известно, потеря статической устойчивости соответствует обращению собственной частоты в нуль ($\omega=0$). Т.е., для преобразования (3) в систему, пригодную для расчёта деформированного стержня на устойчивость, достаточно в первом уравнении (3) отбросить правую часть:

$$\frac{d\Delta\bar{P}}{ds} = 0 \quad (5)$$

В результате получается однородная система, нетривиальные решения которой (при соответствующем начальном деформированном состоянии) являются формами потери устойчивости.

Выше отмечалось, что при использовании системы 18 порядка осложняется запись граничных условий. Дополнительные осложнения возникают из-за того, что в ПМ край витка закрепляется не на оси захвата, а на некотором расстоянии от неё (рис. 4а). Для преодоления этой трудности в диссертации предлагается дополнить винтовой участок переходным участком повышенной жёсткости (рис. 4б). Модуль упругости на жестком переходном участке принимается на 3-5 порядков больше, чем на податливом винтовом участке.

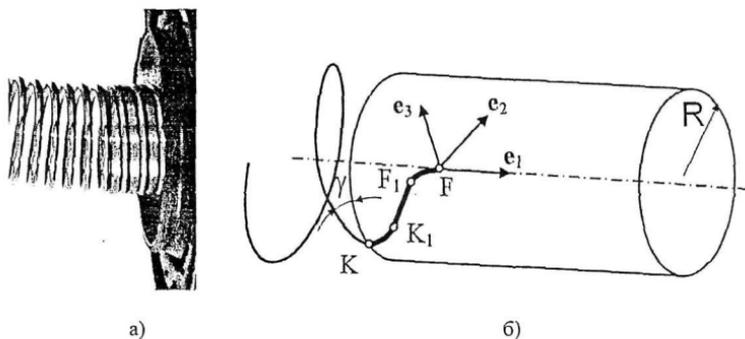


Рис.4. Закрепление пружины на захвате (а) и его моделирование жёстким переходным участком стержня (б)

Геометрия переходного участка подбирается таким образом, чтобы достигалось плавное сопряжение как с винтовым участком (в точке К), так и с осью захвата (в точке F).

Фактически пружина и переходные участки в начале и в конце (рис. 5) образуют единую деталь (рабочий орган ПМ).

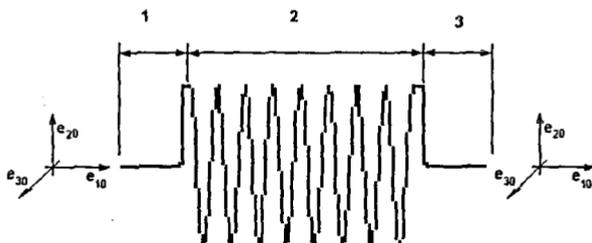


Рис. 5. Модель рабочего органа ПМ в недеформированном состоянии

Геометрия различных участков рабочего органа ПМ (функции $\chi_{10}(s)$, $\chi_{20}(s)$, $\chi_{30}(s)$) приведена в следующей таблице.

Участок	Обозначение	Компоненты вектора кривизны			Длина
		χ_{10}	χ_{20}	χ_{30}	
2 (податливый)	-	$-\frac{\cos \gamma \sin \gamma}{R}$	0	$\frac{\cos^2 \gamma}{R}$	$i \frac{2\pi R}{\cos \gamma}$
3 (жесткий) $E_3 = (10^3 \dots 10^5) \cdot E_2$	КК ₁	0	0	$\frac{1}{r_c}$	$\frac{\pi}{2} r_c$
	К ₁ F ₁	$\frac{\gamma}{R - 2r_c}$	0	0	$R - 2r_c$
	F ₁ F	0	0	$-\frac{1}{r_c}$	$\frac{\pi}{2} r_c$
1 (жесткий)	аналогично участку 3				

где r_c – радиус закругления (КК₁, F₁F), i – количество витков.

Исходная конфигурация (вектор $\vec{F}_0(s)$) сразу для всех 3-х участков рабочего органа ПМ получается интегрированием (2) с указанными в таблице функциями $\chi_{10}(s)$, $\chi_{20}(s)$, $\chi_{30}(s)$ и отсутствием внешних нагрузок. Т.е., запись аналитических выражений для проекций вектора $\vec{F}_0(s)$ не требуется.

Граничные условия ставятся не на краях витков (точка К), а на краях переходных участков (точка F), т.е. винтовой участок при постановке граничных условий исключается. При этом граничные условия выглядят точно так же как для прямого гибкого стержня при больших перемещениях. Например, если оба захвата заделаны, то 12 условий в начале интервала интегрирования ($s=0$) имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{r}(0) &= \bar{r}_0(0) \\ \bar{e}_1(0) &= \bar{e}_{10}(0) \\ \bar{e}_2(0) &= \bar{e}_{20}(0) \\ \bar{e}_3(0) &= \bar{e}_{30}(0)\end{aligned}\tag{6}$$

а в конце интервала ($s=l$) ставятся 6 следующих условий

$$\begin{aligned}\bar{r}(l) &= \bar{r}_0(l) \\ \bar{e}_2(l) \cdot \bar{e}_{10}(l) &= 0 \\ \bar{e}_3(l) \cdot \bar{e}_{10}(l) &= 0 \\ \bar{e}_3(l) \cdot \bar{e}_{20}(l) &= 0\end{aligned}\tag{7}$$

Более сложные варианты граничных условий рассмотрены ниже (см. гл. 3).

Для контроля результатов расчёта применялся модифицированный интеграл Кирхгофа

$$\begin{aligned}\frac{(\bar{M} \cdot \bar{e}_1)^2}{2GJ_1} + \frac{(\bar{M} \cdot \bar{e}_2)^2}{2EJ_2} + \frac{(\bar{M} \cdot \bar{e}_3)^2}{2EJ_3} + \chi_{01}(\bar{M} \cdot \bar{e}_1) + \chi_{02}(\bar{M} \cdot \bar{e}_2) + \chi_{03}(\bar{M} \cdot \bar{e}_3) + \\ + \bar{P} \cdot \bar{e}_1 + \int_0^s \bar{q} \cdot \bar{e}_1 ds = const;\end{aligned}\tag{8}$$

(модификация заключается в учёте распределённой нагрузки).

Кроме того, точность численного интегрирования оценивается по выполнению 6-ти тождественных соотношений связи между направляющими косинусами

$$\begin{cases} e_{11}e_{21} + e_{12}e_{22} + e_{13}e_{23} = 0 \\ e_{11}e_{31} + e_{12}e_{32} + e_{13}e_{33} = 0 \\ e_{31}e_{21} + e_{32}e_{22} + e_{33}e_{23} = 0 \\ e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2 = 1 \\ e_{21}^2 + e_{22}^2 + e_{23}^2 = 1 \\ e_{31}^2 + e_{32}^2 + e_{33}^2 = 1 \end{cases}\tag{9}$$

Глава 3 посвящена разработке и тестированию алгоритмов численного решения краевых задач механики стержней в приложении к расчётам ПМ.

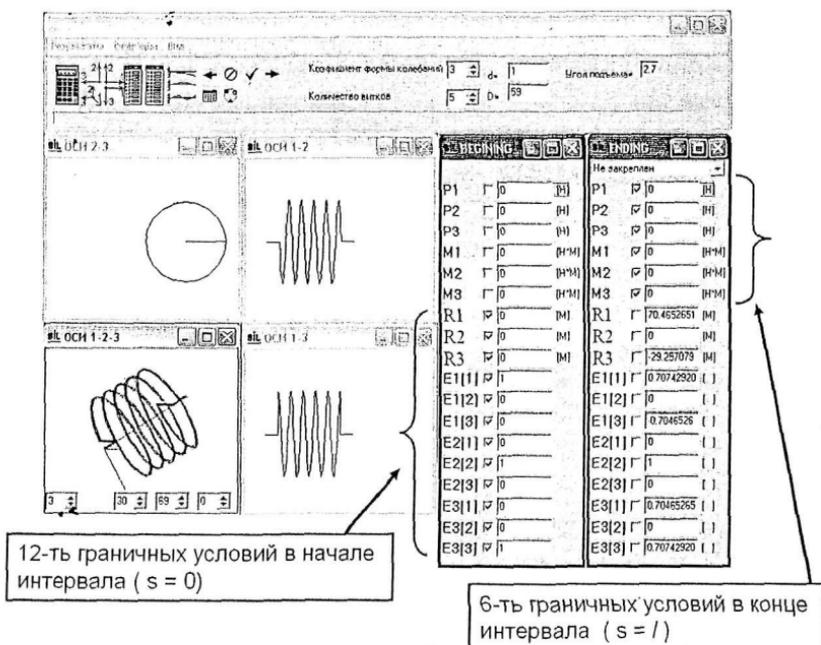


Рис. 5а. Внешний вид интерфейса пользователя компьютерного комплекса SPRING.

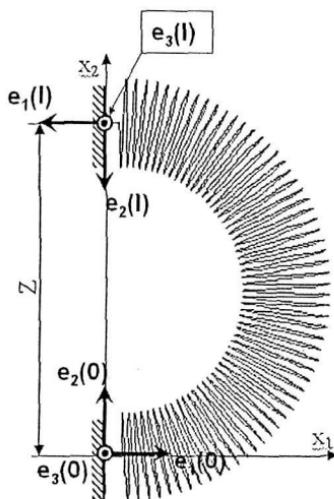


Рис. 6. К расчету конфигурации деформированной пружины в ПМ

Хорошо известные численные методы собраны в специализированном компьютерном комплексе SPRING (рис. 5а), предназначенном для расчёта пружин при больших

перемещениях, а также для расчёта частот и форм колебаний деформированных пружин и анализа статической устойчивости.

Для определения конфигурации деформированной пружины (рис. 6) в ПМ применяется традиционный метод решения нелинейной краевой задачи. Начальные и граничные условия для (2) и конфигурации, представленной на рис.6, имеют вид

$$\begin{aligned}
 y(0) &= (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)^T \\
 \left\{ \begin{aligned}
 r_1(l) &= f_1(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = 0 \\
 r_2(l) - Z &= f_2(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = 0 \\
 r_3(l) &= f_3(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = 0 \\
 e_{12}(l) &= f_4(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = 0 \\
 e_{23}(l) &= f_4(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = 0 \\
 e_{31}(l) &= f_6(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = 0
 \end{aligned} \right. \quad (10)
 \end{aligned}$$

где C_i – неизвестные компоненты вектора состояния (проекции вектора сил \bar{P} и вектора моментов \bar{M} в начале интервала интегрирования ($s=0$)). Решение (10) проводилось методом Ньютона, т.е. многократным решением уравнений (11)

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^6 \frac{\partial f_i}{\partial C_j} \Delta C_j + f_i &= 0 \\
 \frac{\partial f_i}{\partial C_j} &\approx \frac{f_i|_{C_j=C_{j0}+\Delta C_j} - f_i|_{C_j=C_{j0}-\Delta C_j}}{2\Delta C_j} \quad (11)
 \end{aligned}$$

Конфигурация, представленная на рис.6, довольно далека от исходной недеформированной конфигурации, поэтому для обеспечения сходимости итерационного процесса достижение этой конфигурации производилось в несколько этапов:

- 1) для восстановления исходной конфигурации система (2) интегрировалась с кинематическими начальными условиями (6) и нулевыми силовыми начальными условиями;
- 2) пружина нагружалась моментом на удалённом краю ($M_3(l)=M_3^*$), при этом величина момента подбиралась несколькими пробами из условия визуальной близости удалённого захвата к оси x_2 ;
- 3) решалась система (10), при этом начальные условия на первой итерации принимались такими же, как на этапе 2), что и обеспечивало сходимость.

При другом угле взаимного разворота захватов (на рис. 6 этот угол равен 180°) решение строилось аналогичными 3-мя этапами с визуальным контролем результатов каждого этапа.

Для контроля правильности работы алгоритма результаты автора сравнивались с известными результатами, в частности для пружины, нагруженной постоянной распределённой нагрузкой вдоль оси x_2 (рис. 7).

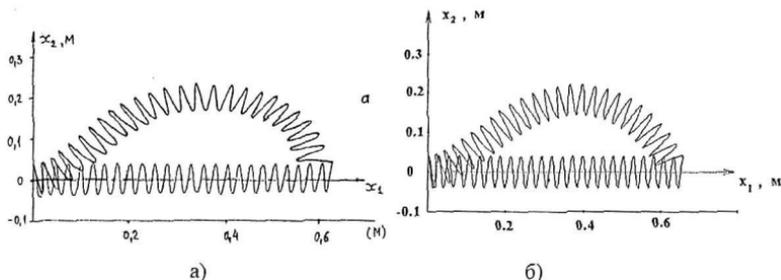


Рис. 7. Контроль алгоритма по результатам других авторов ((а) - А.М.Наумов, (б) - Р.Н.Бадиков).

Расчет частот и форм собственных колебаний ПМ выполнялся традиционным образом, т.е. решалась линейная краевая задача для однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений ((3) с учётом (4)). Коэффициенты этой системы, должны определяться в деформированном состоянии (рис. 6). Указанные коэффициенты обычно вычисляют заранее и далее хранят в памяти компьютера, что приводит к усложнению программирования (дополнительная память, интерполяция и т.п.). В диссертации применялся другой приём. Одновременно интегрировались 36 дифференциальных уравнений (12), где основные 18 уравнений (вверху) – это линейная однородная система (3) (с учётом (4)), а дополнительные 18 уравнений (внизу) – нелинейная система (2).

$$\begin{cases} \frac{d\Delta y}{ds} = A(s, y) \Delta y - \omega^2 B(s) \Delta y \\ \frac{dy}{ds} = g(s, y(s)) \end{cases} \quad (12)$$

Начальные условия для нелинейной системы определялись заранее, т.е. при интегрировании (12) указанные условия являются известными. Для линейной части (12) граничные условия ставились аналогично (10) (с учётом линеаризации), что приводит частотному уравнению (13)

$$K_{ij} = \Delta f_i \Big|_{\Delta C_j=1, \Delta C_{n \neq j}=0}$$

$$\sum_{j=1}^6 K_{ij} \Delta C_j = 0, (i=1 \dots 6) \quad (13)$$

$$|\mathbf{K}(\omega)| = 0$$

где $\Delta f_i (\Delta C_1, \dots, \Delta C_6)$ - правые части линеаризованных граничных условий, ΔC_j - неизвестные начальные параметры. Частотное уравнение $|\mathbf{K}(\omega)| = 0$ решалось методом половинного деления. Разработанный алгоритм позволяет определять требуемое количество собственных частот и форм собственных колебаний пружины в ПМ (рис. 8)

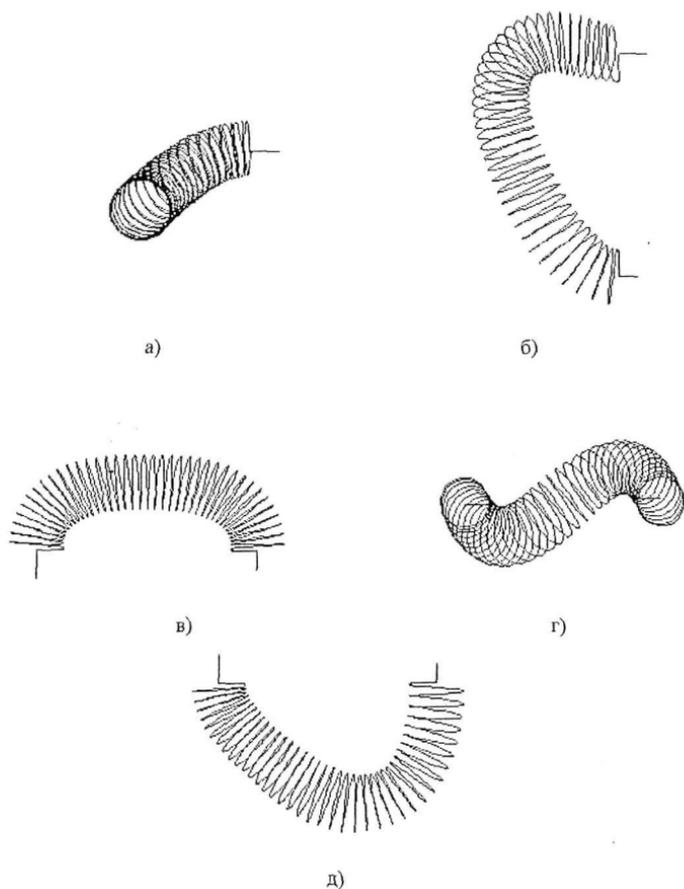


Рис. 8. Формы колебаний предварительно деформированной пружины (5 первых форм)

Алгоритм определения частот и форм предварительно был протестирован на известных результатах М.В.Хвингии для прямых пружин.

Потеря устойчивости (рис. 9) изогнутой пружины при кручении с последующим петлеобразованием или перехлёстом исследовалась путём последовательного увеличения угла разворота одного из захватов вокруг продольной оси (другой при этом оставался неподвижным)

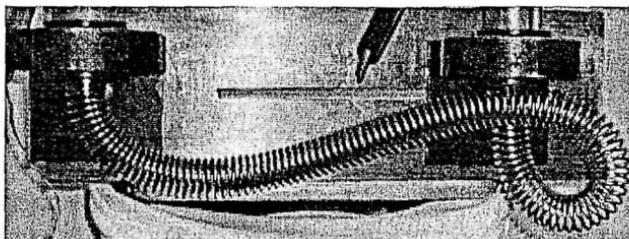


Рис.9. Потеря устойчивости при кручении с последующим петлеобразованием
Расчёт выполнялся по (2) с начальным условием (14) и граничными условиями (10)

$$y(0) = (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \cos\psi, \sin\psi, 0, -\sin\psi, \cos\psi)^T \quad (14)$$

где ψ - угол поворота захвата. Расчётная упругая характеристика (зависимость крутящего момента от угла закручивания) имеет экстремум (рис.10), наличие которого и является признаком потери устойчивости. Этому же экстремуму, как показывают расчёты, соответствует обращение собственной частоты в нуль ($\omega=0$).

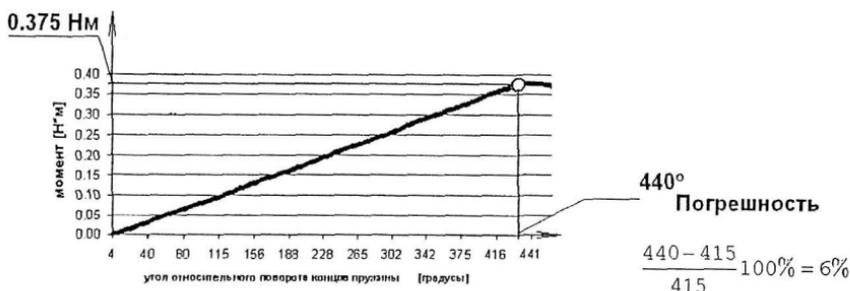


Рис. 10.

Аналогичным образом была изучена потеря устойчивости при кручении прямых пружин (рис. 11), которая может произойти в пружинных насосах или пружинные транспортёрах.

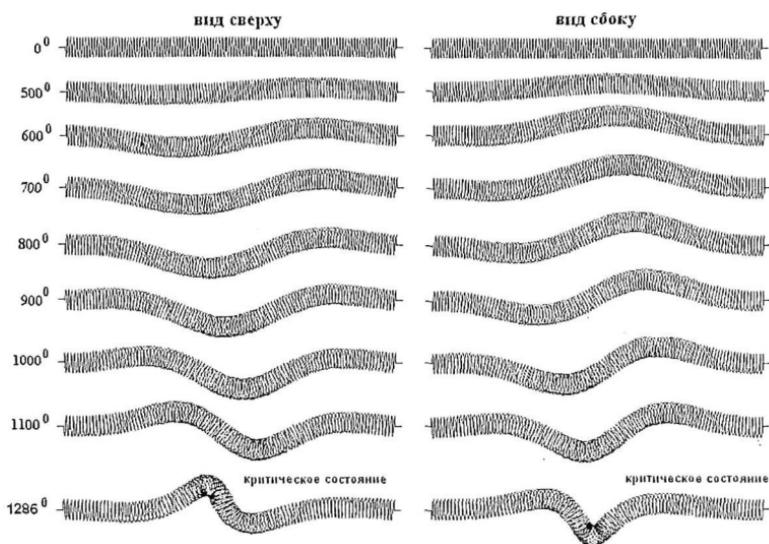


Рис. 11.

В Глава 4 механические явления в ПМ исследовались экспериментально. Разработан, сконструирован и отлажен экспериментальный стенд (рис. 12а) для наблюдения конфигурации деформированной пружины, частот и форм колебаний, а также критических явлений при кручении пружины.

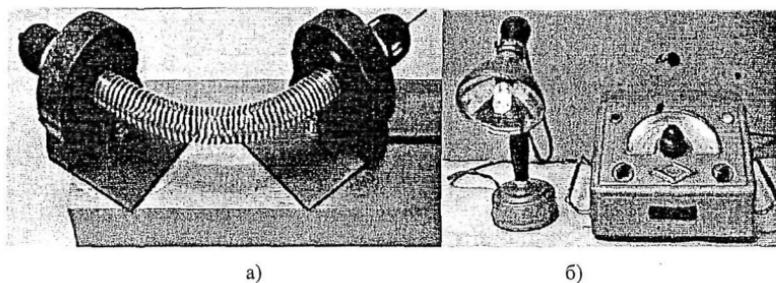
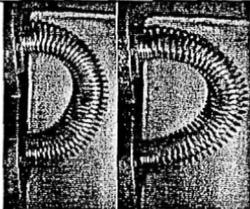
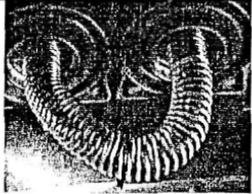


Рис. 12. Экспериментальный стенд (а), строботактометр (б).

Стенд состоит из основания, пружины, 2-х подшипников и 2-х захватов. Подшипники могут быть закреплены на различном расстоянии один от другого и могут быть развернуты на произвольные углы. При вращении пружины с угловой скоростью равной одной из собственных круговых частот возникали интенсивные вибрации. Форма колебаний пружины при этом фиксировалась фотоаппаратом, а частота определялась с

использованием строботахометра (рис. 12б). Стенд отлаживался на пружинах с прямой осью, частоты и формы которых известны из литературы (М.В.Хвингия).

Расчет	Эксперимент	Расч., Гц (об/мин)	Эксп., об/мин	%
		28.48 (1709)	1730±17	<2.3
		38.2 (2292)	2300±23	<1.3
		49.65 (2979)	3000±30	<1.6

Как видно из таблицы экспериментальные и расчётные значения собственных частот различаются на единицы процентов. Высокая точность обеспечена ещё и тем, что начальное напряжённое состояние рассчитывалось с учётом весовой нагрузки.

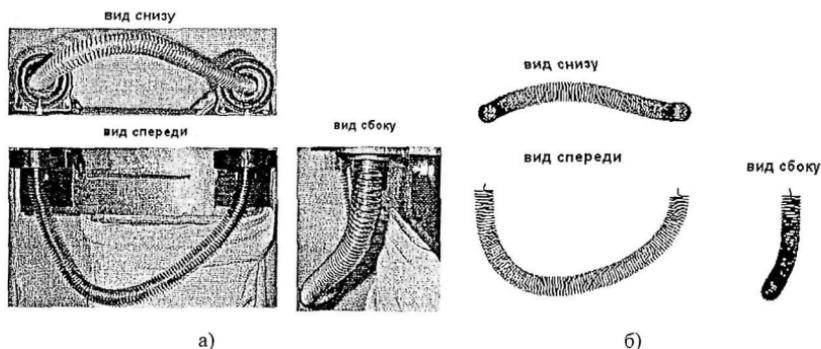


Рис. 13. Потеря устойчивости пружины при кручении (а - эксперимент, б - расчёт)

На экспериментальном стенде наблюдалась также потеря устойчивости пружины при кручении (рис. 13). И в этом случае удалось достичь хорошего совпадения эксперимента с расчётом как по конфигурации деформированной пружины (рис.13), так и по критическому углу (рис. 10).

Кроме того, экспериментально исследовалось явление контактирования витков, которое имеет место в некоторых ПМ. В частности рассматривалось закритическое деформирование сжимаемой пружины с контактирующими витками (рис. 14).

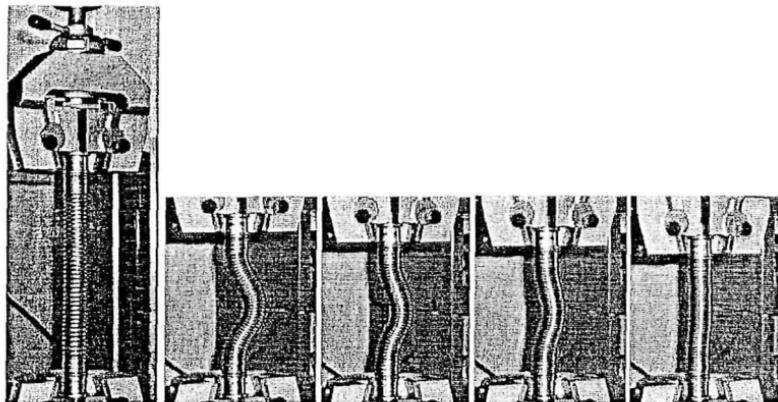


Рис.14. Выпрямление потерявшей устойчивость пружины при увеличении поджатия вследствие контактирования витков.

Глава 5 (практической направленности) посвящена обобщению результатов расчётов и экспериментов, а также учёту контактирования витков при расчёте ПМ.

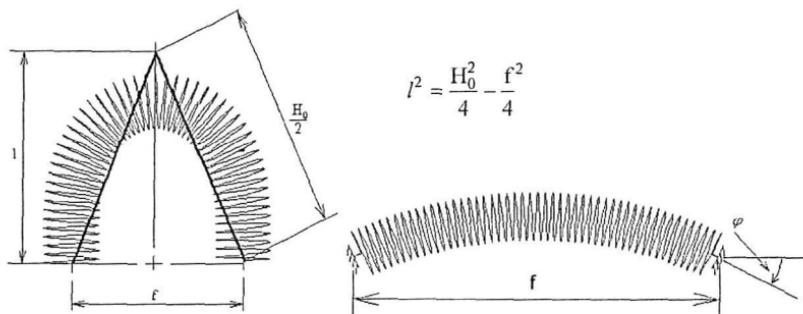


Рис. 15. К приближённому расчёту низшей частоты.

Так как при конструировании ПМ важно быстро производить оценки основных параметров получаемой конструкции, то были выведены приближённые соотношения для наиболее важных из них.

Для низшей собственной частоты с использованием приёма замены изогнутой пружины эквивалентной балкой (рис. 15) было получено приближённое соотношение (15)

$$\omega_1 = 3.52 \sqrt{\frac{E d_0^2 t g \alpha_0 \sin \alpha_0}{8(2 + \mu) \rho}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{H_0^2}{4} \left(\frac{2\varphi}{\pi} \cdot 0.2 + 0.8 \right) - \frac{f^2}{4} \cdot \frac{1}{2} \right)} \quad (15)$$

Коэффициенты в (15) уточнялись таким образом, чтобы добиться максимально возможного совпадения с точными численными решениями той же задачи. То есть (15) можно рассматривать как обобщение большого количества численных экспериментов, выполненных с помощью комплекса SPRING. Эти же эксперименты показывают, что погрешность (15) не превышает 10% при $\varphi > 12.5^\circ$.

Другая приближённая формула была получена для величины критического крутящего момента изогнутой пружины (рис. 9,10,11,13):

$$M_{\text{крит}} = 1.31 \frac{d^4 E}{D t} \frac{\pi}{16(2 + \mu)} \quad (16)$$

За основу была взята известная формула Граммеля, но коэффициент в ней был уточнён таким образом, чтобы добиться наилучшего совпадения с большим массивом численных экспериментов, выполненных с помощью комплекса SPRING.

Параметры пружины						Критический момент		Разница, %
i, шт.	d, мм	D, мм	D/d	угол подъёма, град.	Дуговой угол оси пружины, град.	Решение краевой задачи, Нм	Прибл. расчет по (16), Нм	
50	6	118	20	2.78	180	4.9740	4.9088	1
50	6	118	20	2.78	0	5.3300	4.9088	8
50	6	59	10	5.56	180	10.1490	9.7920	4
50	6	59	10	5.56	0	10.6861	9.7920	8
50	6	59	10	2.78	180	9.6600	9.8177	2
50	6	59	10	2.78	0	10.6538	9.8177	8
110	2.6	26.5	10	2.78	180	0.3750	0.3503	7
110	2.6	26.5	10	2.78	0	0.3845	0.3503	9
100	6	59	10	2.78	180	5.1650	4.9088	5
100	6	59	10	2.78	0	5.3833	4.9088	9
50	1	59	59	2.78	180	0.0072	0.0076	6
50	1	59	59	2.78	0	0.0082	0.0076	8
50	3	59	20	2.78	180	0.5800	0.6136	6
20	2.6	26.5	10	3.35	0	2.034	1.9261	5
20	2.6	26.5	10	3.35	90	2.068	1.9261	7
10	2.6	26.5	10	3.35	0	3.728	3.8521	3
10	2.6	26.5	10	3.35	90	2.766	3.8521	39
1000	2.6	26.5	10	3.35	0	0.04681	0.0385	18
1000	2.6	26.5	10	3.35	180	0.04397	0.0385	12

Как показывает таблица, точность (16) вполне приемлема для пружин с числом витков большим 20-ти.

Расчет некоторых ПМ осложняется необходимостью учета контактирования витков.

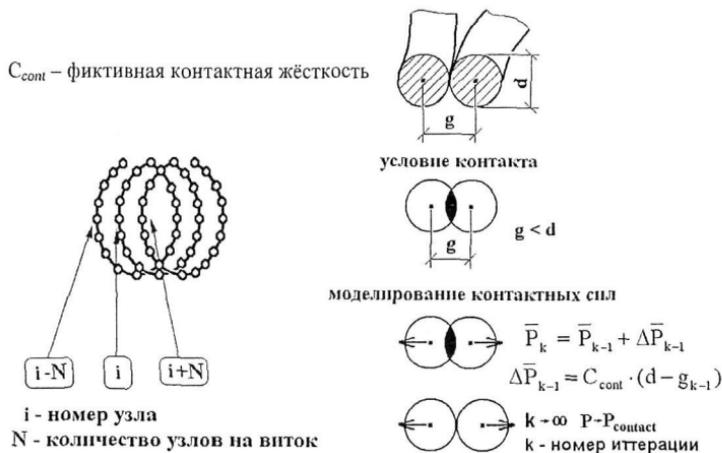


Рис. 17. Алгоритм решения контактной задачи для пружины.

В этом случае вводятся контактные узлы (от 4 до 20 на виток) и используется ещё один итерационный процесс для решения контактной задачи. Схема итерационного процесса (вариант алгоритма Удзавы) показана на рис. 17. Алгоритм тестировался на проведённых ранее экспериментах, в частности на задаче об осадке пружины (рис. 14) и др.

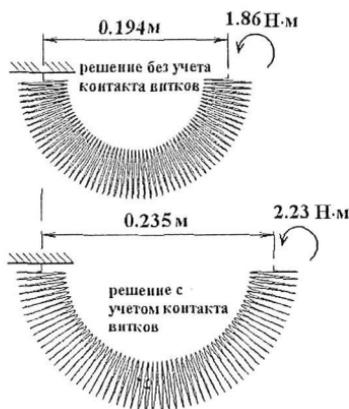
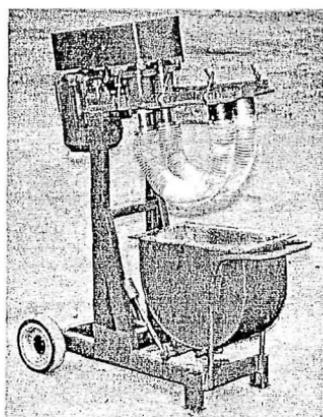


Рис.18. Пружинная мельница «Млын 55.0000.007».

Далее разработанное программное обеспечение применялось для расчёта основных рабочих характеристик ряда ПМ. В частности для пружинной мельницы (рис. 18) были найдены: монтажный момент, межосевое расстояние валов, критический крутящий момент, собственные частоты. Полученные результаты были использованы при модификации конструкции мельницы.

Для учёта влияния эффективного демпфирования и присоединённой массы в диссертации предложено аналитическое выражение

$$\omega_k = \omega_{k0} \sqrt{\frac{1}{1 + \alpha} - \left(\frac{\beta}{2(1 + \alpha)}\right)^2} \quad (17)$$

где ω_{k0} – круговая частота собственных колебаний для k-й формы исходной задачи (без учёта демпфирования и присоединённой массы), $\alpha = \Delta m / m_0$ – коэффициент присоединённой массы, $\beta = \frac{b}{m_0 \omega_{k0}}$ – безразмерный коэффициент эффективного демпфирования.

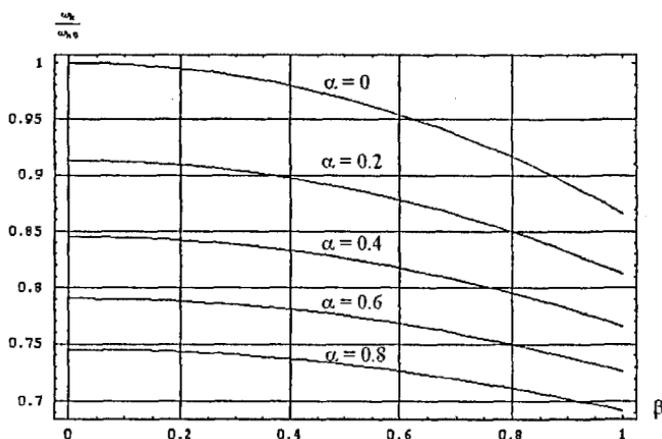


Рис. 19. Зависимость частоты собственных колебаний пружины от присоединённой массы и эффективного демпфирования.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Трёхмерная модель пружины в виде гибкого винтового стержня позволила успешно писать основные механические эффекты в ПМ.
2. Использование системы дифференциальных уравнений 18-го порядка с направляющими косинусами вместо углов поворота позволило избежать особенностей, характерных для всех вариантов систем 12-го порядка.
3. Для решения краевых задач, возникающих при проектировании и эксплуатации ПМ, разработан алгоритм и прикладной программный комплекс SPRING с графическим интерфейсом. Многоуровневое тестирование и сопоставление с экспериментом показало высокую надёжность и точность разработанного программного обеспечения.
4. С помощью разработанных алгоритмов и программ решены наиболее важные задачи, возникающие при проектировании и эксплуатации ПМ:
 - определение конфигурации деформированных пружин;
 - потеря устойчивости изогнутых пружин при кручении;
 - расчёт частот и форм собственных колебаний изогнутых пружин.
5. Для расчёта пружин с контактирующими витками предложен вариант алгоритма дзавы с дискретным расположением контактирующих узлов.
6. Многочисленные эксперименты, выполненные на самостоятельно разработанном стенде, подтвердили приемлемую точность реализованных алгоритмов.
7. На основании обобщения больших массивов численных экспериментов построены упрощённые «инженерные» формулы для определения низшей собственной частота и критического крутящего момента изогнутых пружин, хорошо подтверждаемые точными измерениями.
8. Разработанные методики и программное обеспечение использованы при модификации доводке ряда ПМ с винтовыми пружинами.
9. Полученные в процессе исследований результаты и расчётные методики внедрены на предприятиях: «Промышленные технологии и комплексы» г. Могилев, ООО «Альфа-ранзит» г. Москва.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Бадиков Р.Н. Исследование влияния продольной сжимающей силы на собственную частоту колебаний цилиндрической пружины спирального грохота. // Изв. вузов. Машиностроение. -2004. -№10. – С.15 –20.
2. Бадиков Р.Н. Расчетно-экспериментальное исследование частотных характеристик цилиндрической пружины, изогнутой в полуокружность. // Изв. вузов. Машиностроение. -2004. -№11. – С.20 – 24.
3. Бадиков Р.Н., Сорокин Ф.Д. Расчет величины критического крутящего момента изогнутой в полуокружность цилиндрической пружины. // Изв. вузов. Машиностроение. -2006. -№4. – С.4 –6.
4. Бадиков Р.Н., Сорокин Ф.Д. Влияние величины осадки на низшую собственную частоту цилиндрической пружины (модель рабочего элемента спирального грохота) // Изв. вузов. Машиностроение. -2007. -№1. – С.10 – 15.
5. Бадиков Р.Н., Сорокин Ф.Д. Влияние угла поворота консольной пружины, подверженной действию сил гравитации, вокруг оси в заделке на прогибы свободного края и собственные частоты. // Изв. вузов. Машиностроение. -2007. - №4. – С.13 –16.
6. Бадиков Р.Н., Сорокин Ф.Д. Влияние радиуса кривизны оси цилиндрической пружины, изогнутой в дугу окружности, на низшую собственную частоту. (модель рабочего элемента спирального грохота) // Изв. вузов. Машиностроение. -2007. - №5. – С.14 –19.
7. Бадиков Р.Н., Сорокин Ф.Д. Приближенное выражение для низшей собственной частоты криволинейного стержня с винтовой осью. // Изв. вузов. Машиностроение. -2007. -№7. – С.10 –12.
8. Бадиков Р.Н., Букеткин Б.В., Сорокин Ф.Д. Влияние контакта витков на упругую характеристику заделанной цилиндрической пружины, подверженной сближению краев, за пределами устойчивости. // Изв. вузов. Машиностроение. -2007. -№9. – С.3 –6.
9. Бадиков Р.Н., Сорокин Ф.Д. Сравнение экспериментального и расчетного значений величины критического крутящего момента изогнутой в полуокружность цилиндрической пружины. // Изв. вузов. Машиностроение. -2008. -№1. – С.11 –14.
10. Бадиков Р.Н. Устойчивость изогнутой в дугу окружности цилиндрической пружины, подверженной действию крутящего момента. // Изв. вузов. Машиностроение. -2008. -№2. – С.15 –22.

Типография ИМАШ РАН, г.Москва, М.Харитоньевский пер., 4

Зак.№ 280 от 20.10.2009 тир. 100 экз.