

На правах рукописи



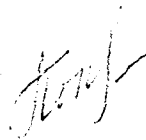
003067282

**ПОПОВА Ирина Геннадьевна**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ СТАНОВЛЕНИЯ  
РАЗЛИЧНЫХ АСПЕКТОВ СМЫСЛА МАТЕМАТИЧЕСКИХ  
ПОНЯТИЙ У СТАРШЕКЛАССНИКОВ  
(на материале темы «Логарифмическая  
и показательная функции»)**

13.00.02 – теория и методика обучения и воспитания  
(математика, уровень общего образования)

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата педагогических наук



Омск – 2006

Работа выполнена на кафедре математического анализа государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Барнаульский государственный педагогический университет»

**Научный руководитель:** доктор педагогических наук, профессор  
*Элеонора Константиновна Брейтшам*

**Официальные оппоненты:** доктор педагогических наук,  
профессор *Ирина Андреевна Маврина*;  
кандидат педагогических наук, доцент  
*Наталья Александровна Бурмистрова*

**Ведущая организация:** Кузбасская государственная  
педагогическая академия

Защита диссертации состоится 12 января 2007 г. в 10.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.177.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора педагогических наук при Омском государственном педагогическом университете по адресу: 644099, г. Омск, наб. Тухачевского, 14, ауд. 212.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГОУ ВПО «Омский государственный педагогический университет».

Автореферат разослан «8» декабря 2006 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

М. И. Рагулина

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность исследования.** На современном этапе основным направлением развития школьного образования является личностно ориентированное обучение, цель которого состоит в создании максимально благоприятных условий для развития и саморазвития личности ученика, выявления и учета его индивидуальных особенностей в процессе организации учебной деятельности.

Ряд психологов (Е. Ю. Артемьева, В. П. Зинченко, Д. А. Леонтьев и др.) и педагогов (Е. В. Бондаревская, С. В. Кульневич, В. В. Сериков, А. В. Хуторской и др.) доказали, что наибольшие возможности развития личности обеспечиваются за счет переноса акцента с информационного на смысло-поисковое обучение. Смысл – продукт процесса понимания. Человек понимающий – это человек, обладающий личностно значимым, «живым знанием», человек думающий, развивающийся. В условиях личностно ориентированного обучения знание, включенное в личностный опыт учащегося, обогащающее его, способствует развитию личности.

На сегодняшний день педагогический аспект категории «понимание» нашел свое отражение в работах М. Е. Бершадского, Э. К. Брейтгигам, А. Ф. Закировой, Т. А. Ивановой, Е. И. Ляшенко, В. М. Туркиной и др. В основе работ перечисленных педагогов лежат исследования психологов (А. А. Брудного, В. П. Зинченко, В. В. Знакова и др.) о связи между смыслом и пониманием. Из педагогических исследований категории «понимание» следует, что понимающее усвоение предмета обеспечивается за счет его целостного восприятия, выявления смысловой компоненты нового понятия и включения его в личностный образовательный опыт ученика.

Проблемой понимающего усвоения математики занимаются также ученые как Э. К. Брейтгигам, Е. И. Ляшенко, Н. С. Подходова, В. М. Туркина, Е. В. Пономарева, О. В. Шереметьева и др.

Исследования большинства из них посвящены понимающему усвоению учащимися учебного материала основной школы. Необходимость уделения специального внимания организации понимающего усвоения старшеклассниками учебного материала связана с тем, что изучение математики в старшей школе имеет ряд трудностей. К ним относят высокий уровень абстракции математических понятий, сложную логическую структуру определений и теорем, высоко формализованный язык.

На данный момент среди диссертационных исследований, посвященных понимающему усвоению старшеклассниками учебного материала, можно выделить работы Э. К. Брейтгигам и Е. В. Пономаревой. Их исследования посвящены понимающему усвоению абстрактных математических понятий, таких как «предел», «непрерывность», «произ-

водная» и «интеграл». В работе Е. В. Пономаревой представлена методика, направленная на понимающее усвоение школьниками предельного перехода в математике. Докторская диссертация Э. К. Брейтигам посвящена разработке концепции деятельностно-смыслового подхода в контексте развивающего обучения старшеклассников началам математического анализа. Одним из основных положений данной концепции является понимающее усвоение математики, которое предполагает постижение различных аспектов смысла математических понятий.

Методические условия, обеспечивающие становление различных аспектов смысла математических понятий у старшеклассников, до настоящего времени не являлись предметом диссертационного исследования.

Усвоение ведущих понятий такой структурно-содержательной линии школьного курса математики, как функциональная, зачастую носит формальный характер у учащихся, что не влечет положительного влияния на развитие их личности. Поэтому на сегодняшний день методика изучения основных видов функций и их свойств нуждается в совершенствовании. В частности, знания по теме «Логарифмическая и показательная функции» при традиционной организации его усвоения зачастую носят формальный характер у большого количества старшеклассников. Понятия «логарифм» и «логарифмическая функция» не становятся «своими» понятиями для учащихся, не входят в смысловую сферу личности при таком подходе. Подтверждением служат результаты ЕГЭ по математике (например, результаты ЕГЭ по Томской области за 2001 – 2006 год, по Алтайскому краю за период с 2002 по 2006 год), результаты устных экзаменов по математике в Алтайском краевом педагогическом лицее, гимназии № 123 г. Барнаула.

Все сказанное позволяет сформулировать следующие **противоречия**:

- между признанием в педагогике, психологии, теории и методике обучения математике роли и значения смысловых структур и тем, что оно пока не нашло своего достаточного отражения в методике преподавания математики;
- между требованием стандартов и программ по математике по усвоению темы «Логарифмическая и показательная функции» в курсе алгебры и начал анализа и формальным ее усвоением в реальной практике.

Таким образом, **актуальность** исследования вытекает из необходимости разрешения перечисленных противоречий, что позволит сделать значительный шаг в разработке модели личностно ориентированного обучения математике старшеклассников, направленной на постижение смысла предмета на материале темы «Логарифмическая и показательная функции» в школьном курсе алгебры и начал анализа.

**Проблема исследования** – выявление условий и методов, способствующих понимающему усвоению учащимися основных понятий темы «Логарифмическая и показательная функции» в личностно ориентированной модели обучения.

**Объект исследования** – процесс формирования математических понятий у старшеклассников.

**Предмет исследования** – методические условия, обеспечивающие становление различных аспектов смысла математических понятий у старшеклассников на материале темы «Логарифмическая и показательная функции».

**Цель исследования** – выявить, теоретически обосновать и экспериментально проверить методические условия становления различных аспектов смысла математических понятий у старшеклассников, способствующие понимающему усвоению материала темы «Логарифмическая и показательная функции».

**Гипотеза исследования** заключается в том, что понимающее усвоение материала темы «Логарифмическая и показательная функции» будет обеспечено, если обучение будет направлено на становление различных аспектов смысла математических понятий, включение их в личностный опыт и целостное восприятие материала за счет выполнения следующих методических условий: генетического структурирования учебного материала темы; использования информационно-коммуникационных технологий для постижения структурно-предметного аспекта смысла понятия «натуральная логарифмическая функция»; интеграции различных форм представления содержания математических понятий; применения специальным образом организованного диалога как инструмента понимающего усвоения.

В процессе исследования проблемы и проверки достоверности сформулированной гипотезы необходимо было решить следующие задачи:

1. Выявить сущность смысла и значения как компонентов математического знания; раскрыть дидактическую составляющую категории «понимание».
2. Выяснить, как становление различных аспектов смысла математических понятий влияет на развитие теоретического мышления старшеклассников.
3. Выявить и теоретически обосновать методические условия становления различных аспектов смысла математических понятий у старшеклассников.
4. Разработать методику изучения темы «Логарифмическая и показательная функции», ориентированную на понимающее усвоение

старшеклассниками учебного материала с учетом выявленных методических условий.

5. Осуществить экспериментальную проверку эффективности разработанной методики, отслеживая влияние выявленных методических условий на понимающее усвоение учащимися учебного материала.

**Методологические основы исследования:**

– общие принципы теории познания и категориальный строй науки в целом (Э. В. Ильенков, Г. И. Рузавин, Г. Фреге и др.);

– личностный подход; деятельностный подход (Л. С. Выготский, В. В. Давыдов, А. Н. Леонтьев, С. Л. Рубинштейн, Д. Б. Эльконин и др.).

– идеи целостного системного подхода к рассмотрению педагогического процесса и педагогических явлений (В. С. Ильин, И. Я. Лернер, В. А. Сластенин и др.);

– психолого-педагогические концепции развивающего обучения (В. В. Давыдов, Д. Б. Эльконин, И. С. Якиманская и др.).

**Теоретические основы исследования:**

– теории общения и учебно-познавательной деятельности (В. В. Давыдов, П. Я. Гальперин, А. Н. Леонтьев, А. А. Леонтьев, Д. А. Леонтьев, Н. Ф. Талызина, А. С. Шаров и др.);

– теория личностно ориентированного обучения (Е. В. Бондаревская, В. В. Сериков, А. В. Хуторской, И. С. Якиманская и др.);

– теория и методика обучения математике в школе (Э. К. Брейтгам, В. А. Далингер, Н. Я. Виленкин, Г. В. Дорофеев, Т. А. Иванова, Е. И. Ляшенко, А. Г. Мордкович, Г. И. Саранцев и др.).

Для решения поставленных задач использовались **методы исследования:**

– теоретические: анализ и обобщение философской, психолого-педагогической, математической, научно-методической литературы по проблеме исследования; изучение и обобщение педагогического опыта по проблеме организации учебного процесса в старших классах общеобразовательной школы;

– эмпирические: наблюдение за ходом учебного процесса в старших классах общеобразовательной школы; анкетирование, тестирование, опросы, беседы с учителями и учащимися; организация и проведение педагогического эксперимента; статистическая обработка результатов педагогического эксперимента.

**Научная новизна исследования** состоит в том, что впервые:

– выявлены методические условия, обеспечивающие становление различных аспектов смысла математических понятий у учащихся;

– раскрыто содержание структурно-предметного аспекта смысла понятий «логарифмическая функция» и «показательная функция». Показано, что важнейшей составляющей данного аспекта смысла яв-

ляется операционный (арифметический) смысл. Установлено влияние выявления различных аспектов смысла математических понятий учащимися на качество усвоения данных понятий;

– установлены взаимосвязи между различными аспектами смысла этих понятий и их влияние на развитие понятийного мышления учащихся.

#### **Теоретическая значимость исследования:**

– выделены качества знаний, способствующие постижению различных аспектов смысла математического понятия, факта, явления;

– установлены дидактические особенности диалога, направленного на понимающее усвоение учащимися учебного материала;

– выявлены, теоретически обоснованы и конкретизированы методические условия становления различных аспектов смысла математических понятий у старшеклассников на материале темы «Логарифмическая и показательная функции»: структурирование учебного материала темы на основе выбора в качестве образовательного объекта понятия «натуральная логарифмическая функция»; использование информационно-коммуникационных технологий для представления и осознания нового вида соответствия между числовыми множествами, описываемого с помощью натуральной логарифмической функции; сочетание различных форм представления содержания математических понятий для постижения различных аспектов смысла основных понятий темы с их последующей интеграцией, приводящей к целостному восприятию учебного материала; применение специальным образом организованного диалога как инструмента понимающего усвоения.

**Практическая значимость исследования** определяется тем, что в нем разработаны учебные материалы (задачи и задания к ним, лабораторная работа по выявлению учащимися структурно-предметного аспекта смысла понятия «натуральная логарифмическая функция», самостоятельные и контрольные работы); примеры диалогового построения обучения, направленного на становление различных аспектов смысла математических понятий и включение их в личностный опыт учащихся при изучении темы «Логарифмическая и показательная функции». Эти материалы могут быть использованы при составлении учебных и методических пособий по математике как для классов с углубленным изучением математики, так и для общеобразовательных классов.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Качества знаний, такие как глубина, гибкость, систематичность, системность и осознанность, способствуют постижению смысла математического понятия, так как позволяют установить содержательные связи в изучаемом материале.

2. Дидактическими особенностями диалога, направленного на понимающее усвоение учащимися учебного материала по математике являются:

– преобразование материала в крупные смысловые блоки, чтобы учащимся предоставлялась возможность целостно воспринимать предлагаемый учебный материал и раскрывать различные аспекты смысла понятия и его значения путем установления содержательных связей;

– наличие вопросов, направленных на выявление смысловых аспектов понятия, его значения. Серия таких вопросов нами разработана;

– организация условий для развития математической речи учащихся, в том числе с учетом особенностей смысловой структуры определений понятий, знания законов образования математических терминов, синтаксиса и семантики математического языка;

– включение вопросов на рефлексию, в частности, вопросов на обоснование изучения нового понятия, выбора способа решения задачи.

3. Методические условия, обеспечивающие становление различных аспектов смысла математических понятий у старшеклассников на материале темы «Логарифмическая и показательная функции»:

– структурирование учебного материала темы на основе выбора в качестве образовательного объекта понятия «натуральная логарифмическая функция»;

– использование информационно-коммуникационных технологий для представления и осознания нового вида соответствия между числовыми множествами, описываемого с помощью натуральной логарифмической функции;

– сочетание различных форм представления содержания математических понятий для постижения различных аспектов смысла основных понятий темы с их последующей интеграцией, приводящей к целостному восприятию учебного материала;

– применение специальным образом организованного диалога как инструмента понимающего усвоения.

**Достоверность и обоснованность** результатов исследования обеспечиваются: исходными методологическими позициями, корректным использованием качественных и количественных методов исследования адекватных предмету, объекту, цели и задачам.

**База исследования:** Алтайский краевой педагогический лицей (АКПЛ) и гимназии № 85, № 123 г. Барнаула.

Исследование проводилось с 2001 по 2006 гг. и включало три этапа.

На первом этапе (2001–2002) осуществлялся анализ научной литературы по проблеме исследования, происходило определение методологических основ исследования. В результате были разработаны

основные теоретические полжения исследования. Был проведен констатирующий эксперимент.

На *втором этапе* (2002–2005) в условиях формирующего эксперимента была уточнена и проверена гипотеза исследования. Разработанная методика, направленная на становление различных аспектов смысла математических понятий у старшеклассников при изучении темы «Логарифмическая и показательная функции», была скорректирована с учетом результатов опытно-экспериментальной работы.

На *третьем этапе* (2005–2006) был проведен контрольный эксперимент. Исследование было оформлено в форме диссертационной работы.

**Апробация и внедрение результатов** исследования. Основные положения и результаты диссертационного исследования докладывались на международных научно-практических конференциях: «Герценовские чтения» (Санкт-Петербург, 2004, 2005, 2006), «Развивающее образование XXI века» (Горно-Алтайск, 2004), на всероссийских научно-практических конференциях: «Психодидактика высшего и среднего образования» (Барнаул, 2004), «Актуальные проблемы разноуровневого обучения математике в средней общеобразовательной школе» (Барнаул, 2003), на VII Всероссийской конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Наука и образование» (Томск, 2003), на XXIV Всероссийском семинаре преподавателей математики университетов и педагогических вузов «Современные проблемы школьного и вузовского математического образования» (Саратов, 2005), на XXV Всероссийском семинаре преподавателей математики университетов и педагогических вузов «Проблемы подготовки учителя математики к преподаванию в профильных классах» (Киров, 2006), на Межрегиональной конференции «Математическое образование на Алтае» (Барнаул, 2002).

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, библиографического списка использованной литературы (173 наименования) и 12 приложений.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность исследования; представлен исследовательский аппарат, раскрыты научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, сформулированы положения, выносимые на защиту.

Первая глава «**Теоретические основы организации учебного процесса, обеспечивающего понимающее усвоение математики**» посвящена анализу понятий «смысл» и «значение» как компонентов математического знания; дидактическому анализу категории «пнима-

ние»; рассмотрено, как становление различных аспектов смысла математических понятий способствует развитию теоретического мышления старшеклассников.

В рамках лично ориентированной образовательной парадигмы особую актуальность приобретает построение учащимися научной личностной картины мира. Чтобы знание вошло в активный опыт личности, стало действенным, необходимо, чтобы обучение воздействовало на смысловую сферу личности.

Смысл – одно из наиболее сложных понятий. В своем многоплановом использовании он всегда несет сущностно значимую характеристику, выделяемую субъектом суть явления, слова, переживания, главное в его отношении к действительности.

Смыслы и смысловые механизмы присутствуют почти во всех подструктурах сознания. Смысл является организующим звеном непрерывного мыслительного потока, реализующего отношение к явлениям действительности. Он интегрирует сознательное и разумное отношение к действительности.

Категория смысла неразрывно связана с категорией значения. А. А. Леонтьев выделяет три формы существования значения: языковое, предметное и ролевое. Языковое значение в методике обучения математике играет большую роль. Особенностью математики является широкое употребление символического языка. Математика изучает мир с точки зрения моделей. В ней используются главным образом идеальные модели: знаково-символические (формулы, уравнения и т. д.) и образные (рисунки, чертежи, графики и т. д.). В процессе формирования абстрактных математических понятий происходит усвоение предметного значения. Понятие, усвоенное человеком, становится образом, но образом особым: абстрактным и обобщенным.

Значение – это не что иное, как признаки предмета и слова, обозначающие выделенные в практике объективные свойства предмета, понятия и образы. Смысл характеризует не предмет сам по себе, а что он несет личности, то есть личностное принятие предмета, его свойств, его функционального содержания и назначения. Важным для нашего исследования является вывод психологов о том, что значение связано с операционной структурой деятельности, смысл – с актом деятельности в целом.

Усвоение знания, в том числе математического, обязательно связано с постижением его смысла и значения. В работе нами выделены качества знаний, которые способствуют постижению смысла математического понятия, факта, явления. К ним мы отнесли: глубину, гибкость, систематичность, системность и осознанность. Наш выбор обосновывается следующим. Установление связей между элементами знания является важнейшим условием процесса понимания, так как

предполагает умения выделить смысловые элементы нового и связать их с уже имеющимися знаниями. Содержательные связи раскрывают сущность содержания математического понятия, его смысл, значение, обогащают личностный опыт учащегося. Установлению содержательных связей способствуют выделенные нами качества знаний. Глубина, систематичность, системность и осознанность содействуют целостному восприятию учебного материала – одному из необходимых условий понимающего усвоения.

В последнее время обучение рассматривается многими учеными (Е. Ю. Артемьева, Д. А. Леонтьев, В. П. Зинченко) как процесс, связанный с поиском и присвоением смыслов. Смысл – продукт процесса понимания. Человек понимающий – это человек, обладающий личностно значимым, «живым знанием» (В. П. Зинченко), человек думающий.

Постижение смысла явления или процесса теснейшим образом связано с проявлением человеческой активности, с деятельностью. Некоторые психологи (А. Г. Асмолов, Б. С. Братусь, В. П. Зинченко, Д. А. Леонтьев, А. С. Сухоруков и др.) выделяют две формы (предметная и смысловая) регуляции деятельности, которые соотносятся с двумя фундаментальными характеристиками деятельности: предметностью и осмысленностью (В. П. Зинченко) или предметностью и субъектностью (А. Г. Асмолов). Обе формы регуляции деятельности тесно связаны, возможны их взаимные трансформации, но именно смысловая регуляция деятельности соединяет отдельные действия в целостную деятельность. Предметная деятельность имеет своим системообразующим фактором значение.

В предметно-понятийной деятельности находит свое отражение «знаниевый» подход к обучению. Данная деятельность является необходимым компонентом учебной деятельности; но она оказывает недостаточное влияние на смысловую сферу личности и на развитие личности; ей свойственна ограниченность в выявлении *сути явления*, его взаимосвязей. В связи с высоким теоретическим уровнем содержания курса математики и абстрактностью основных его понятий особую актуальность при обучении математике приобретает смысловая регуляция деятельности. Цель смысловой составляющей деятельности в предметной области «математика» – постижение смысла изученного и включения его в личностный образовательный опыт учащегося.

Проанализировав различные точки зрения философов, психологов и педагогов по поводу категорий «смысл», мы выбрали для обеспечения понимающего усвоения математики установленные Э. К. Брейтингам три аспекта. Первый – логико-семiotический, в соответствии с которым «смысл» есть содержание знакового выражения. Второй структурно-предметный: «смысл» – система содержательных связей элемен-

тов структуры, позволяющая соотнести содержание каждого отдельного свойства с целостностью. Постигание смысла связано с выявлением основной идеи понятия и установлением существенных (содержательных) связей между ними. Третий – личностный, отражающий субъективно устанавливаемые и личностно переживаемые связи между людьми, предметами и явлениями, окружающими человека в пространстве и времени, в частности, при изучении математики.

Постигание различных аспектов смысла математического понятия является необходимым условием его понимающего усвоения. Психологическая сущность понимания, согласно М. М. Бахтину, состоит в превращении чужого, например слова, в «свое-чужое».

В. П. Зинченко выделяет три вида понимания: естественное (предполагает извлечение смысла из ситуации); культурное (предполагает наряду с извлечением смысла из ситуации его знаковое оформление, означение и возможность трансляции); творческое (со всем перечисленным выше предполагает порождение и оформление нового смысла). При этом он отмечает, что выделенные виды понимания оперируют разными языками: естественное – предметными и операциональными значениями; культурное – знаками, вербальными значениями и понятиями; творческое – смыслами. На уровне естественного понимания ученик усваивает сущность математического понятия, факта, явления, т. е. постигает значение и не в полной мере структурно-предметный аспект смысла данного понятия. На уровне культурного понимания вместе с усвоением сущности математического понятия происходит раскрытие смысла, стоящего за его обозначением, т. е. постижение логико-семантического аспекта смысла понятия и более глубокое раскрытие структурно-предметного аспекта. На данном уровне учащиеся свободно осуществляют переход от символической записи к графической или вербальной и обратно, выбирают наиболее подходящую форму представления математического понятия в каждой конкретной ситуации. Порождение новых смыслов начинается на уровне творческого понимания, когда ученик самостоятельно использует усвоенные ранее знания в нестандартных ситуациях, таких как самостоятельное проведение доказательств теорем, решение сложных нетривиальных задач и т. п. Данный уровень предполагает овладение разнообразными методами решения задач и приемами поиска их решения.

Таким образом, при обучении математике процесс понимания тесно переплетен с постижением различных аспектов смысла математического понятия, его значения и их знаковым оформлением.

Анализ исследований по проблемам понимающего усвоения математики показал, что для организации последнего у учащихся должно быть соответствующим образом развито теоретическое мышление.

Развитое теоретическое мышление дает возможность старшеклассникам целостно воспринимать предлагаемый учебный материал и постигать структурно-предметный аспект смысла понятия, факта, явления.

На данный момент имеются теории и методики, способствующие становлению и развитию теоретического мышления младших школьников и учащихся среднего звена. В отношении же старшеклассников эта проблема остается актуальной и в наши дни. Методические подходы, которые имели место в младшей и основной школах, не могут быть использованы в неизменном виде в процессе обучения старшеклассников.

Как показывают исследования психологов, овладение старшеклассниками абстрактными и теоретическими знаниями приводит к изменению у них течения мыслительного процесса. Мыслительная деятельность отличается высоким уровнем обобщения и абстракции, учащиеся стремятся к установлению причинно-следственных связей и других закономерностей между явлениями окружающего мира, проявляют критичность мышления, умение аргументировать суждение, более успешно осуществляют перенос знаний и умений из одной ситуации в другую. В ходе усвоения учебного материала старшеклассники стремятся самостоятельно раскрывать отношения общего и конкретного, выделять существенное, а затем формулировать определения научных понятий.

Все сказанное говорит о высокой степени готовности старшеклассников к развитию их теоретического мышления. Но достижение этого в практике обучения возможно лишь при соответствующей организации учебного процесса, использовании методического инструментария, способствующего формированию теоретического мышления старшеклассников.

В главе выделены и теоретически обоснованы факторы, способствующие развитию теоретического мышления старшеклассников: явное осознание учителем и учащимися направленности учебной деятельности на развитие теоретического мышления позволяет сформировать такие структурные компоненты учебной деятельности, как мотив и рефлексия, которые являются определяющими в становлении смысла понятий и смысловой регуляции учебной деятельности; генетическое структурирование учебного материала создает условия для целостного восприятия учебного материала старшеклассниками, что, в свою очередь, способствует формированию теоретического мышления учащихся.

Во второй главе **«Методические основы становления различных аспектов смысла математических понятий у старшеклассников при изучении темы «Логарифмическая и показательная функции»»** раскрыты: методические условия становления различных аспектов смысла основных понятий темы «Логарифмическая и показательная функции» у старшеклассников; методика изучения данной темы, ориентированная на понимающее усвоение учащимися учебного материала; описаны три этапа опытно-экспериментальной работы.

К методическим условиям становления различных аспектов смысла математических понятий у старшеклассников при изучении темы «Логарифмическая и показательная функции» мы отнесли:

– структурирование учебного материала темы на основе выбора в качестве образовательного объекта понятия «натуральная логарифмическая функция». Такое структурирование позволит учащимся понять, что любая логарифмическая функция отличается от натуральной логарифмической функции числовым множителем, от знака которого зависят такие свойства, как возрастание – убывание, выпуклость – вогнутость, поведение функции на «концах» области определения. Операционные свойства для всех логарифмических функций одинаковы:  $f(xy)=f(x)+f(y)$  (\*). Единственной функцией, определенной и непрерывной на интервале  $(0; +\infty)$  и удовлетворяющей функциональному уравнению (\*) является логарифмическая функция. В этом заключается ее операционный смысл;

– использование информационно-коммуникационных технологий дает возможность наглядно-образного представления функционального соответствия  $y=\ln x$ , вычисления его значения в любой точке области определения и геометрического представления этого значения (связь структурно-предметного аспекта смысла и значения понятия «натуральная логарифмическая функция»);

– использование различных форм представления значения натуральной логарифмической функции (в виде определенного интеграла, площади подграфика гиперболы  $y = \frac{1}{x}$ , точки на построенном в ходе выполнения лабораторной работы с помощью компьютера графике функции  $y=\ln x$ , в виде числового значения, вычисляемого с заданной степенью точности программой на компьютере, наконец, символическая запись) позволяет раскрыть связь значения со структурно-предметным и логико-семиотическим аспектами смысла данного понятия;

– применение специальным образом организованного диалога, особенно на этапах мотивации введения понятия и рефлексии его усвоения, которые являются наиболее значимыми в становлении смысла понятия, позволяет обобщить все формы представления, включая традиционную, и установить взаимосвязи между различными аспектами смысла и значения понятия.

Содержание темы «Логарифмическая и показательная функции» нами строится по генетическому принципу. Основным системообразующим понятием при таком построении учебного материала является понятие натуральной логарифмической функции, а не понятие логарифма как при традиционном структурировании учебного материала. Наш выбор образовательного объекта темы обусловлен следующими

причинами: расширением возможностей реализации функционального подхода; «простой» системой обозначений и возможностью геометрического, наглядного истолкования значений; возможностью представления и изучения всех свойств логарифмической функции по произвольному основанию в сравнении с натуральной логарифмической функцией; наличием всех основных характеристических свойств функций данного класса; широкой применимости этого вида функции по сравнению с логарифмическими функциями по любому другому основанию.

Генетическое структурирование дает возможность учащимся выйти на новый уровень усвоения материала. Вынесение в начало обучения системообразующего понятия «натуральная логарифмическая функция» способствует целостному восприятию учебного материала, т. к. позволяет получить все остальные понятия темы и привести их в систему. Формирующееся в результате обобщенное знание становится средством для решения практических и теоретических задач по предмету.

Изучение логарифмической и показательной функций в классах с повышенным и базовым уровнем математической подготовки начинаем с рассмотрения натуральной логарифмической функции. Ее введение мы строим с использованием интеграла сразу же после рассмотрения темы «Определенный интеграл и его приложения». Такой подход позволяет сохранить целостность всего курса алгебры и начал анализа и установить внутренние взаимосвязи между отдельными темами.

Для визуализации и постижения структурно-предметного и логико-семиотического аспектов смысла понятия «натуральная логарифмическая функция» мы используем информационно-коммуникационные технологии. Введение натуральной логарифмической функции мы строим с использованием интеграла с переменным верхним пределом при решении задач о нахождении площадей криволинейных трапеций. Учащимся предлагается решить следующую задачу. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, графиком гиперболы  $y = \frac{1}{t}$ , прямыми  $t=1$  и  $t=b$ , где  $b \in (0, +\infty)$ . Решение данной

задачи предполагает использование компьютерной программы, которая при заданном значении  $b$  строит соответствующую криволинейную трапецию и вычисляет ее площадь. Такой подход к введению понятия «натуральная логарифмическая функция» дает возможность на наглядном уровне показать учащимся закон соответствия между числовыми множествами, описываемого с помощью данной функции: числу ставится в соответствие площадь фигуры под гиперболой. Понимание закона соответствия, описываемого с помощью натуральной

логарифмической функции, свидетельствует о становлении структурно-предметного аспекта смысла данного понятия.

Логарифмическая функция по произвольному основанию определяется в данном методическом подходе через натуральную логарифмическую функцию как функция  $y = \frac{\ln x}{\ln a}$  при  $a > 0, a \neq 1$  и обозна-

чается  $y = \log_a x$ . Такое введение способствует становлению логико-семиотического аспекта смысла данного понятия. Определение логарифмической функции по произвольному основанию через натуральную логарифмическую позволяет учащимся в дальнейшем не запоминать формально формулу перехода от одного основания к другому

( $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$  ( $a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, c \neq 1$ )), а свободно оперировать ею при решении задач. Осмысленное применение формулы перехода от одного основания к другому является одним из критериев постижения логико-семиотического аспекта смысла понятия «логарифмическая функция по произвольному основанию».

Структурно-предметный аспект смысла понятия «логарифмическая функция по произвольному основанию» состоит в идентичности свойств данной функции со свойствами натуральной логарифмической функции. Данная особенность позволяет сформировать общий целостный взгляд на класс логарифмических функций. В структурно-предметном аспекте смысла понятия «логарифмическая функция» мы считаем целесообразным выделить ее операционный (арифметический) смысл.

Структурно-предметный аспект смысла понятия «показательная функция» состоит в том, что это функция обратная к логарифмической. В структурно-предметном аспекте смысла понятия «показательная функция» мы также выделяем ее операционный (арифметический) смысл.

В работе приведены задачи, примеры диалогов, направленные на постижение различных аспектов смысла данных понятий; описана лабораторная работа (с использованием информационно-коммуникационных технологий), одной из целей которой является визуализация и постижение структурно-предметного и логико-семиотического аспектов смысла понятия «натуральная логарифмическая функция».

Пытливо-экспериментальная работа осуществлялась нами в три этапа.

На первом – *этапе констатирующего эксперимента* (2001–2002 гг.) – была поставлена цель: накопление материала для дальнейшего теоретического осмысления, формулирование гипотезы, выделение целей и задач исследования, выбор путей решения проблемы, обобщение имеющихся сведений об уровне усвоения основных поня-

тий темы «Логарифмическая и показательная функции» и выяснение трудностей, возникающих у учащихся при изучении данной темы; выявление уровня развития понятийного мышления старшеклассников.

Базой опытно-экспериментальной работы, которая начата в 2001 году, был избран Алтайский краевой педагогический лицей (АКПЛ) – лаборатория исследования и гимназии № 85, № 123, г. Барнаула.

Второй этап – *формирующий эксперимент* – начался с 2002 года и продолжался по 2005 год. Основная цель формирующего эксперимента – проверка гипотезы исследования; практическое внедрение методики по становлению у старшеклассников различных аспектов смысла математических понятий с учетом выявленных методических условий на материале темы «Логарифмическая и показательная функции».

На третьем – *контрольном* – этапе (2005 – 2006 гг.) опытно-экспериментальной работы эффективность разработанной методики проверялась по результатам контрольного среза знаний (одинадцатые классы). Отслеживалось влияние выявленных методических условий на понимающее усвоение учащимися учебного материала. Кроме того, мы использовали также результаты Единого государственного экзамена (ЕГЭ).

Усвоение основных понятий темы «Логарифмическая и показательная функции» проверялось итоговой контрольной работой в 11 классе (данные приведены по 239 учащимся). Такая выборка связана с подбором примерно одинаковых групп учащихся по исходным данным (до изучения данной темы) (см. табл.).

Таблица

**Итоги Единого государственного экзамена  
(по задачам темы «Логарифмическая и показательная функции»)**

экспериментальные классы	гуманитарные классы	математические классы	контрольные классы	гуманитарные классы	математические классы
количество учащихся	52	69	количество учащихся	51	67
средний балл выполнения	4,90	6,39	средний балл выполнения	4,21	5,49
процент выполнения	68,54	84,47	процент выполнения	51,12	74,84

В заключении обобщены результаты исследования.

Обобщая результаты теоретической части и опытно-экспериментальной работы, нами сделаны следующие **основные выводы**:

1. В результате анализа математического знания выявлено, что категории «смысл» и «значение» являются его важными компонентами. В обучении математике трактовка понятия «смысл» включает три аспекта: логико-семiotический, структурно-предметный и личностный. Усвоение математического понятия или явления учащимися связано с постижением различных аспектов смысла и значения.

В работе раскрыта дидактическая составляющая категории «понимание». В силу абстрактности математического знания, использования символического языка понимание является важным центром образовательного процесса. На основе анализа категории «понимание», исследований по проблемам осознанного и понимающего усвоения математики понимающее усвоение математике рассматривается нами как постижение учащимися смысла и значения математических понятий или явлений, включение их в личностный опыт; целостное восприятие учебного материала.

2. Выделены качества знаний, способствующие постижению смысла математического понятия. К ним мы отнесли: глубину, гибкость, систематичность, системность и осознанность. Данные качества позволяют установить содержательные связи в изучаемом материале, т. е. необходимы для раскрытия сущности содержания математического понятия, его смысла и значения.

3. Становление различных аспектов смысла математических понятий способствует развитию теоретического мышления учащихся. Постигание различных аспектов смысла математического понятия и их последующая интеграция ведет к целостному восприятию данного понятия. В результате обобщенное знание о понятии становится средством для решения учащимися практических и теоретических задач.

4. Фактор явного осознания учителем и учащимися направленности учебной деятельности на развитие теоретического мышления позволяет сформировать структурные компоненты учебной деятельности, в частности, мотив и рефлексии, которые в большей степени направлены на становление смысла понятий и на смысловую регуляцию учебной деятельности.

В работе обосновано, что генетическое структурирование содержания учебного материала способствует формированию теоретического мышления учащихся. Генетическое структурирование материала – это путь к целостному знанию, что является необходимым условием понимающего усвоения.

5. В процессе исследования доказано, что методическими условиями, направленными на становление различных аспектов смысла математических понятий у старшеклассников на материале темы «Логарифмическая и показательная функции», являются: структурирование учебного материала темы на основе выбора в качестве образовательного объекта понятия «натуральная логарифмическая функция»; использование информационно-коммуникационных технологий для представления и осознания нового вида соответствия между числовыми множествами, описываемого с помощью натуральной логарифмической функции; сочетание различных форм представления содержания математических понятий для постижения различных аспектов смысла основных понятий темы с их последующей интеграцией, приводящей к целостному восприятию учебного материала; применение специальным образом организованного диалога как инструмента понимающего усвоения.

6. Разработана методика изучения темы «Логарифмическая и показательная функции», ориентированная на понимающее усвоение старшеклассниками учебного материала с учетом выявленных методических условий. Эффективность предлагаемой методики доказана как повышением качества усвоения учебного материала, так и влиянием выявленных методических условий на понимающее усвоение учащимися учебного материала.

Таким образом, в ходе теоретико-экспериментального исследования были решены поставленные задачи и подтверждена выдвинутая гипотеза.

Дальнейшее исследование, на наш взгляд, должно быть связано с разработкой других частных методик, направленных на понимающее усвоение старшеклассниками учебного материала курса алгебры и начал анализа.

**Основное содержание диссертации отражено в следующих публикациях:**

1. *Борисова, И. Г.* (Попова, И. Г.) Методика введения логарифмической и показательной функций в классах физико-математического профиля [Текст] / И. Г. Борисова (И. Г. Попова) // Вестник БГПУ: психолого-педагогические науки. Вып. 3. – Барнаул: Изд-во БГПУ, 2003. – С. 62 – 64.

2. *Борисова, И. Г.* (Попова, И. Г.) О некоторых технологических приемах организации «пнимающего усвоения» [Текст] / И. Г. Борисова (И. Г. Попова) // Актуальные проблемы разноуровневого обучения математике в средней общеобразовательной школе: материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Барнаул: Изд-во БГПУ, 2003. – С. 30 – 31.

3. *Попова, И. Г.* К раскрытию значения и смысла логарифмической и показательной функций [Текст] / И. Г. Попова // Проблемы теории и практики обучения математике: сб. науч. раб., представленных на международную научную конференцию «57-е Герценовские чтения»; под ред. В. В. Орлова. – СПб: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2004. – С. 160 – 161.

4. *Попова, И. Г.* О некоторых составляющих «понимающего усвоения» [Текст] / И. Г. Попова // Психодидактика высшего и среднего образования: материалы пятой Всероссийской научно-практической конференции. – Барнаул, 2004. – С. 116 – 118.

5. *Попова, И. Г.* О видах деятельности, способствующих развитию личности в процессе обучения математическим понятиям [Текст] / И. Г. Попова, Т. В. Ломанчук // Наука, культура, образование: Международный научно-образовательный журнал. – Париж; Горно-Алтайск, 2004. – № 15 / 16. – С. 199 – 200. (авт. – 50 %).

6. *Попова, И. Г.* Некоторые связи смысла, понимания и мышления [Текст] / И. Г. Попова // Проблемы теории и практики обучения математике: сб. науч. раб., представленных на международную научную конференцию «58-е Герценовские чтения»; под ред. В. В. Орлова. – СПб: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2005. – С. 101 – 102.

7. *Попова, И. Г.* Понимающее усвоение понятия «натуральная логарифмическая функция» [Текст] / И. Г. Попова // Современные проблемы школьного и вузовского математического образования: тез. докл. XXIV Всерос. семинара преподавателей математики ун-тов и педвузов; под ред. А. Г. Мордковича, И. К. Кондауровой. – М.; Саратов: Ред.-изд. отдел Моск. гор. пед. ун-та; Изд-во Саратов. ун-та, 2005. – С. 220 – 221.

8. *Попова, И. Г.* Об особенностях теоретического мышления старшеклассников [Текст] / И. Г. Попова, Т. В. Гринева // Педагогический университетский вестник Алтай: материалы электронного журнала. – Барнаул: Изд-во БГПУ, 2005. – № 1(3). – С. 168 – 178. (авт. – 50 %).

9. *Попова, И. Г.* Дидактические особенности диалога как образовательной технологии личностно ориентированного обучения [Текст] / И. Г. Попова // Проблемы подготовки учителя математики к преподаванию в профильных классах: материалы XXV Всерос. семинара преподавателей математики ун-тов и педвузов. – Киров; М.: ВятГГУ, МГПУ, 2006. – С. 268.

10. *Попова, И. Г.* Исследование функций, связанных с логарифмической и показательной, построение графиков этих функций с применением производной: методическое пособие [Текст] / И. Г. Попова. – Барнаул: Изд-во Алтайская правда, 2006. – 36 с.

11. *Попова, И. Г.* О некоторых критериях осознанного усвоения материала [Текст] / И. Г. Попова // Проблемы теории и практики обучения математике: сб. науч. раб., представленных на международную научную конференцию «59-е Герценовские чтения»; под ред. В. В. Орлова. – СПб: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2006. – С. 143 – 144.

12. *Попова, И. Г.* Становление различных аспектов смысла понятия «натуральная логарифмическая функция» [Текст] / И. Г. Попова // Вестник Томского государственного педагогического университета. Вып. 3 (54). Серия Педагогика (Теория и методика обучения) – Томск: Изд-во ТГПУ, 2006. – С. 32 – 36.

Лицензия ЛР № 020074

Подписано в печать 06.12.06

Бумага офсетная

Усл. печ. л. 1,48

Тираж 100 экз.

Формат 60×84/16

Ризография

Уч. изд. л. 1,3

Заказ Уа-282-06

---

Издательство ОмГПУ: 644099, Омск, наб. Тухачевского, 14