На правах рукописи

ЗИНЧЕНКО Наталья Алексеевна

БИНАРНЫЕ АДДИТИВНЫЕ ЗАДАЧИ С ПОЛУПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ, ЛЕЖАЩИМИ В КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКАХ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Ульяновск - 2008

Работа выполнена на кафедре алгебры, теории чисел и геометрии в ГОУ ВПО Белгородский государственный университет

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук **Гриценко Сергей Александрович**
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук, профессор **Журавлев Владимир Георгиевич**, кандидат физико–математических наук **Эминян Карапет Мкртичевич**
Ведущая организация:	ГОУ ВПО Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Защита состоится " 29 " октября 2008 г. в 13 часов на заседании диссертационного совета Д 212.278.02 при Ульяновском государственном университете по адресу: Набережная р. Свияги, 106, корп. 1, ауд. 703.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Ульяновского государственного университета, с авторефератом — на сайте вуза http://www.uni.ulsu.ru

Отзывы по данной работе просим направлять по адресу: 432000, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42, УлГУ, Управление научных исследований

Автореферат разослан "28" сентября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета М.А. Волков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Бинарные аддитивные задачи *составляют важный раздел аддитивной теории чисел.*

В двадцатых и тридцатых годах XX века Г.Харди, Дж. Литтлвуд и И.М. Виноградов развили общий метод в аналитической теории чисел, позволяющий вывести асимптотические формулы для числа решений многих аддитивных задач. С его помощью были решены тернарная проблема Гольдбаха, проблема Варинга, проблема Варинга с простыми числами и ряд других. Все эти проблемы были решены по схеме решения тернарной задачи, открытой И.М. Виноградовым.

В пятидесятых и шестидесятых годах XX века Ю.В. Линник разработал дисперсионный метод, с помощью которого ему удалось решить ряд бинарных аддитивных задач с простыми и с полупростыми числами, которые не могут быть решены по схеме решения тернарной задачи.

В частности, Ю.В. Линник дисперсионным методом решил проблему Харди–Литтлвуда, которая состоит в получении асимптотической формулы[1] для для числа решений уравнения

$$p + \xi^2 + \eta^2 = n$$

в целых числах ξ и η и простых числах p.

Решение проблемы Харди–Литтлвуда явилось крупным достижением аналитической теории чисел. Несколько позже К. Хооли дал другое ее решение, основанное на методе малого решета[2] и теореме Бомбьери–Виноградова.

Наряду с проблемой Харди-Литтлвуда Ю.В. Линник решил ряд задач с полупростыми числами. Выделим некоторые из них:

1. В 1958 г. была получена асимптотическая формула[3] для числа решений уравнения

$$p_1 p_2 + \xi^2 + \eta^2 = n$$

в целых числах ξ и η и простых числах p_1 и p_2.

[1]Линник Ю.В. Асимптотическая формула в аддитивной проблеме Гарди-Литтлвуда. //Изв. АН СССР. Сер. мат., 1960, т. 24, No. 5, С. 629-706.

[2]C.Hooley. Применения методов решета в теории чисел. - М.: Наука, 1987., С. 105

[3]Линник Ю.В. Решение некоторых бинарных аддитивных задач подсчетом дисперсии в прогрессиях. ДАН СССР, 1958, т. 123, № 6, с. 957-997

2. В 1960 году была получена асимптотическая формула[4] для числа решений уравнения

$$p_1p_2^a + \xi^2 + \eta^2 = n$$

в целых числах ξ и η и простых числах p_1 и p_2, где $a \geqslant 2$ — натуральное число.

Ю.В. Линник отмечал, что вывод этой формулы не является непоредственным следствием расширенной гипотезы Римана.

В 1963 году М.Б. Барбан дисперсионным методом решил задачу[5], являющуюся аналогом проблемы делителей Титчмарша с полупростыми числами. Он вывел асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1p_2 - xy = 1$$

в целых числах x и y и простых числах p_1 и p_2, где $p_1 \leqslant \sqrt{n}$ и $p_2 \leqslant \sqrt{n}$.

После появления в 1965 году теоремы Бомбьери–Виноградова[6] для решения бинарных аддитивных задач с простыми числами вместо дисперсионного метода стала применяться эта теорема.

Среди аддитивных задач можно выделить задачи с простыми числами, принадлежащими промежуткам специального вида.

В 1940 году И.М. Виноградов[7] методом тригонометрических сумм получил асимптотическую формулу для числа простых чисел, не превосходящих x и лежащих в промежутках вида $[(2m)^2, (2m+1)^2)$, $m \in \mathbb{N}$.

В 1986 году С.А. Гриценко[8] вывел асимптотическую формулу для числа простых чисел, не превосходящих x и лежащих в промежутках вида:

$$[(2m)^c, (2m+1)^c), \tag{1}$$

---

[4]Линник Ю.В. О некоторых аддитивных задачах. // Мат. сб., 1960, том 51, вып. 2, С. 129–154.

[5]Барбан М.Б. Об аналогах проблемы делителей Титчмарша. //Вестник Лен. ун-та, 1963, No. 19, С. 5–13.

[6]Bombieri E. On the large sieve. //Mathematica, 12, 1965, P. 201–225;

Виноградов А.И. О плотностной гипотезе для L-рядов Дирихле. //Изв. АН СССР, сер. Матем., 29, No. 4, 1965, С. 903–934

[7]Виноградов И.М. Некоторое общее свойство распределения простых чисел. // Мат. сб., 1940, No. 7, С. 365–372.

[8]Гриценко С.А. Об одной задаче И.М. Виноградова. // Мат. заметки, том 39, вып. 5, 1986, С. 625–640.

где $m \in \mathbb{N}$, и $c \in (1, 2]$.

Эта задача содержит в себе следующий эффект. Длина промежутка вида (1) по порядку равна $m^{1-1/c}$ и, если c близко к 1, то эти промежутки очень коротки. Ни про один из них не известно (даже в предположении справедливости гипотезы Римана), содержит ли он простое число, и тем не менее, из асимптотической формулы, полученной С.А. Гриценко, следует, что на таких промежутках лежит примерно половина всех простых чисел

В 1988 году С.А. Гриценко решил ряд аддитивных задач[9] с простыми числами, лежащими в промежутках (1).

Позднее задачи подобного вида рассматривались А. Балогом и Дж. Фридлендером[10].

Отметим, что аддитивные задачи из выше упомянутых работ являются тернарными, или решаются по схеме тернарной задачи.

Естественно задаться вопросом о разрешимости бинарных аддитивных задач с простыми числами из промежутков вида (1).

Из результатов в этом направлении выделим следующий.

В 1997 году Д. Толев получил оценку[11]:

$$\sum_{k \leqslant x^{\theta}} \max_{y \leqslant x} \max_{(a,k)=1} \left| \psi_{\lambda}(y; k, a) - \frac{y^{1-\lambda}}{\varphi(k)(1-\lambda)} \right| \ll x^{1-\lambda} \ln^{-A} x,$$

где

$$\psi_{\lambda}(y; k, a) = \sum_{n \leqslant y,\ n \equiv a \pmod k\ \{\sqrt{n}\} < n^{-\lambda}} \Lambda(n)$$

$$0 < \lambda < \frac{1}{4},\ 0 < \theta < \frac{1}{4} - \lambda,\ A > 0.$$

[9]Гриценко С.А. Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Гольдбаха-Варинга с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида // УМН, 1988. том 43, вып.4 (262), С.203–204;

Гриценко С.А. Три аддитивные задачи. // Изв. РАН. Сер.мат., Том 56, No. 6,1992, С. 1198–1216.

[10]A. Balog, K.J. Friedlander. A hybrid of theorems of Vinogradov and Piatetski-Shapiro // Pacific. J. Math. 156 (1992), P. 45–62.

[11]Tolev D.I. On a theorem of Bombieri-Vinogradov type for prime numbers from a thin set. // Acta Arithmetica, 81, 1(1997), P. 57–68.

В формуле Толева граница изменения параметра k меньше, чем $x^{\frac{1}{4}}$. Это обстоятельство не дает возможности применить эту оценку к решению бинарных аддитивных задач с простыми числами.

Поскольку непосредственное применение расширенной гипотезы Римана приводит к тому же результату, что и теорема Толева, то при современном состоянии теории довести границу изменения k до обычной в классической теореме Бомбьери-Виноградова границы ($k \leqslant \sqrt{x}\ln^{-c} x$, $c > 0$) представляется чрезвычайно трудной задачей. Поэтому в настоящее время решить бинарные аддитивные задачи с простыми числами указанного вида не удается.

В данной диссертации рассматриваются бинарные аддитивные задачи с полупростыми числами из промежутков вида (1).

Объектом исследования являются бинарные аддитивные задачи с полупростыми числами из коротких промежутков.

Предмет исследования - уравнения с полупростыми числами, удовлетворяющими определенным условиям.

Цель диссертационной работы заключается в решении следующих задач:

1) Получить асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1p_2 - xy = 1,$$

где $p_1p_2 \leqslant n$. Оно решается в переменных x, y, p_1 и p_2. Простые числа p_1 и p_2 удовлетворяют также дополнительным условиям:

$$p_1 > \exp(\sqrt{\ln n}),\ p_2 > \exp(\sqrt{\ln n}),\ \{\frac{1}{2}(p_1p_2)^{1/c}\} < \frac{1}{2}.$$

Последнее условие равносильно тому, что полупростые числа p_1p_2 принадлежат промежуткам вида (1).

Эта задача является вариантом задачи Бруна-Титчмарша с полупростыми числами, на которые наложены ограничения.

2) Получить асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1p_2 + xy = n,$$

где $p_1p_2 \leqslant n$, а простые числа p_1, p_2 и полупростые числа p_1p_2 удовлетворяют таким же условиям, как и в первой задаче.

3) Получить асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1p_2^a - xy = 1,$$

где $a \geqslant 2$ — натуральное число и

$$p_1p_2^a \leqslant n,\ p_1 \in [1,\ \frac{n}{\exp(\sqrt{\ln n})}],\ p_2 \in [1, (\exp(\frac{1}{a}\sqrt{\ln n})]$$

и полупростые числа $p_1^a p_2$ принадлежат промежуткам вида (1).

Актуальность диссертационной работы следует из того, что решение выше перечисленные задач является очередным шагом в проблемах, связанных с решением бинарных аддитивных задач с простыми числами, лежащими в коротких промежутках.

Методы исследования. Работа основана на методе тригонометрических сумм И.М. Виноградова.

Достоверность результатов проведенных исследований. Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, определяется обоснованными теоретическими выкладками и строгими доказательствами, опирающимися на методы аддитивной теории чисел и метод тригонометрических сумм.

Научная новизна работы. В диссертации представлены доказательства асимтотических формул для числа решений диофантовых уравнений специального вида, то есть решены некоторые бинарные аддитивные задачи с полупростыми числами. Результаты, изложенные в диссертации, являются новыми.

Положения, выносимые на защиту:

1. Доказательство асимптотической формулы для числа решений уравнения $p_1p_2 - xy = 1$, где $p_1p_2 \leqslant n$, которое решается в переменных

x, y, p_1 и p_2. Переменные x и y — натуральные числа, а p_1 и p_2 — простые числа, удовлетворяющие также дополнительным условиям:

$$p_1 > \exp(\sqrt{\ln n}), \quad p_2 > \exp(\sqrt{\ln n}), \quad \{\frac{1}{2}(p_1p_2)^{1/c}\} < \frac{1}{2}.$$

2. Доказательство асимптотической формулы для числа решений диофантова уравнения $xy + p_1p_2 = n$, где x, y и n — числа натуральные, $p_1p_2 \leqslant n$ и p_1, p_2 — простые числа, удовлетворяющие таким же условиям, как и в первой задаче.

3. Вывод асимптотической формулы для числа решений уравнения $p_1p_2^a - xy = 1$, где $p_1^ap_2 \leqslant n$, $a \in \mathbb{N}$, $a \geqslant 2$, полупростые числа $p_1^ap_2$ принадлежат промежуткам вида (1) и простые числа p_1, p_2 независимо друг от друга пробегают, соответственно, промежутки $A_1 = [1, n(\exp(-\sqrt{\ln n})]$ и $A_2 = [1, (\exp(\frac{1}{a}\sqrt{\ln n})]$.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в дальнейших исследованиях, посвященных аддитивным бинарным задачам. Кроме того, результаты диссертационной работы могут быть использованы при чтении специальных курсов по теории чисел.

Апробация результатов. Основные результаты работы докладывались на семинаре кафедры алгебры, теории чисел и геометрии БелГУ, на Международной научной конференции имени академика М. Кравчука в 2004 г. в г. Киеве, на VI Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения посвященной 100-летию Н.Г. Чудакова, в 2004 г. в Саратове, на I международной научно-практической конференции, посвященной памяти профессора Б.М. Бредихина, в 2006 году в Самаре.

Личный вклад автора. В диссертации изложены результаты, полученные автором лично.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах автора, одна из которых опубликована в журнале из списка ВАК. Список статей автора приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав и списка литературы. Список литературы содержит 17 наименований. Общий объем диссертации - 71 страница машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, дается краткий исторический обзор результатов, полученных ранее и связанных с тематикой диссертационной работы, формулируются основные результаты диссертации и дается краткое описание методов доказательства.

Первая глава носит подготовительный характер. В ней приводятся вспомогательные леммы и, в частности, лемма 1 (теорема Бруна–Титчмарша), лемма 4 (о «стаканчиках» И.М. Виноградова), лемма 8 (теорема о среднем И.М. Виноградова), лемма 12 (оценка ван дер Корпута по s-й производной) и лемма 17 (теорема Бомбьери-Виноградова), лежащие в основе доказательства теорем диссертации.

Во второй главе решается первая из поставленных задач. Основной результат главы содержится в теореме 1:

Теорема 1. *Пусть c — произвольное число из полуинтервала* $(1,2]$,

p_1, p_2 — *простые числа,*

$$T(n) = \sum_{\substack{p_1p_2\leqslant n\\ p_1>\exp(\sqrt{\ln n}),\ p_2>\exp(\sqrt{\ln n})}} \tau(p_1p_2-1),$$

$$T_1(n) = \sum_{\substack{p_1p_2\leqslant n\\ p_1>\exp(\sqrt{\ln n}),\ p_2>\exp(\sqrt{\ln n})\\ \{\frac{1}{2}(p_1p_2)^{1/c}\}<\frac{1}{2}}} \tau(p_1p_2-1).$$

Тогда справедливо равенство:

$$T_1(n) = \frac{1}{2}T(n) + O(n \ln\ln\ln n),$$

где

$$T(n) \sim c_0 n \ln\ln n, \ c_0 = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)d},$$

$\varphi(n)$ *— значение функции Эйлера и* $\mu(n)$ *— значение функции Мебиуса.*

Выделим основные этапы решения этой задачи.

Вначале при помощи теоремы Бруна–Титчмарша мы, с приемлемою точностью, приближаем сумму $T_1(n)$ суммой вида

$$T_2(n) = \sum_{\substack{p_1p_2 - xy = 1 \\ \exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 < P \\ x \leqslant \sqrt{n}\ P^{-10} \\ \{\frac{1}{2}(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}\} < \frac{1}{2}}} 1,$$

где $P = n^{\frac{1}{(\ln\ln n)^2}}$.

Заметим, что переменная p_1 пробегает весьма короткий промежуток, а промежуток изменения x отделен от $\sqrt{n}$.

Затем вводятся «стаканчики Виноградова», с помощью которых выделяются слагаемые с условием $\{\frac{1}{2}(p_1p_2)^{1/c}\} < \frac{1}{2}$. Стаканчики раскладываются в ряд Фурье и на нулевых коэффициентах выделяются главные члены асимптотических формул.

Для доказательства теоремы требуется оценить тригонометрическую сумму вида:

$$\sum_{\substack{k \leqslant K \\ k \equiv k_0 \pmod{x}}} \exp(2\pi i \varkappa k^{1/c}),$$

где $\frac{1}{P_1^{1-\frac{1}{c}}} \leqslant \varkappa \leqslant P^{\frac{1}{c}} \ln^3 n$ и $P_1 \in (\exp(\sqrt{\ln n}),\ P]$.

Сумма оценивается методом И.М. Виноградова с использованием как теоремы о среднем значении, так и оценок ван дер Корпута по s-й производной.

Заметим, что при некоторых значениях параметров указанная сумма является очень короткой. Например, при $x = KP^{-9}$ длина промежутка суммирования равна P^9. В этих случаях оценить ее методом ван дер Корпута нельзя, но метод Виноградова дает нетривиальную оценку.

В третьей главе решается вторая из поставленных задач. Основной результат главы содержится в теореме 2:

Теорема **2.** *Пусть*

$$J(n) = \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n \\ p_1>\exp(\sqrt{\ln n}) \\ p_2>\exp(\sqrt{\ln n})}} 1,$$

$$J_1(n) = \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n \\ p_1>\exp(\sqrt{\ln n}),\ p_2>\exp(\sqrt{\ln n}) \\ \{\frac{1}{2}(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}\}<\frac{1}{2}}} 1.$$

Тогда справедлива формула:

$$J_1(n) = \frac{1}{2}J(n)(1 + O(\frac{\ln\ln\ln n}{\ln\ln n})),$$

где

$$J(n) \sim c_0 n \ln\ln n,\ c_0 = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)d}.$$

Отметим, что вторая задача родственна первой, но имеет свои особенности.

В четвертой главе решается третья из поставленных задач. Основной результат главы содержится в теореме 3:

Теорема **3.** *Пусть* $n \geqslant n_0 > 0$, $a \geqslant 2$ *— натуральные числа,* $Q = \exp(\sqrt{\ln n})$, $A_1 = [1, nQ^{-1}]$, $A_2 = [1, Q^{\frac{1}{a}}]$ *и*

$$G(n) = \sum_{p_1\in A_1} \sum_{\substack{p_2\in A_2 \\ p_1p_2^a-xy=1}} \sum_{x,y} 1,$$

$$G_1(n) = \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{\substack{p_2 \in A_2 \\ p_1 p_2^a - xy = 1 \\ \{\frac{1}{2}(p_1 p_2^a)^{\frac{1}{c}}\} < \frac{1}{2}}} \sum_{x,y} 1.$$

Тогда справедливо равенство:

$$G_1(n) = \frac{1}{2} J(n)(1 + O(Q^{-\eta})),$$

где

$$G(n) = c_0 \mathrm{Li}(\frac{n}{Q}) \pi(P^{\frac{1}{a}}) \ln n \ (1 + O(\frac{1}{\sqrt{\ln n}})),$$

$\eta > 0$ — *постоянная*, $c_0 = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)d}$.

Особенность третьей задачи состоит в том, что при $a \geqslant 2$ последовательность $p_1 p_2^a$ является более редкой, чем последовательность $p_1 p_2$ (при больших a она «близка» к последовательности простых чисел).

Заметим, что:

В каждой из глав доказательство теоремы разбито на несколько этапов, что соответствует разбиению главы на пункты.

В каждой из глав есть пункт, в котором применение теоремы Бруна–Титчмарша позволяет приближать искомые суммы, с приемлемой точностью, суммами, в которых промежуток изменения x отделен от $\sqrt{n}$.

Во второй и третьей главах с помощью теоремы Бруна-Титчмарша удается сделать промежуток изменения одного из простых чисел «весьма коротким». В третьей задаче этого делать не приходится, так как, по условию, p_1 и p_2 независимо друг от друга пробегают свои промежутки.

При выводе асимптотических формул для главных членов в каждой из задач применяется теорема Бомбьери–Виноградова.

В каждой из глав применяется метод тригонометрических сумм. Оценки проводятся методом И.М. Виноградова с использованием как теоремы о среднем значении, так и оценок ван дер Корпута по s-й производной.

Основные результаты и выводы:

1. Получена асимптотическая формула для числа решений уравнения

$$p_1p_2 - xy = 1,$$

где $p_1p_2 \leqslant n$, $p_i > \exp(\sqrt{\ln n})$ $(i = 1,2)$ и полупростые числа p_1p_2 принадлежат промежуткам вида

$$[(2m)^c, (2m+1)^c), \quad (m \in \mathbb{N},\ c \in (1,2]).$$

2. Получена асимптотическая формула для числа решений уравнения

$$p_1p_2 + xy = n,$$

с полупростыми числами $p_1p_2 \leqslant n$ из коротких промежутков вида

$$[(2m)^c, (2m+1)^c), \quad (m \in \mathbb{N},\ c \in (1,2]).$$

3. Получена асимптотическую формула для числа решений уравнения

$$p_1p_2^a - xy = 1,$$

где $a \geqslant 2$ — натуральное число и

$$p_1p_2^a \leqslant n,\ p_1 \in [1, \frac{n}{\exp(\sqrt{\ln n})}],\ p_2 \in [1, (\exp(\frac{1}{a}\sqrt{\ln n})]$$

и полупростые числа $p_1p_2^a$ принадлежат промежуткам вида

$$[(2m)^c, (2m+1)^c), \quad (m \in \mathbb{N},\ c \in (1,2]).$$

Таким образом, в диссертации решены три бинарные аддитивные задачи с полупростыми числами, лежащими в коротких промежутках.

Во всех этих задачах рассматриваются такие решения аддитивных задач, что p_1p_2 (или $p_1p_2^a$) лежат в промежутках вида

$$[(2m)^c, (2m+1)^c), \quad (m \in \mathbb{N},\ c \in (1,2]).$$

Из результатов диссертации следует, что числа решений наших диофантовых уравнений, обладающих и не обладающих указанным свойством, асимптотически равны.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах, входящих в список ВАК:

1. *Зинченко Н.А.* Об одной аддитивной бинарной задаче. // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика, Изд-во Сарат. ун-та, вып. 1, том 7, 2007, С. 9–13.

В прочих изданиях:

1. *Зинченко Н.А.* Бинарная аддитивная задача с полупростыми числами. // Сборник материалов X Международной научной конференции имени академика М. Кравчука. — Киев, 2004, С. 390.

2. *Зинченко Н.А.* Аддитивная задача с полупростыми числами, лежащими в коротких промежутках. // Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения. Труды VI Международной конференции, посвященной 100-летию Н.Г. Чудакова. — Саратов, Изд-во Сарат. ун–та, 2004, С. 58–59.

3. *Зинченко Н.А.* Бинарная аддитивная задача с полупростыми числами специального вида. // Чебышевский сборник, том VI, вып. 2 (14), 2005, С. 145–162.

4. *Зинченко Н.А.* Две бинарные аддитивные задачи. // Сибирские электронные математические известия, том 3, 2006, С. 352–354.

5. *Зинченко Н.А.* О числе решений диофантова уравнения специального вида. // Материалы I Международной научно-практической конференции, посвященной памяти профессора Б.М. Бредихина. — Самара, 2006, С. 72–75.

Подписано в печать 18.09.2008. Формат 60x84 1/16.
Тираж 100 экз. Усл. п. л. 1,0. Заказ № 205.
Оригинал-макет тиражирован в издательстве
Белгородского государственного университета
308015, Белгород, ул. Победы, 85