

На правах рукописи
УДК 517 518

Алферова Елена Дмитриевна

РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ ДЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ
ПО СИСТЕМЕ ХААРА

01 01 01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2007



003065330

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Алферова'.

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М В Ломоносова

- Научный руководитель доктор физико-математических наук,
профессор Т П Лукашенко
- Официальные оппоненты доктор физико-математических наук,
профессор В А Скворцов,
кандидат физико-математических наук
Е А Власова
- Ведущая организация Московский государственный
технологический университет "СТАНКИН"

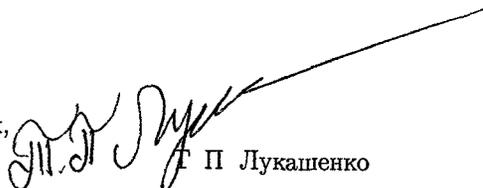
Защита диссертации состоится *5 октября* 2007 г в *16 час 15 мин*
на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете имени М В Ломоносова по адресу

119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14-й этаж)

Автореферат разослан *5* сентября 2007 г

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501 001 85 в МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор



Т П Лукашенко

Общая характеристика работы

Актуальность темы Данная работа посвящена исследованию условий выполнения аналога равенства Парсеваля для рядов Фурье по системе Хара

Равенство Парсеваля — равенство, выражающее квадрат нормы элемента в векторном пространстве со скалярным произведением через квадраты модулей коэффициентов Фурье этого элемента по некоторой ортогональной системе элементов

Выполнение равенства Парсеваля для данного элемента $x \in X$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы ряд Фурье этого элемента по ортогональной системе $\{e_n\}$ сходил к самому элементу x по норме пространства X Выполнение равенства Парсеваля для любого элемента $x \in X$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ была полной системой в X

В случае, когда пространство $X = L^2[-\pi, \pi]$ состоит из действительных функций, квадрат которых интегрируем по Лебегу на отрезке $[-\pi, \pi]$, функция $f \in L^2[-\pi, \pi]$, в качестве полной ортогональной системы функций взята тригонометрическая система функций и $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, где знак \sim понимается в смысле сходимости в метрике L^2 , тогда равенство Парсеваля имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(f) + b_n^2(f)$$

и называется классическим равенством Парсеваля, оно было указано М Парсевалем (M Parseval, 1805) В этом равенстве $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$ — коэффициенты Фурье функции f

Если $g \in L^2[-\pi, \pi]$ и $g \sim \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos nx + b'_n \sin nx$, то равенство Парсеваля выглядит следующим образом

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx = \frac{1}{2}a_0a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n a'_n + b_n b'_n)$$

и называется обобщенным равенством Парсеваля

Вышеприведенные формулы имеют место не только для случая $f \in L^2$, $g \in L^2$, но и в ряде других случаев. Два функциональных класса K и K' будем называть дополнительными, если обобщенное равенство Парсеваля имеет место для любых $f \in K$ и $g \in K'$. При этом сумма ряда в правой части понимается в смысле суммирования каким-либо методом. Исследования на тему какие классы функций являются дополнительными проводились еще в XIX веке¹.

Часто тригонометрический ряд, соответствующий функции $f(x)$, удобнее задавать в следующей форме $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, при этом коэффициенты Фурье c_n функции f определяются формулами $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$, $n \in \mathbb{Z}$.

Для такого представления тригонометрического ряда широко известно классическое равенство Парсеваля, относящееся к рядам Фурье–Стилтьеса.

Доказано², что если $f(x)$ — 2π -периодическая непрерывная функция на отрезке $[0, 2\pi]$, $G(x)$ — 2π -периодическая с точностью до линейной составляющей функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$, то

$$\frac{1}{2\pi}(R - S) \int_0^{2\pi} f(x) d\overline{G(x)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{dG}(k)},$$

где $\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$ и $\widehat{dG}(k) = \frac{1}{2\pi}(R - S) \int_0^{2\pi} e^{-ikx} dG(x)$ — соответственно коэффициенты Фурье функции $f(x)$ и коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции $G(x)$, ряд в правой части равенства может не сходиться, но суммируется методом средних арифметических, интеграл в равенстве Парсеваля и интегралы, определяющие коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции $G(x)$, понимаются как интегралы Римана–Стилтьеса.

В С. Горячева показала³, что в этом утверждении можно разрешить функции $f(x)$ иметь конечное число разрывов первого рода при условии, что функция $G(x)$ в них непрерывна, а также привела примеры, когда для

¹Бари Н К Тригонометрические ряды М, Физматлит, 1961

²Зигмунд А, Тригонометрические ряды Т 1 Москва Мир, 1965

³Горячева В С, О равенстве Парсеваля для рядов Фурье–Стилтьеса // Вестн Моск ун-та Сер 1, Математика Механика 2002 №1 с 32-36

некоторых пар функций равенство Парсевала для рядов Фурье–Стилтьеса не выполняется. Из примера, построенного ею, видно, что для тригонометрической системы существуют такие ограниченная функция f и непрерывная функция ограниченной вариации G , что определен и конечен интеграл Лебега–Стилтьеса $(L-S) \int_0^{2\pi} f(x) d\overline{G(x)}$, а равенство Парсевала для этой пары функций f и G не выполняется. Достаточно в качестве функции $G(x)$ взять функцию Кантора (канторову лестницу) на $[0, 2\pi]$, а в качестве функции f — функцию, равную нулю на интервалах постоянства G и равную единице в остальных точках отрезка. В этом случае $(L-S) \int_0^{2\pi} f(x) d\overline{G(x)}$ существует и равен 1, а ряд в правой части равенства Парсевала равен 0.

Т П Лукашенко доказал⁴ равенство Парсевала для тригонометрических рядов Фурье–Стилтьеса–Римана и метода суммирования Римана⁵ при более слабых условиях на функции. А именно — он доказал, что равенство Парсевала для рядов Фурье–Стилтьеса остается верным, если f — 2π -периодическая комплекснозначная функция, G — 2π -периодическая с точностью до линейной составляющей комплекснозначная функция, $f(x)$ и $G(x)$ интегрируемы по Лебегу, функция $f(x)$ интегрируема на периоде (любом отрезке длины 2π) в смысле Римана–Стилтьеса по функции $\overline{G(x)}$. Ряд в правой части равенства может не сходиться, но он суммируется методом Римана $(\mathcal{R}, 2)$.

В этих исследованиях существенную роль играет тот факт, что интеграл в равенстве Парсевала понимается в смысле Римана–Стилтьеса. Т П Лукашенко было замечено⁶, что для интеграла Лебега–Стилтьеса равенство Парсевала по тригонометрической системе функций не может быть верным ни для одной функции G ограниченной вариации, которая не является абсолютно непрерывной.

Если же функция $G(t)$ является абсолютно непрерывной, то $(L-S) \int_a^b f(x) d\overline{G(x)} = (L) \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$, где $g(t) = G'(t)$ п в⁷. И встает

⁴ Лукашенко Т П, Об интеграле Римана–Стилтьеса и равенстве Парсевала для рядов Фурье–Стилтьеса // Вестн Моск ун-та Сер 1, Математика Механика 2002 №4 с 18-23

⁵ Качмаж С, Штейнгауз Г Теория ортогональных рядов Государственное издательство физико-математической литературы, М 1958

⁶ Лукашенко Т П, О равенстве Парсевала для произведения функций // Вестн Моск ун-та Сер 1, Математика Механика 2003 №3 с 32-40

⁷ Сакс С, Теория интеграла М Ил 1949, Факториал Пресс 2004 с 61

вопрос о выполнении равенства Парсевала в случае, если наряду с функциями f и g интегрируемо по Лебегу и их произведение $f \cdot g$

В этом направлении Т П Лукашенко было доказано⁸, что если f и g такие 2π -периодические комплекснозначные интегрируемые в смысле широкого интеграла Данжуа с почти всюду дифференцируемыми первообразными функции, что произведение $Mf \cdot g$ интегрируемо по Лебегу, где $Mf(x) = \sup_{h \neq 0} \left| \frac{F(x+h) - F(x-h)}{h} \right|$ — неабсолютная максимальная функция Харди–Литтлвуда функции f , F — неопределенный интеграл функции f , то выполняется равенство Парсевала для метода суммирования Римана

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = (R, 2) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)}$$

А при обобщении результатов для тригонометрической системы на m -мерное пространство Т П Лукашенко для интеграла Римана–Стилтьеса были получены следующие результаты⁹ если функция $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ является 2π -периодической по каждой переменной и интегрируема по Лебегу на $T^m = [0, 2\pi]^m$, функция $G: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ является суммой 2π -периодической по каждой переменной функции и линейной функции и интегрируема по Лебегу на T^m и функция f интегрируема по функции \overline{G} в смысле Римана–Стилтьеса на любом брусе $T_a^m = \prod_{j=1}^m [a_j, a_j + 2\pi]$, то выполняется равенство Парсевала

$$\frac{1}{(2\pi)^m} (R - S) \int_{T^m} f d\overline{G} = (\mathcal{R}, 2) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m} \widehat{f}(\mathbf{k}) \overline{\widehat{dG}(\mathbf{k})},$$

где $\widehat{f}(\mathbf{k}) = \widehat{f}(k_1, \dots, k_m) = \frac{1}{(2\pi)^m} (L) \int_{T^m} f(t) e^{-i\mathbf{k}t} dt_1 \cdot \dots \cdot dt_m$, и $\widehat{dG}(\mathbf{k}) = \widehat{dG}(k_1, \dots, k_m) = \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{2\pi} \int_{t_j=0}^{2\pi} + \frac{ik_j}{2\pi} (L) \int_0^{2\pi} dt_j e^{-ik_j t_j} \right) G(t)$ — соответственно коэффициенты Фурье функции $f(x)$ и коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции $G(x)$, ряд в правой части равенства Парсевала может не сходиться, но суммируется методом Римана $(\mathcal{R}, 2)$

⁸ Лукашенко Т П, О равенстве Парсевала для произведения функций. // Вестн Моск ун-та Сер 1, Математика Механика 2003 №3 с 32-40

⁹ Лукашенко Т П, Об интегралах Стилтьеса и равенстве Парсевала для кратных тригонометрических рядов // РАН Сер математическая, Т 69 2005 №5 с 149-168

В этой же работе Т. П. Лукашенко были получены результаты для тригонометрических рядов Фурье–Лебега в m -мерном пространстве

Теорема. Пусть функция $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ является 2π -периодической по каждой переменной и интегрируема по Лебегу на $T^m = [0, 2\pi]^m$, неотрицательная аддитивная функция бруса G определена на всех брусах из \mathbb{R}^m и 2π -периодична по каждой переменной. Если существует интеграл Лебега–Стилтьеса от $\mathfrak{M}f = \max\{|f|, Mf\}$ по G на T^m , где $Mf(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{x} \in \Pi} \frac{|F(\Pi)|}{|\Pi|}$ (Π – содержащие точку \mathbf{x} кубы, m – брус с ребрами одинаковой длины, $F(\Pi) = (L) \int \cdots \int_{\Pi} f dt$ – функция бруса) – неабсолютная максимальная функция Харди–Литтлвуда функции f по кубам, и

1) или мера $\mu(E) = \int_E \mathfrak{M}f(t) dG(t)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега,

2) или существует интеграл Лебега от $f M_G$ на T^m , где $M_G(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{x} \in \Pi} \frac{G(\Pi)}{|\Pi|}$ (Π – содержащие точку \mathbf{x} кубы) – максимальная функция Харди–Литтлвуда функции бруса G по кубам, то выполняется равенство Парсеваля

$$\frac{1}{(2\pi)^m} (L - S) \int_{T^m} \cdots \int f d\widehat{G} = (R, 2) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m} \widehat{f}(\mathbf{k}) \overline{\widehat{dG}(\mathbf{k})},$$

где $\widehat{f}(\mathbf{k})$ и $\widehat{dG}(\mathbf{k})$ – соответственно коэффициенты Фурье функции f и коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции G , интеграл в равенстве является интегралом Лебега–Стилтьеса, ряд в правой части равенства Парсеваля может не сходиться, но суммируется методом Римана $(R, 2)$

Цель работы. Исследовать необходимые и достаточные условия выполнения равенства Парсеваля для рядов Фурье и Фурье–Стилтьеса по системам Хаара и Уолша функций одной и многих переменных

Научная новизна. Полученные результаты являются новыми и состоят в следующем

- 1) для интеграла Римана–Стилтьеса в равенстве Парсеваля – доказана справедливость равенства Парсеваля для рядов Фурье–Стилтьеса по системе Хаара на отрезках $[0, 1]$, $[0, 1]^*$ и на брусах $[0, 1]^m$, $[0, 1]^*{}^m$,

— показано, что равенство Парсеваля верно и для рядов по системе Уолша, если сумму ряда понимать как предел частичных сумм с номерами 2^k , $k \in \mathbb{N}$,

2) для интеграла Лебега

— получены достаточные условия выполнения равенства Парсеваля для рядов Фурье–Лебега по системе Хаара,

— доказана справедливость равенства Парсеваля для рядов Фурье–Лебега по системе Уолша для почти всех двоичных сдвигов функции

Методы исследования В работе используются классические методы теории функций действительного и комплексного переменного и функционального анализа

Теоретическая и практическая ценность Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в теории рядов по системам Хаара и Уолша.

Апробация диссертации Результаты диссертации докладывались в МГУ на семинаре по теории ортогональных рядов под руководством академика РАН П. Л. Ульянова, проф. М. К. Потапова и проф. М. И. Дьяченко, на семинаре по теории функций действительного переменного под руководством проф. Т. П. Лукашенко, проф. В. А. Скворцова и м. н. с. А. П. Солодова, на семинаре по теории ортоподобных систем под руководством проф. Т. П. Лукашенко и доц. Т. В. Родионова, доц. В. В. Галатенко, на международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова (Ростов-на-Дону, 2004), на Воронежских зимних математических школах “Современные методы теории функций и смежные проблемы” (2005 и 2007), на Саратовской зимней школе “Современные проблемы теории функций и их приложения” (Саратов, 2006), на международном симпозиуме “Ряды Фурье и их приложения” (Абрау-Дюрсо, 2006).

Публикации Результаты диссертации опубликованы в 8 работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы Диссертация изложена на 65 страницах и состоит из введения, двух глав и списка литературы, включающего 19 наименований.

Основное содержание диссертации

Во введении приводятся основные определения и дается краткий обзор по теме диссертации — равенстве Парсевалля, формулируются основные полученные результаты

В первой главе рассматриваются ряды Фурье–Стилтьеса по системе Хаара. При этом удалось существенно (по сравнению с результатами для тригонометрической системы) снизить требования на функции f и G . Глава состоит из двух параграфов. В первом из них функции заданы на отрезке $[0, 1]$ (и на модифицированном отрезке $[0, 1]^*$), во втором — обобщение результатов на случай m -мерного пространства (результаты на бруссе Π^m и модифицированном бруссе Π^{*m}).

Во второй главе рассматриваются ряды Фурье–Лебега по системам Хаара и Уолша. Структура второй главы повторяет структуру первой.

В первом параграфе первой главы для случая модернизированного отрезка доказано

Теорема 1.1. Пусть $f(x)$ и $G(x)$ — комплекснозначные функции на модернизированном отрезке $[0, 1]^*$, $f(x)$ интегрируема в смысле широкого интеграла Данжуа на $[0, 1]^*$ и интегрируема в смысле Римана–Стилтьеса по функции $\overline{G(x)}$ на $[0, 1]^*$. Тогда выполняется равенство Парсевалля

$$(R - S) \int_{[0,1]^*} f(x) d\overline{G(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{G}(k)},$$

где $\widehat{f}(k) = (f, \chi_k) = (D) \int_{[0,1]^*} f(x) \chi_k(x) dx$ и $\widehat{G}(k) = \int_{[0,1]^*} \chi_k(x) dG(x)$ — соответственно коэффициенты Фурье–Данжуа функции f и коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции G по системе Хаара, интеграл в равенстве Парсевалля и в определении коэффициентов функции G является интегралом Римана–Стилтьеса, ряд в правой части равенства Парсевалля сходится, а черта сверху означает комплексное сопряжение.

Чтобы теорема имела место на обычном отрезке $[0, 1]$, необходимо усилить требования на функцию $G(x)$.

Теорема 1.2. Пусть $f(x)$ и $G(x)$ — комплекснозначные функции на отрезке $[0, 1]$, функция $f(x)$ интегрируема в смысле широкого интеграла Данжуа на $[0, 1]$ и интегрируема в смысле Римана–Стилтьеса по функции $\overline{G(x)}$ на $[0, 1]$. Пусть также существуют коэффициенты Фурье–

Стилтьеса функции $G(x)$ по системе Хаара $\widehat{dG}(k) = \int_{[0,1]} \chi_k(x) dG(x)$

Тогда выполняется равенство Парсеваля

$$(R - S) \int_{[0,1]} f(x) \overline{dG(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{dG}(k)},$$

где $\widehat{f}(k) = (f, \chi_k) = (D) \int_{[0,1]} f(x) \chi_k(x) dx$ — коэффициенты Фурье–Данжуа

функции f по системе Хаара, интеграл в равенстве Парсеваля и в определении коэффициентов функции G является интегралом Римана–Стилтьеса, ряд в правой части равенства Парсеваля сходится

Добавление требований к условиям теоремы объясняется тем, что коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции $G(x)$ на $[0, 1]$ могут и не существовать, что связано с разрывностью на $[0, 1]$ функций системы Хаара

На модернизированном же отрезке $[0, 1]^*$ это требование опускаем, т.к. коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции $G(x)$ $dG(x) = \int_{[0,1]^*} \chi_k(x) dG(x)$

всегда существуют. Это объясняется тем, что функции системы Хаара непрерывны на модифицированном отрезке, а интеграл Римана–Стилтьеса от непрерывной функции существует и совпадает с соответствующим интегралом Лебега–Стилтьеса

Заметим, что равенство Парсеваля справедливо для системы Уолша как на $[0, 1]^*$, так и на $[0, 1]$ соответственно с теми же требованиями на функции f и G , что в заявленных теоремах, при условии, что сумма ряда в равенстве Парсеваля понимается как предел частичных сумм с номерами вида 2^k

Во втором параграфе аналогичные результаты доказываются для кратных рядов Фурье по системе Хаара

Теорема 1.3. Пусть $f: \Pi^{*m} \rightarrow \mathbb{C}$ интегрируема в смысле Лебега на модифицированном брусе Π^{*m} и интегрируема в смысле Римана–Стилтьеса по функции $G: \Pi^{*m} \rightarrow \mathbb{C}$ на Π^{*m} . Тогда выполняется равенство Парсеваля

$$(R - S) \int_{\Pi^{*m}} \int f(\mathbf{x}) \overline{dG(\mathbf{x})} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_2^m} \widehat{f}(\mathbf{k}) \overline{\widehat{dG}(\mathbf{k})},$$

где $\widehat{f}(\mathbf{k}) = (f, \chi_{\mathbf{k}}) = (L) \int_{\Pi^{*m}} \int f(\mathbf{x}) \chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ и $\widehat{dG}(\mathbf{k}) = \int_{\Pi^{*m}} \int \chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) dG(\mathbf{x})$

— соответственно коэффициенты Фурье функции f и коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции G по системе Хаара, интеграл в равенстве Парсеваля и в определении коэффициентов функции G является интегралом Римана–Стилтьеса, ряд в правой части равенства Парсеваля сходится в смысле суммирования по прямоугольникам, а черта сверху означает комплексное сопряжение

Для справедливости теоремы на Π^m (без $*$), как и в случае интегрируемости на отрезке, необходимо усиление требований на функцию G

Теорема 1.4. Пусть f и G — комплекснозначные функции, $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ интегрируема в смысле Лебега на Π^m , и в смысле Римана–Стилтьеса по функции $G: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ на Π^m . Пусть также на Π^m существуют коэффициенты Фурье–Стилтьеса по системе Хаара функции G . Тогда выполняется равенство Парсеваля

$$(R - S) \int_{\Pi^m} \int f(\mathbf{x}) d\overline{G(\mathbf{x})} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m} \widehat{f}(\mathbf{k}) \overline{\widehat{dG}(\mathbf{k})},$$

где $\widehat{f}(\mathbf{k}) = (f, \chi_{\mathbf{k}}) = (L) \int_{\Pi^m} \int f(\mathbf{x}) \chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ и $\widehat{dG}(\mathbf{k}) = \int_{\Pi^m} \int \chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) dG(\mathbf{x})$

— соответственно коэффициенты Фурье функции f и коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции G по системе Хаара, интеграл в равенстве Парсеваля и в определении коэффициентов функции G является интегралом Римана–Стилтьеса, ряд в правой части равенства Парсеваля сходится

Добавление требований к условиям теоремы объясняется тем, что коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции G на Π^m могут не существовать

Во второй главе интеграл в равенстве Парсеваля понимается в смысле Лебега–Стилтьеса

Для системы Хаара, как и в случае тригонометрической системы, для интеграла Лебега–Стилтьеса результаты, аналогичные теоремам, сформулированным в первой главе, получить нельзя. Как и в случае тригонометрической системы, без дополнительных ограничений на функцию f подобные результаты нельзя получить ни для одной функции G ограниченной вариации, которая не является абсолютно непрерывной

Для рядов Фурье по системе Хаара удалось построить пример, показывающий, что существуют интегрируемые по Лебегу на отрезке $[0, 1]$ функ-

ции f и g такие, что интеграл $(L) \int_{[0,1]} f(x)g(x) dx$ существует и конечен, но

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(k)\widehat{g}(k) = +\infty$ И следовательно

$$(L) \int_{[0,1]} f(x)g(x) dx \neq \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$$

А также в первом параграфе для интеграла Лебега получено достаточное условие справедливости равенства Парсеваля по системе Хаара

Теорема 2.1 Пусть функция f интегрируема по Лебегу на $[0, 1]$, а G — функция ограниченной вариации на $[0, 1]$ Если существует интеграл Лебега–Стилтьеса от $\mathfrak{M}f = \max\{|f|, Mf\}$ по G , где $Mf(x) = \sup_{h \neq 0} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right|$ — неабсолютная максимальная функция Харди–Литтлвуда функции f , F — неопределенный интеграл функции f , и выполнено одно из следующих двух условий

1) мера $\mu(E) = \int_E \mathfrak{M}f(t) dG(t)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега,

2) существует интеграл Лебега от fM_G , где $M_G(x) = \sup_{h \neq 0} \left| \frac{G(x+h) - G(x)}{h} \right|$, то выполнено равенство Парсеваля

$$(L - S) \int_{[0,1]} f(x) d\overline{G(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{G}(k)},$$

где $\widehat{f}(k)$ и $\widehat{dG}(k)$ — соответственно коэффициенты Фурье функции f и коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции G , черта сверху обозначает комплексное сопряжение, интеграл в равенстве Парсеваля является интегралом Лебега–Стилтьеса

А для системы Уолша доказана

Теорема 2.2. Если f — комплекснозначная интегрируемая по Лебегу функция на $[0, 1]$, G — комплекснозначная функция ограниченной вариации на $[0, 1]$, $f_x(k) = (L) \int_{[0,1]} f(x \oplus t) \chi_k(t) dt$ — коэффициенты Фурье–Лебега функции $f_x(t) = f(x \oplus t)$, ” \oplus ” — групповая операция сложения, то ра-

венство Парсеваля

$$(L - S) \int_{[0,1]} f(x \oplus t) d\overline{G}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_x(k) \overline{dG}(k),$$

имеет место для почти всех $x \in [0, 1]$ в смысле суммируемости ряда любым методом, суммирующим ряды Фурье интегрируемых по Лебегу функций к этим функциям почти всюду, интеграл понимается в смысле Лебега-Стилтьеса

Во втором параграфе второй главы доказываются результаты для кратных рядов Фурье, если интеграл в равенстве Парсеваля понимать в смысле Лебега

Теорема 2.3. Пусть функция $f [0, 1]^m \rightarrow \mathbb{C}$ интегрируема по Лебегу на брус $[0, 1]^m$, неотрицательная аддитивная функция бруса G определена на $[0, 1]^m$. Если существует интеграл Лебега-Стилтьеса от $\mathfrak{M}f = \max\{|f|, Mf\}$ по G на $[0, 1]^m$, где $Mf(x) = \sup_{\Pi \ni x} \left| \frac{F(\Pi)}{|\Pi|} \right|$ (Π — содержащие точку x кубы, F — функция бруса $F(\Pi) = \int_{\Pi} f(t) dt$) — неабсолютная максимальная функция Харди-Литтлвуда функции f по кубам, и выполнено одно из следующих двух условий

1) мера $\mu(E) = \int_E \mathfrak{M}f(t) dG(t)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега,

2) существует интеграл Лебега от fM_G на $[0, 1]^m$, где $M_G(x) = \sup_{\Pi \ni x} \left| \frac{G(\Pi)}{|\Pi|} \right|$ (Π — содержащие точку x кубы) — максимальная функция Харди-Литтлвуда функции бруса G по кубам, то выполнено равенство Парсеваля

$$(L - S) \int_{\Pi^m} f d\overline{G} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \widehat{f}(k) \overline{dG}(k),$$

где $\widehat{f}(k) = \int \int_{\Pi^m} f(x) \chi_k(x) dx$, $\widehat{dG}(k) = (L - S) \int_{\Pi^m} \chi_k(x) dG(x)$ — соответственно коэффициенты Фурье функции f и коэффициенты Фурье-Лебега-Стилтьеса функции G , черта сверху обозначает комплексное сопряжение, интеграл в равенстве Парсеваля является интегралом Лебега-Стилтьеса

А для системы Уолша в m -мерном пространстве верна следующая теорема

Теорема 2.4. *Если $f: \Pi^m \rightarrow \mathbb{C}$ — комплекснозначная интегрируемая по Лебегу функция, а G — комплекснозначная функция ограниченной вариации на Π^m , то для почти всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ функция $f_{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x} \oplus t)$ интегрируема в смысле Лебега–Стилтьеса по комплексной мере, определяемой функцией \widehat{G} . Если $\widehat{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{k}) = (L) \int_{\Pi^m} f(\mathbf{x} \oplus t) \chi_{\mathbf{k}}(t) dt$ и $\widehat{dG}(\mathbf{k}) = (L - S) \int_{\Pi^m} \chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) dG(\mathbf{x})$ — соответственно коэффициенты Фурье–Лебега функции $f_{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x} \oplus t)$ и коэффициенты Фурье–Лебега–Стилтьеса функции $G(t)$, ” \oplus ” — групповая операция сложения — то равенство Парсевала*

$$(L - S) \int_{\Pi^m} \int_{\Pi^m} f(\mathbf{x} \oplus t) \overline{dG(t)} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m} \widehat{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{k}) \overline{\widehat{dG}(\mathbf{k})},$$

имеет место для почти всех \mathbf{x} в смысле суммируемости ряда любым методом, суммирующим ряды Фурье интегрируемых по Лебегу функций к этим функциям почти всюду, интеграл в равенстве Парсевала понимается в смысле Лебега–Стилтьеса, а черта сверху означает комплексное сопряжение

В заключение приношу глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Т. П. Лукашенко за постановку задачи и руководство в подготовке работы

Работы автора по теме диссертации

- [1] *Алферова Е Д* Равенство Парсеваля для рядов Фурье–Стилтьеса по системе Хаара // Вестн Моск ун-та Сер 1, Математика Механика 2003 №6 С 47-50
- [2] *Алферова Е Д* Равенство Парсеваля для кратных рядов Фурье–Стилтьеса по системе Хаара // Вестн Моск ун-та Сер 1, Математика Механика 2007 №4 С 8–12
- [3] *Алферова Е Д* Равенство Парсеваля для рядов Фурье–Стилтьеса по системе Хаара //Труды участников международной школы семинара по геометрии и анализу памяти Н В Ефимова// Ростов-на-Дону 2002 С 98-100
- [4] *Алферова Е Д* Равенство Парсеваля для рядов Фурье–Стилтьеса по системе Хаара // Современные методы теории функций и смежные проблемы Материалы Воронежской зимней математической школы Воронеж 2003 С 11
- [5] *Алферова Е Д* Равенство Парсеваля для рядов Фурье–Стилтьеса по системе Хаара // Труды участников международной школы семинара по геометрии и анализу памяти Н В Ефимова// Ростов-на-Дону 2004 С 77-78
- [6] *Алферова Е Д* Равенство Парсеваля по системе Хаара для интеграла Лебега–Стилтьеса // XIV международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения Тезисы докладов , Ростов-на-Дону 2006 С 9-10
- [7] *Алферова Е Д* Равенство Парсеваля по системе Хаара для произведения функций // Современные методы теории функций и их приложения Тезисы докладов 13-ой Саратовской зимней школы Саратов 2006 С 10
- [8] *Алферова Е Д* Равенство Парсеваля по системе Хаара для интеграла Лебега–Стилтьеса // Современные методы теории функций и смежные проблемы Материалы Воронежской зимней математической школы Воронеж 2007 С. 7

Заказ №462. Объем 1 п.л. Тираж 100 экз.

Отпечатано в ООО «Петроруш».

г. Москва, ул. Палиха-2а, тел. 250-92-06

www.postator.ru