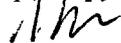


На правах рукописи



Евдокимова Лариса Владимировна

**ФОРМИРОВАНИЕ КОМБИНАТОРНОГО МЫШЛЕНИЯ У
МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ И ПОДРОСТКОВ**

Специальность 19.00.13 – Психология развития, акмеология
(психологические науки)

**Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата психологических наук**

Москва – 2006

Работа выполнена на кафедре возрастной психологии факультета психологии
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Научный руководитель -	кандидат психологических наук, доцент Бурменская Галина Васильевна
Официальные оппоненты -	доктор психологических наук, профессор Хозиев Вадим Борисович,
	кандидат педагогических наук, доцент Володарская Инна Андреевна
Ведущая организация -	Психологический институт Российской академии образования

Защита состоится «__»_____ 2006 г. в ___ часов на заседании
диссертационного совета Д 501.001.95 факультета психологии МГУ им.
М.В.Ломоносова по адресу: 125009, Москва, ул. Моховая, дом 11, корпус 5,
аудитория 310.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке МГУ им.
М.В.Ломоносова.

Автореферат разослан «__»_____ 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор психологических наук, доцент

Карabanова О.А.

2006 А
10/58

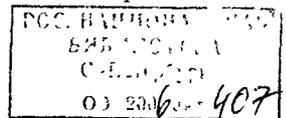
ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Работа посвящена изучению становления комбинаторного мышления у младших школьников и подростков в условиях стихийного развития и школьного обучения, а также в ходе целенаправленного формирования.

Актуальность темы исследования определяется важностью комбинаторных способов рассуждения в общей структуре научного мышления, а также крайне низкой успешностью овладения ими не только в условиях стихийной практики, но и в рамках школьного обучения. Между тем в современном обществе требования к уровню комбинаторно-вероятностного мышления учащихся существенно повышаются. Официальным признанием этого обстоятельства стало постановление Министерства образования Российской Федерации (от 23.09.2003) о планировании с 2006 года обязательного введения в программу общеобразовательной школы по математике раздела «Комбинаторика, статистика и теория вероятностей». Таким образом, классическая проблема психологии о соотношении обучения и развития (Л.С. Выготский, Д.Б. Эльконин, П.Я. Гальперин, В.В. Давыдов и др.) встает с особой остротой применительно к усвоению детьми такого сложного класса понятий, как понятия математической комбинаторики.

Известно, что попытки включения данного раздела в школьный курс математики в нашей стране неоднократно предпринимались, но не вели к успеху. Анализируя причины неудач, математики и педагоги (Е.А. Бунимович, Л.О. Бычкова, О.С. Медведева, В.Д. Селотин, А.П. Шихова и др.) столкнулись с парадоксальной ситуацией: оказалось, что в *начальной* школе вводить комбинаторно-вероятностные понятия *рано*, так как большинству младших школьников еще недостает необходимой «логической зрелости», а также математического аппарата для описания комбинаторно-вероятностных представлений, но в *старших классах* – вводить их уже *поздно*, поскольку к фактически той же логической неготовности добавляется характерная для преподавания математики в этом возрасте формализация знаний (опора на предъявление и освоение материала в виде формул), которая серьезно препятствует подлинному освоению указанных понятий.

Но не только обучение, но и само *развитие комбинаторного мышления* – закономерности и логико-психологические основания его становления у детей и подростков – исследованы в психологии крайне слабо. Хотя обстоятельное изучение формирования комбинаторных структур мышления было начато в достаточно давних работах школы Ж. Пиаже (50-70-е годы прошлого века), в отечественной психологии данная проблематика, по сути, выпала из поля зрения исследователей. В современной психологической литературе она лишь «по касательной» затрагивается в работах



отдельных авторов (В.В. Давыдов, А.Н.Поддьяков, Ю.А. Полуянов, E. Fischbein, D.Schnarch, O. Huber и др.).

Таким образом, явно недостаточная изученность комбинаторного мышления, знание которого необходимо для организации эффективного обучения математике, диктуют как теоретическую, так и практическую **актуальность** данной проблематики.

Объектом исследования стало интеллектуальное развитие учащихся начального и среднего звена школы.

В качестве **предмета исследования** выступило становление комбинаторного мышления у детей младшего школьного возраста и подростков.

Целью данного исследования стало определение психологических условий формирования понятий комбинаторного мышления и разработка программы обучения учащихся средней школы обобщенному способу решения задач на основные типы комбинаторных соединений (сочетания, размещения, перестановки).

В качестве **гипотез исследования** были выдвинуты следующие предположения:

1. Развитие комбинаторного мышления у детей связано с практическим *опытом* оперирования множествами и зависит от характера *ориентировки* в основных свойствах множества (объем, состав, порядок элементов и др.).

2. Усвоение полноценной ориентировки в свойствах множества и его элементов делает доступными понятия математической комбинаторики не только для подростков, но и для *младших школьников*.

3. Формирование основных типов соединений из области математической комбинаторики (сочетания, размещения, перестановки) служит эффективным средством *развития комбинаторного мышления* детей и подростков.

Цель и гипотезы исследования обусловили постановку следующих **задач**:

1) теоретический анализ проблемы обучения и развития применительно к становлению понятий комбинаторного мышления у детей и подростков;

2) анализ трудностей усвоения детьми комбинаторных представлений при традиционном обучении математике в школе;

3) оценка уровня развития комбинаторного мышления детей и подростков;

4) выявление содержания полной ориентировочной основы действия учащихся по построению разных типов комбинаторных соединений;

5) разработка и опробование экспериментальной программы обучения решению комбинаторных задач, включающая пропедевтику комбинаторных представлений, в

соответствии с принципами метода поэтапного формирования;

6) экспериментальное формирование обобщенного способа решения комбинаторных задач у младших школьников и подростков с учетом возрастных особенностей процесса;

7) сравнительная оценка эффективности экспериментальной и традиционной программ формирования комбинаторики;

8) прослеживание динамики изменений в комбинаторном мышлении детей и прочности усвоения комбинаторных понятий в отсроченном контрольном эксперименте.

Положения, выносимые на защиту:

1. В условиях стихийной жизненной практики и традиционных форм школьного обучения становление комбинаторного мышления у детей и подростков характеризуется значительными трудностями, медленным темпом, а также ярко выраженной индивидуальной вариативностью, при которой комбинаторные представления значительной части подростков сохраняются на уровне младшего школьного и даже дошкольного возраста.

2. Для успешного освоения логических предпосылок комбинаторного мышления детям требуется адекватный предметно-практический *опыт* оперирования множествами (составление различных множеств с учетом свойств их элементов и соотнесение с подмножествами). Поскольку стихийная жизненная практика и традиционные формы школьного обучения обычно не обеспечивают такого рода опыта, требуется специальная *пропедевтика*, в ходе которой дети могут приобрести опыт реального предметно-практического, а не только словесно-знакового действия с множествами (на основе формул).

3. Необходимым психологическим условием развития комбинаторного мышления у детей и подростков выступает *ориентировка* на такие свойства множества и его подмножеств, как объем, а также состав, порядок и повторяемость элементов.

4. Ориентировочная основа для трех типов комбинаторных соединений (сочетания, размещения, перестановки) должна строиться как *единая, целостная система*, наглядно раскрывающая *связи* между разными типами соединений, в отличие от их раздельного представления, общепринятого в существующих программах преподавания комбинаторики. Раскрывая генетически исходные отношения, такая ориентировка делает доступным освоение *обобщенного способа* решения комбинаторных задач, обеспечивает осознанность и системность комбинаторных понятий.

5. Экспериментальная программа пропедевтики и обучения понятиям

математической комбинаторики, построенная на основе метода поэтапного формирования умственных действий, обеспечивает полноценное их усвоение учащимися не только подросткового, но и *младшего школьного возраста*, независимо от уровня их успеваемости.

6. Пропедевтика и поэтапное формирование основных типов соединений из области математической комбинаторики (сочетания, размещения, перестановки) служат эффективным средством *развития комбинаторного мышления* детей и подростков. В свою очередь комбинаторный способ рассуждений оказывает оптимистическое влияние как на развитие *операционального мышления* учащихся (по критериям Ж.Пиаже), так и на их *общее умственное развитие* (по показателям теста Дж. Равена и др.).

Организация исследования предполагала *три экспериментальных этапа*.

1) *Констатирующий* этап был направлен на определение исходного уровня умственного развития детей, а также анализ трудностей усвоения комбинаторных представлений при традиционном обучении математике в школе.

2) В задачи *формирующего* этапа входило выявление содержания ориентировочной деятельности учащихся при овладении действием по составлению разных типов комбинаторных соединений; построение, опробование и коррекция программы пропедевтики и поэтапного освоения комбинаторных представлений.

3) На этапе *контрольного* эксперимента оценивалось влияние формирующей программы и предваряющей ее пропедевтики на показатели комбинаторного мышления, а также общего умственного развития детей. Специально прослеживалась динамика комбинаторных представлений у подростков в условиях стихийного развития.

Для более полной оценки эффективности экспериментальной программы параллельно ей проводилось обучение комбинаторным понятиям *традиционным* способом (в контрольных группах). *Возрастные* особенности комбинаторного мышления изучались путем сравнения показателей учащихся двух возрастных ступеней – младших школьников и подростков.

Научная новизна работы определяется тем, что впервые исследовано и разносторонне охарактеризовано становление комбинаторного мышления младших школьников и подростков в условиях стихийного развития, школьного обучения, а также в ходе целенаправленного формирования; получена картина развития комбинаторного мышления у современного поколения отечественных школьников, обнаруживающая его весьма значительную индивидуальную вариативность в темпах и достигаемом уровне комбинаторных представлений.

Показано значение адекватного предметно-практического опыта оперирования с множествами для успешного формирования основных комбинаторных понятий и недостаточность стихийной жизненной практики и школьного обучения. Обоснована необходимость специальной предметно-практической пропедевтики комбинаторных понятий. Выявлено содержание ориентировочной основы действий по составлению комбинаторных соединений. Показано, что ориентировка на такие свойства множества, как объем, а также состав, порядок и повторяемость элементов, служит необходимым психологическим условием становления комбинаторного мышления.

На основе метода поэтапного формирования умственных действий и понятий П.Я.Гальперина впервые разработана методика формирования комбинаторных действий, стимулирующая развитие формально-операциональной логики (структур комбинаторного мышления по Ж. Пиаже). Показан ощутимый развивающий эффект, оказываемый усвоением комбинаторных понятий на общее умственное развитие детей и подростков.

Создана оригинальная программа обучения учащихся обобщенному способу решения комбинаторных задач, эффективность которой обусловлена одновременным представлением в единой системе всех трех типов математических соединений (размещений, перестановок, сочетаний). Получены эмпирические данные, убедительно свидетельствующие о целесообразности введения раздела о комбинаторике в программу по математике начальной школы (при условии соответствующего способа ее преподавания).

Теоретическое значение работы определяется тем, что классическая проблема соотношения обучения и развития получила конкретизацию и научное осмысление в отношении крайне мало изученной области мышления. Полученные результаты убедительно продемонстрировали продуктивность применения формирующей стратегии исследования в отношении такого сложного аспекта умственного развития, как комбинаторное мышление. Работа открывает новые перспективы в исследовании онтогенеза мышления, поскольку установленные в ней психологические условия формирования комбинаторных понятий проливают свет на механизмы становления базовых логических структур.

Практическое значение исследования заключается в разработке программы эффективного обучения обобщенному способу решения задач из раздела математической комбинаторики в начальном и среднем звене основной школы. Разработанная методика также может использоваться педагогами-математиками и представителями

психологической службы на дополнительных занятиях в школе в качестве средства развития мышления учащихся, а также для организации психологической помощи (например, для «терапии успехом» слабоуспевающих учеников).

Теоретико-методологическую основу исследования составили: концепция психического развития и возрастно-психологический подход Л.С. Выготского и его последователей, теория поэтапно-планомерного формирования умственных действий и понятий П.Я. Гальперина, теория учебной деятельности и концепция построения учебного предмета Д.Б. Эльконина, В.В. Давыдова и др., а также критерии оценки умственного развития, предложенные Ж. Пиаже и Б. Инельдер.

Методы и методики исследования. Основным методом исследования, в соответствии с принципами которого строилась экспериментальная программа освоения комбинаторных представлений (включая их пропедевтику), служил метод поэтапно-планомерного формирования умственных действий и понятий П.Я. Гальперина. В констатирующем и контрольном экспериментах использовались методики оценки общего умственного развития детей («Прогрессивные матрицы» Дж. Равена, «Дополнение до целого» Д. Гриллс и Г. Уилсон); задания Ж. Пиаже и Б. Инельдер на определение уровня операционального развития детей и комбинаторику, случайность и вероятность с использованием клинического метода; большой набор математических задач из учебно-методических пособий по математике на владение комбинаторно-вероятностными представлениями разного уровня сложности.

Характеристика выборки. В исследовании приняли участие учащиеся 4-х и 8-х классов средней общеобразовательной школы №7 г. Кимовска Тульской области. Общее число детей, участвовавших на разных этапах исследования, – 348 человек (168 мальчиков и 163 девочки). Возраст учеников начальной школы составил 8;5 – 10;8 лет, возраст учащихся среднего звена школы – 10;4 – 16;10 лет.

Достоверность и надежность полученных результатов обеспечивалась научно-методологической обоснованностью исследования, использованием комплекса методов, адекватных его предмету, цели, задачам и гипотезам, репрезентативностью выборки, применением аппарата математической статистики для обоснования достоверности полученных результатов (компьютерная программа SPSS.10 05 for WINDOWS).

Апробация диссертации состоялась на заседании кафедры возрастной психологии МГУ, а также на Всероссийской научно-практической конференции "Актуальные проблемы прикладной психологии" (2006 г., Калуга).

Структура исследования. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Список литературы содержит 143 наименования (из них 13 на иностранных языках). Объем основного текста составляет 192 страницы. Приложения содержат таблицы данных, примеры заданий из формирующего и контрольного экспериментов, а также методические и статистические материалы, не вошедшие в основной текст работы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цель, задачи, гипотезы, определены объект и предмет, указаны методологические основания и методы решения поставленных задач, раскрывается научная новизна и практическая значимость работы, приводятся положения, выносимые на защиту.

В первой главе «Онтогенез представлений о комбинаторике и вероятности» рассматриваются общие закономерности познавательного развития детей, проблема соотношения житейских и научных понятий; представлен краткий обзор исследований становления комбинаторных и вероятностных представлений; проанализированы типичные трудности усвоения комбинаторики при традиционном преподавании математики в школе.

В первом параграфе представлены два основных подхода к проблеме становления научных понятий, идущие от исследований Л.С. Выготского и Ж. Пиаже. На основе изучения онтогенетических стадий развития понятий (синкреты, комплексы и понятия), Л.С. Выготский обосновал необходимость разведения понятий житейских, спонтанных и собственно научных, существенные различия которых проистекают из разных *способов приобретения* – на основе «личного опыта» либо в процессе специального обучения. Л.С. Выготский считал, что в процессе овладения ребенком той или иной школьной дисциплиной происходит сложное *взаимодействие* усваиваемых им научных понятий (осознанных, произвольных и преподаваемых в системе, но часто подверженных *вербализму*) с накопленным базисом житейских представлений, чье главное преимущество состоит в опоре на практический опыт. При этом развивающая роль обучения реализуется через постепенное *взаимопроникновение* двух типов понятий, когда происходит своего рода «подтягивание» житейских представлений до уровня осознанных, произвольных и системных научных. Подход Л.С. Выготского с самого начала нацеливал педагогов не на пассивное ожидание интеллектуальной «готовности» ребенка к усвоению того или иного материала, а на активное «подтягивание» уровня его мышления в ходе самого обучения.

Как известно, Ж. Пиаже (1966) не разделял мнения Л.С. Выготского относительно

ведущей роли обучения в развитии: напротив, главное значение он придавал собственной активности ребенка. Он считал, что обучение может способствовать интеллектуальному развитию только в той мере, в какой оно активизирует познавательные структуры, которыми ребенок *уже* овладел сам, а также создает с помощью специально построенных задач когнитивные конфликты (между уже сформированными представлениями ребенка и только приобретаемыми в ходе самостоятельного поиска и экспериментирования).

Несмотря на недооценку возможностей обучения, операциональная теория Ж.Пиаже представляет существенный интерес: во-первых, с точки зрения анализа логического содержания и характеристики стадий интеллектуального развития, образующих «предысторию» комбинаторных структур, во-вторых, в связи с разработанными им и Б.Инельдер экспериментально-диагностическими заданиями (эти вопросы рассматриваются во втором параграфе первой главы).

Принципиальное значение комбинаторики Ж. Пиаже и Б. Инельдер обосновывали тем, что она предполагает способность субъекта рассматривать и учитывать все возможности и потому лежит в основе всякого логически зрелого рассуждения: «Специфика пропозициональной логики состоит не в том, что она является вербальной логикой, а в том, что она является логикой, учитывающей все возможные, все мыслимые комбинации» (Inhelder, Piaget, 1955). Логическое содержание комбинаторных операций Ж Пиаже и Б Инельдер (1958) характеризовали как «классификацию классификаций», т е операцию второго порядка, относящуюся к стадии формально-операционального мышления.

В специальной серии экспериментов они установили, что способность детей комбинировать факторы и анализировать результаты их взаимодействия возникает в онтогенезе достаточно поздно – лишь в подростковом возрасте (и, разумеется, не у всех, не одновременно на разном материале и с разной степенью успешности). При этом самостоятельно приобретаемые подростками комбинаторно-вероятностные представления часто не обладают нужной степенью четкости и обобщенности (имеет место явление декальжа, т.е. временного запаздывания, в зависимости от сложности материала) и слабо осознаются. Таким образом, хотя сам факт формирования элементарных комбинаторных структур следует расценивать как существенный шаг в развитии логики и в постепенном приближении подростков к научному знанию, однако *вне* специально организованного обучения они сохраняют все ограничения, свойственные житейским представлениям и ярко описанные в классических работах Л.С. Выготского.

Исследования генезиса комбинаторных представлений за рамками подхода Ж Пиаже крайне немногочисленны (S. Kreidler, E. Zigler, 1987; A. Lucca, F. Cristante, 1989; O.

Huber, 1993; E. Fischbein, D. Schnarch, 1997; и ряд др.) Среди работ отечественных психологов наиболее обстоятельно этот вопрос затронут в исследованиях А.Н. Поддьякова (1996, 2000). Полученные им сведения о начальных комбинаторных действиях детей дошкольного возраста проливают свет на наиболее ранние и элементарные формы интеллектуальной деятельности, по сути *прототипические* по отношению к собственно комбинаторным операциям, возникающим на более поздних этапах. Им в частности показано, что уже дошкольники имеют выраженную тенденцию осуществлять комбинированные (т.е. одновременные) действия с объектом: «При экспериментировании с многофакторным объектом они вырабатывают специфические стратегии комбинирования действий (комбинирования факторов) и анализа их взаимодействия. Данные стратегии не являются достаточно обобщенными и логически строгими, но при этом они могут быть весьма эффективны и позволять ребенку успешно исследовать, понимать и использовать объект» (1996). Соглашаясь с автором в том, что специальная организация совместного экспериментирования детей со специально подобранным объектом может стимулировать их понимание многофакторных зависимостей, подчеркнем, что в обычной практике экспериментирование детей с многофакторными объектами носит эпизодический характер и поэтому не оказывает существенного влияния на их комбинаторное мышление.

В третьем параграфе проблема формирования комбинаторных понятий представлена с позиции математиков и педагогов: показано значение комбинаторных понятий в общей структуре математического знания; анализируются взгляды математиков на проблему обучения комбинаторике и историю попыток ее введения в программу средней школы.

Хотя на протяжении 19-20 веков элементы теории вероятности и комбинаторики математики пытались ввести в школьную программу неоднократно, каждый раз эти попытки оканчивались неудачей. Если вначале комбинаторике отводилась вспомогательная роль – роль аппарата для решения вероятностных задач, – то в 70-80-х годах она стала рассматриваться как *самостоятельный раздел* математики. Многие авторы вели поиск эффективных приемов методики обучения элементам комбинаторики: использование графов (Л.Ю. Березина, В.Ф. Волгина и др.), построение задач на основе близкого детям жизненного материала (Е.Е. Белокурова), совершенствование последовательности преподнесения элементов комбинаторики (А.П. Шихова), уделялось внимание популяризации идей комбинаторики (Н.Я. Виленкин, А.Я. Халамайзер).

Характерно, однако, что эти поиски ограничивались рамками сложившихся ранее традиций преподавания математики и велись *без* учета психологических знаний о стадиях интеллектуального развития и принципах развивающего обучения. Только в 90-х гг.

появились отдельные работы, в которых исследовалась роль комбинаторных задач в развитии *мышления* учащихся (О.С. Медведева, Е.Е. Белокурова), но они были ориентированы не на рядовых учащихся, а только на детей, посещающих математический кружок, т.е. обладающих определенными *математическими способностями* и достаточно высоким уровнем учебно-познавательной мотивации

Многочисленные исследования математиков (Е.А. Бунимович, А.П. Шихова, О.С.Медведева, Е.Е. Белокурова, и др.) показали: локальное изучение темы «Элементы комбинаторики», начатое в *старших* классах, не достигает поставленной цели – необходимо постепенное, целенаправленное развитие комбинаторного мышления учащихся, что может быть достигнуто лишь путем *проведения сквозной комбинаторной линии*, начиная с математики в *начальной* школе. Однако реализация таких намерений неизбежно наталкивалась на непреодолимое (в рамках массового обучения) препятствие: известные методы обучения комбинаторным понятиям в младшем школьном возрасте крайне неэффективны. Как объясняют это принципиальное затруднение сами педагоги-математики? Причины его они часто видят как в недостаточных знаниях детей (А.П.Шихова, Е.Е. Белокурова), так и, главное, в том, что основа комбинаторной деятельности – интеллектуальный поиск, стремление к которому составляет особую *способность*, присущую далеко не всем учащимся (О.С. Медведева). В результате проблема преподавания комбинаторно-вероятностных понятий упирается в неразрешимую для сегодняшней педагогики проблему способностей – в данном случае математических

Во второй главе «Психологические основы формирования математических понятий» рассматриваются принципы психологически обоснованного обучения, с позиции теории развивающего обучения проводится анализ психологического содержания трудностей учащихся при усвоении основ комбинаторики.

В первом параграфе представлен обзор исследований отечественных ученых, создавших ценные теоретические и методологические предпосылки для решения проблемы обучения и развития на новом по сравнению с работами Л.С. Выготского уровне: формирующий метод исследования (П.Я. Гальперин), теория и принципы построения развивающего обучения (Д.Б. Эльконин, В.В. Давыдов), богатый опыт разработки целых программ и отдельных разделов учебных дисциплин (Н.Г. Салмина, З.А. Решетова, И.А.Володарская, А.К. Маркова, Л.И. Айдарова, М.Я. Микulinская, Г.А. Цукерман, В.В.Репкин и др.).

Исследования П.Я. Гальперина показали, что главную и собственно психологическую сторону деятельности субъекта составляет ее *ориентировочная* сторона, поэтому от полноты и характера ориентировки субъекта решающим образом зависят и сам

ход обучения, и его результаты. Проанализировав недостатки известных форм обучения, П.Я. Гальперин показал, что деятельность ученика по усвоению понятий необходимо определенным образом *организовать*, и охарактеризовал этапы такой организации («шкала поэтапного формирования»). Высокая эффективность метода поэтапного формирования умственных действий и понятий была продемонстрирована в ходе многочисленных исследований (Н.Ф.Тальзина, Л.Ф. Обухова, А.И. Подольский, Л.С. Георгиев, Х.М.Тепленькая, С.Ю. Бильчугов, Г.В. Бурменская и др.), показавших, что, выделив умственное действие в качестве предмета специального усвоения и организовав его поэтапное формирование, можно эффективно управлять познавательной деятельностью учащихся и процессом усвоения понятий.

Другое важное направление исследований развивающего обучения связано с теорией учебной деятельности Д.Б. Эльконина и В.В. Давыдова. В результате анализа *содержания* развивающего обучения было показано, что успех овладения детьми научно-теоретическими понятиями (к ним относятся отвлеченные понятия современной математики) зависит от способов организации учебной работы. Такая организация предполагает следующие шаги: 1) ориентация школьников в условиях задачи, решение которой требует введения нового понятия; 2) преобразование условий и выявление генетически исходного отношения в области, которую охватывает данное понятие; 3) фиксация выявленного отношения в предметной или знаковой модели, позволяющей изучать его свойства в чистом виде; 4) выяснение таких свойств выделенного отношения, ориентация на которые позволяет решить исходную задачу, т.е. овладеть требуемым понятием. В результате понятие не дается в готовом виде – оно формируется при помощи таких действий детей с предметом, которые направлены на раскрытие условий происхождения нового понятия.

Экспериментальные исследования в русле теории В.В. Давыдова (Р.А. Атаханов, Ф.Г.Боданский, С.Ф. Горбов, Л.К. Максимов, Г.Г. Микулина, Г.И. Минская, Хо Нгок Дай и др.) показали реальную возможность построения систематического курса математики уже в начальных классах. Он охватывал тот круг математических понятий, который традиционно считался недоступным младшим школьникам и обычно вводился в более старших классах школы. У детей закладывались основы мышления теоретического типа, в частности математическое мышление, что позволяло им ориентироваться в новых задачах, самостоятельно или с помощью учителя правильно ставить учебные задачи (или принимать их); происходило развитие таких важных свойств (и показателей) теоретического мышления, как всесторонний анализ предмета, умение строить выводное знание (логическую последовательность рассуждений), требовательность к доказательности

ВЫВОДОВ.

В русле работ П.Я. Гальперина, Д.Б. Эльконина, В.В. Давыдова и их последователей получила реальное воплощение ценная идея о необходимости (при усвоении новой деятельности) организации специальной *пропедевтики*, т.е. вводного, предварительного этапа обучения, расширяющего ориентировку детей и подготавливающего их к знакомству с новым предметным содержанием. Ярким примером пропедевтики, предшествующей введению понятия числа в программе по математике для первоклассников, может служить обучение детей качественной оценке соотношения величин на основе использования средств и эталонов, приобретение ими опыта выделения и сравнения различных параметров (П.Я. Гальперин, Л.С. Георгиев). Среди современных исследований, продуктивно реализующих идею пропедевтики, следует отметить работы В.Б. Хозиева (2000). Интересно, что отдельные высказывания о необходимости специального *введения* в комбинаторику встречаются и в работах видных математиков (А.Н. Колмогоров, Д.Дьедоне), однако эта мысль не получила у педагогов-математиков достаточной теоретической и практической разработки.

Во втором параграфе главы трудности обучения детей комбинаторике анализируются с позиции современных психологических представлений об условиях и механизмах усвоения понятий. Рассматриваются конкретные варианты изложения данной темы в наиболее удачных школьных учебниках математики для средней и старшей школы (Дорофеев, 1994; Зубарева, 2001; Шеврин, 2003; Морджович, 2002; Ткачева, 2003 и др.). Указанные учебники, при всем внешнем различии преподнесения материала, сходны в том, что объяснение комбинаторики часто начинается прямо с *формулы* или же с описания *способа подсчета* числа возможных соединений (сочетаний, размещений или перестановок). При этом молчаливо предполагается, что способы построения наборов (комбинации) элементов с определенными свойствами в изучаемых соединениях, а также их соотношение с исходным множеством детям понятны сами собой, т.е. специальная *организация ориентировки* в них не требуется.

Осознавая трудности усвоения детьми комбинаторных понятий в знаковой форме (т.е. начиная с формул), отдельные математики предложили свои варианты решения данной проблемы: систематическое изложение комбинаторики на графовой основе (В.Ф.Волгина), создание этапа «бесформульной комбинаторики» на основе использования действия систематического перебора и графов, «заблаговременная» подготовка мышления учащихся через введение элементарных комбинаторных заданий уже в начальных классах (А.П. Шихова), развитие комбинаторного стиля мышления (О.С. Медведева) и др.

Однако, несмотря на внешнее разнообразие авторских вариантов методик, с

психологической точки зрения, все опыты относятся к первому типу ориентировки в учении, когда ученик *сам*, путем проб и ошибок ищет (и не всегда находит!) недостающие ориентиры для правильного выполнения заданий. Предполагается, что, решая задачи, дети сами должны научиться выделять и соотносить «исходное множество» и «набор» (т.е. подмножество), а также одновременно учитывать такие свойства наборов, как количественный и качественный состав, порядок и повторяемость элементов. Как известно, успех обучения на основе неполной ориентировки в предмете не столько развивает мышление детей, сколько сам зависит от достигнутого ими уровня интеллектуального развития, т.е. способностей учащихся, что и демонстрируют весьма ярко трудности преподавания комбинаторики в школе.

В начале **третьей главы** диссертации раскрывается схема эмпирического исследования: обозначаются его цели, задачи и гипотезы; дается характеристика участников исследования. **Схема исследования** предполагала проведение *тройного сравнения*:

1) степень продвижения детей в овладении комбинаторными представлениями оценивалась путем сравнения результатов *двух срезов: до* формирования (констатирующий эксперимент) *и после* него (контрольный эксперимент);

2) с целью оценки *эффективности экспериментальной* программы формирования комбинаторных понятий она сопоставлялась с *традиционной* школьной программой (в контрольных группах); для этого обучение параллельно велось в двух группах четвероклассников (1-ая экспериментальная группа и 1-ая контрольная группа) и в двух группах учащихся 8-го класса (2-ая экспериментальная и 2-ая контрольная группы); дополнительно оценивалась *динамика стихийного* продвижения в комбинаторных представлениях у подростков (3-я контрольная группа, не участвовавшая в обучении);

3) сравнение результатов формирования в 4-х и 8-х классах позволяло оценить *межвозрастные* различия с учетом фактора общей *успеваемости* детей (табл. 1).

Таблица 1. Характеристика участников исследования

Участники основного эксперимента	Класс	Коли- чество	Состав (%)		Возраст (ср)	Возрастн интервал	Успеваемость (%)		
			маль- чиков	дево чек			«4», «5»	«3»	«2»
1-ая эксперим гр	4 А	21	43%	57%	10,4	9,8– 10,11	67%	33%	-
1-я контрольная гр	4 Б	21	57%	43%	10,3	9,8 – 10,8	62%	34%	-
2-ая эксперим гр	8 Б	14	43%	57%	14,6	13,7-14,9	36%	57%	7%
2-я контрольная гр	8 Б	14	57%	43%	14,8	14,1-15,1	64%	36%	-
3-я контрольная гр	8 А	29	48%	52%	14,6	13,6-15,6	41%	49%	10%
Пилотажная гр	4 кл	19	58%	42%	10,2	9,11-10,5	63%	32%	5%
	8 кл	20	45%	55%	14,4	14,2-14,6	45%	55%	-

Подчеркнем, что для определения доступности разрабатываемой методики детям с разной учебной успеваемостью специального отсева учащихся по этому критерию не было, так как в выборке присутствовали даже «двоечники» (табл. 1).

Во втором параграфе описываются методики и критерии оценки развития мышления детей; представлены результаты констатирующего эксперимента. Комплекс диагностических заданий включал четыре блока методик.

1. Первый блок содержал средства оценки *общего умственного развития* («Прогрессивные матрицы» Дж Равена, тест Д. Гриллис, Г. Уилсон).

2. Второй блок заданий был направлен на оценку уровня *операционального развития* детей. Здесь применялись пять задач Ж. Пиаже и Б. Инельдера из области комбинаторики, случайности и вероятности в их классической форме с использованием клинического метода беседы. Например, в задаче на объединение операций ребенку предлагались карточки с цифрами (сначала с двумя, потом с тремя и т.д.), из которых он должен был составить все возможные двузначные числа. После предъявления пяти цифр он должен был сформулировать правило подсчета количества таких чисел. В задаче на представления о случайном распределении дискретных элементов предлагалось предугадать результаты перемешивания бусин при наклонах коробки.

3. Для третьего блока был подобран ряд задач из области *математической комбинаторики* на *перестановки, сочетания, размещения с повторением и без повторения*¹ (всего их было 6). Задания были взяты из наиболее новых учебников по математике (Ткачева, 2003; Шеврина, 2003). Пример задачи на перестановки с повторением: сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 при условии, что цифры в числе могут повторяться? Пример задачи на сочетания с повторением: сколькими способами девочка может купить 2 воздушных шарика, если в магазине есть шары 4-х цветов: красные, синие, зеленые и желтые?

4. Четвертый блок диагностического комплекса включал задания на *понимание вероятности* из исследования Э. Фишбеина и Д. Шварца (1997). Эти задания позволяли оценить возможное влияние освоения комбинаторных понятий на эволюцию представлений о вероятности. Примером заданий может служить задача на сложное и простое событие: одновременно бросают 2 игральные кости. Вероятность какого события больше: а) выпадет 5 и 6; б) выпадет 6 и 6; в) вероятность этих событий одинакова?

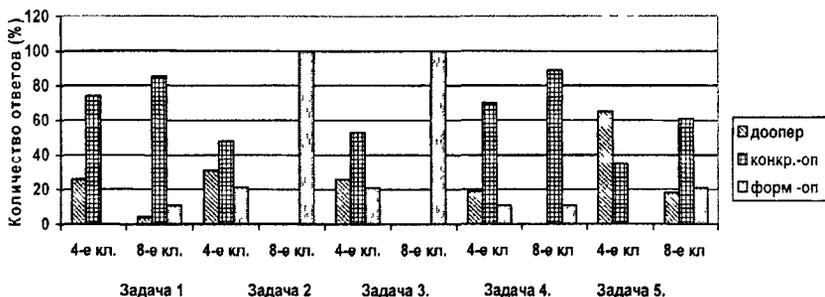
Результаты, полученные в констатирующей серии эксперимента, выявили следующую картину развития мышления.

¹ В соединениях *без* повторения предполагается однократное использование в наборе каждого элемента множества, в соединениях *с* повторением каждый элемент может использоваться любое количество раз.

По критериям общего умственного развития уровень интеллекта большинства участников эксперимента соответствовал «средней норме» (43% учеников в 4-х и 47% в 8-х классах) и «ниже среднего» (41% и 37% соответственно), но был представлен и высокий, и пограничный уровни (последний составлял десятую часть в обеих возрастных группах)

При выполнении задач Ж. Пиаже и Б. Инельдер был отмечен весьма значительный диапазон разброса полученных результатов И у младших школьников, и у подростков встречались все три уровня операциональной логики: дооперациональный, конкретно-операциональный и уровень формальных операций, однако их соотношение зависело как от возраста, так и от типа предъявляемой задачи (рис. 1). В группе младших школьников доминировал конкретно-операциональный уровень выполнения; у подростков конкретно-операциональный и формально-операциональный уровни встречались одинаково часто, однако присутствовали и ответы самого низкого, дооперационального, уровня, соответствующего дошкольному возрасту.

Рис 1 Распределение уровней выполнения задач Ж. Пиаже в двух возрастных группах



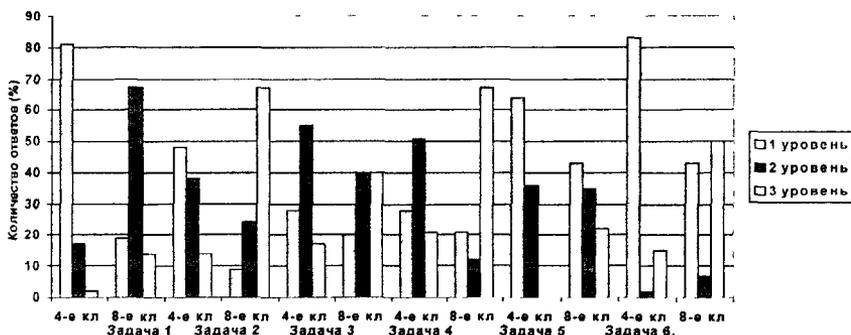
Успешность решения задач из области математической комбинаторики также зависела от возраста детей и типа предъявляемой задачи. Практически все задачи на перестановки и размещения (с повторением и без) оказались для младших школьников недоступными, тогда как задачи на сочетания оказались для них легче. Подростки были в целом успешнее, но и у них самый низкий, первый, уровень выполнения преобладал в задаче на размещения с повторением, в то время как правильные решения (3-го уровня) доминировали в задачах на перестановки и сочетания без повторения (рис. 2). Значительный разброс результатов по конкретному материалу задач указывал на влияние различий в стихийно приобретаемом опыте детей действия с множествами.

Задачи на понимание вероятности оказались практически недоступны младшим школьникам. У подростков встречались отдельные правильные ответы, однако и они оказались под влиянием наиболее распространенных иллюзий.

Таким образом, в целом по уровню общего умственного развития,

операционального развития, а также по состоянию комбинаторно-вероятностного мышления между детьми и подростками имели место весьма существенные различия (по критерию Манна-Уитни $p=0,000$), в то время как различия между экспериментальными и контрольными группами одной возрастной ступени были статистически не значимы. Качественный анализ результатов констатирующего эксперимента наглядно показал, почему многочисленные попытки преподавания понятий математической комбинаторики в начальной и даже средней школе вызывают у учащихся такие большие трудности и часто усваиваются лишь формально: при стихийном развитии логической структуры мышления, лежащие в основе понятий математической комбинаторики, появляются у большинства учащихся только к середине подросткового возраста и позднее. Начальные логические предпосылки для знакомства с понятиями собственно *математической* комбинаторики присутствовали в среднем у пятой части 4-классников (21%) и менее чем у половины 8-классников (43%). Полностью учесть все возможные варианты во *всех* комбинаторных задачах смогли только два подростка, серьезно увлекающихся шахматами.

Рис 2 Распределение уровней выполнения комбинаторных задач



В третьем параграфе представлено содержание экспериментальной методики формирования. Пилотажная серия эксперимента показала, что многие трудности детей проистекали из недостаточного учета ими элементарных свойств множеств и составляющих их элементов, однако обучение действию систематического перебора элементов не устраняло многочисленных ошибок («лишние» варианты, их пропуск и др), поскольку сам *принцип порождения* различных соединений (наборов) на основе исходного множества оставался для них скрыт. Чтобы показать происхождение наборов, была организована специальная подготовка – *пропедевтика*. Аналогично тому, как формирование счета и понятия числа в начальной школе следует начинать не с номинального введения числового ряда, а

с дорчисловой пропедевтики, направленной на овладение детьми навыками сравнения величин, действия измерения и понятия меры (П.Я. Гальперин, Л.С. Георгиев, 1960), как же и введение комбинаторики следует начинать не с построения частных видов соединений, а с ознакомления с «поведением» элементов множеств при разных способах их классификации в подмножества (наборы).

В ходе такой пропедевтики дети приобретали *опыт оперирования множествами*, осваивали понятия «исходное множество», «набор» (подмножество) и их соотношение. В результате собственных действий по построению разнообразных соединений они убеждались, что наборы могут отличаться как по числу элементов, так и по их качественному составу, повторяемости, а также положению (порядку), что комбинировать элементы можно по-разному и от этого зависит реальный состав и число вариантов, что при составлении наборов одновременно могут участвовать несколько признаков элементов (множественная мультипликация) и т.д.

Этап пропедевтики показал возможность составления *единой* схемы ориентировки во всех трех основных типах комбинаторных соединений (сочетания, размещения, перестановки), благодаря чему основы комбинаторики предстали в виде целостной системы. В содержание полной ориентировочной основы входило четкое выделение детьми *четырех условий*: 1) свойств *исходного множества* (объема и качественного состава); 2) свойств образуемых *наборов* (качественного состава и числа элементов); 3) возможности *повторения* элементов при составлении наборов; 4) значения *порядка* следования элементов в наборе. Отчетливая ориентировка на четыре названных характеристики, которые при традиционном обучении предполагаются самоочевидными для детей и специально не отрабатываются, позволила объединить три разных типа комбинаторных соединений в общей схеме ООД, где отчетливо предстали как сходные, так и отличительные черты этих соединений (рис. 3).

Экспериментальная методика по усвоению ООД была разработана нами в традициях метода планомерно-этапного формирования умственных действий и понятий П.Я. Гальперина. Использовалась групповая форма осуществления метода формирующего эксперимента. Представим кратко содержание его этапов.

Первый этап был направлен на создание мотивационной основы формируемого действия, т.е. возбуждение познавательного интереса учащихся к комбинаторным заданиям. Для этого в ходе совместного обсуждения примеров, хорошо известных детям из повседневной жизни (ситуации выбора старосты и заместителя, составления графика

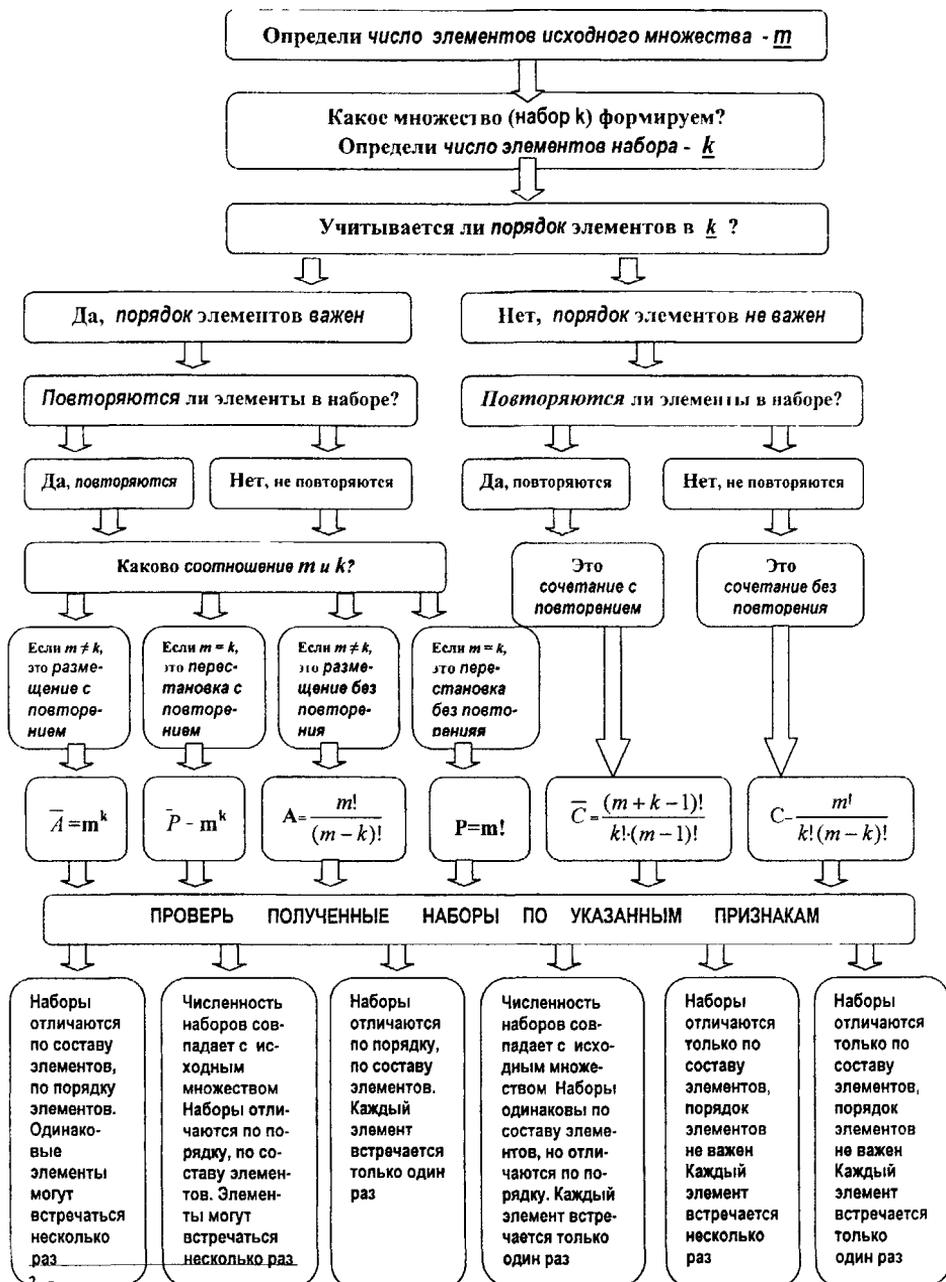
дежурства в классе, варианты кода и т.д.), им показывали, что интуитивные оценки количества возможных вариантов часто ошибочны, а метод хаотического перебора, к которому прибегали учащиеся, чаще всего не дает правильного результата.

В ходе следующего этапа – действия на основе схемы полной ООД – дети тщательно исследовали элементный состав комбинаторных объектов. Во многом это исследование осуществлялось самими детьми и только направлялось руководителем, который так подбирал задачи, чтобы вызвать определенную постановку вопроса, а затем и определенный ответ на него. Но в целом формирование велось по второму типу ориентировки, когда дети действовали в условиях полной ориентировочной основы действия, но не устанавливали ее всю самостоятельно – схема ООД была предложена в готовом виде. Такой тип ориентировки гарантирует безошибочность действия, заданный диапазон его обобщенности, высокий уровень осознанности, критичности и других первичных и вторичных свойств действия. Заметим, что традиционная для поэтапного формирования схема ООД была дополнена специальным пунктом («Проверь полученные наборы по указанным признакам»), содержащим ориентиры, с помощью которых дети должны были систематически проверять правильность полученных результатов. Это дополнение, во-первых, способствовало усвоению действия самоконтроля, а во-вторых, стимулировало усвоение детьми сложного комплекса сходных и отличительных признаков для каждого соединения.

Основное содержание этапа выполнения действия в материальной и материализованной форме составило решение ряда специально подобранных комбинаторных задач с использованием ориентировочной карточки и разнообразного материала, подходящего для составления наборов (круги, квадраты и др. фигуры из картона разного цвета, жетоны с цифрами, буквами). Вначале задачи предполагали выполнение комбинаторных действий с реальным предметным материалом, затем для составления наборов использовались символические замещения предметов, фигурировавших в задачах (учебных дисциплин в расписании, членов спортивных команд и т.д.). На данном этапе широко применялись и приемы графического моделирования в виде построения разного рода графов.

Этап громкой речи начинал подготавливаться на предшествующем этапе – в ходе обсуждения детьми действий по составлению наборов. Это достигалось за счет внутригруппового взаимодействия учащихся: работа в малых группах (по 4-5 человек) позволяла организовать самостоятельное выполнение каждым ребенком предложенных заданий, а также совместное обсуждение и проверку детьми действий друг друга

Рис. 3. Схема полной ориентировочной основы действия²



² Формулы вводились только в варианте методики для подростков

После решения 5-6 задач в материальной и материализованной форме экспериментатор предлагал детям следующие задачи решать без обращения к материальной схеме ООД, зафиксированной на карточке, но продолжать громко проговаривать содержание операций, которые они должны выполнить в соответствии с этой схемой. Учащиеся сначала проговаривали вслух вопросы и ответы, потом только ответы, таким образом, речевое сопровождение постепенно сокращалось, а скорость выполнения заданий увеличивалась.

На этапе внутренней речи дети проговаривали последовательность действий только «про себя». Здесь происходил переход к решению все более трудных задач, а также с целью обобщения формируемого действия задания широко варьировались по материалу (с разным сочетанием существенных и несущественных признаков), предлагалось большое число примеров по каждому типу заданий, которые дети решали легко и с интересом. Младшим школьникам требовалось 10 занятий, подросткам - 5

В четвертой главе представлен ход и результаты экспериментального формирования элементов комбинаторного мышления у младших школьников (4-й класс) и подростков (8-й класс); проверка эффективности разрабатываемой методики; здесь также определялись возможности и возрастные особенности влияния, оказываемого усвоением понятий математической комбинаторики на развитие мышления учащихся.

В начале главы последовательно рассматриваются особенности хода экспериментального формирования у младших школьников и подростков (первый и второй параграфы соответственно), а также процесс обучения основам комбинаторики в контрольных группах по методике, разработанной математиками-педагогами и рекомендованной Министерством образования РФ (в данном изложении эта методика условно называется «*традиционной*», в отличие от предлагаемой «*экспериментальной*»).

Занятия с младшими школьниками и подростками из экспериментальных групп велись по единой методике, однако у подростков оказалось возможным более компактное прохождение начальных этапов формирования. Например, этапы создания мотивационной основы и составления ориентировочной основы действия были объединены в ходе одного занятия, графы как средство организации перебора вводились уже в первых задачах. Кроме того, знание подростками дробей позволяло ввести в методику основные комбинаторные формулы и решать более сложные задачи (с большим числом элементов в соединениях)

Чем же отличалось обучение по традиционной программе от экспериментального, кроме поэтапной организации и опоры на ООД? Оно также реализовывалось в двух возрастных вариантах (для 4-х и 8-х классов по 10 и 5 уроков) и содержало задачи на все

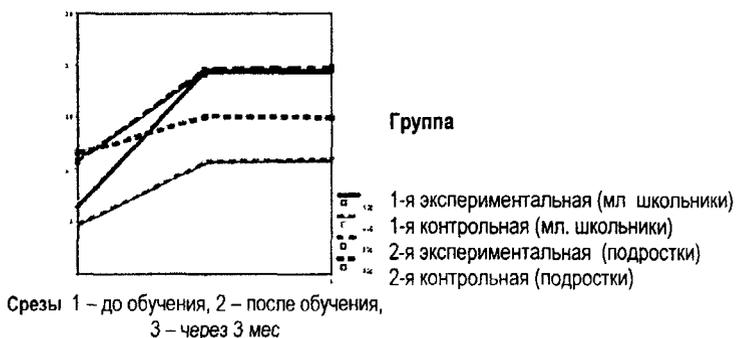
типы комбинаторных соединений, но не предполагало их четкого соотнесения и дифференциации между собой: сочетания, размещения и перестановки изучались последовательно (а не в единой системе, как в экспериментальной программе). Объяснение нового материала проводилось в виде устного разъяснения решения конкретных задач с активным использованием схематических средств организации перебора и представления результатов – таблиц и графов.

В процессе обучения среди детей из контрольных групп быстро возникло заметное *расслоение* в зависимости от особенностей их мотивации и успешности усвоения материала. Наиболее подготовленные учащиеся обычно оказывались успешнее остальных: количество допущенных ими ошибок постепенно, но неуклонно сокращалось по мере увеличения количества решенных задач. Они с интересом воспринимали новые задания, сохранив высокий уровень учебной мотивации до конца занятий. Другие учащиеся выполняли комбинаторные задачи с переменным успехом, они с интересом решали одни задачи, но не стремились решить все, обходя трудные. Наконец, третья часть состояла из учащихся, которые на первом же занятии теряли интерес из-за сложности понимания материала. Таким образом, здесь ярко проявились характерные недостатки традиционного обучения (сильный разброс по успеваемости, зависимость от способностей, потеря интереса у менее успешных учащихся), которые в равной мере присутствовали и у младших школьников и у подростков. В экспериментальных группах, где обучение строилось на основе полной ориентировочной основы, подобных явлений не было.

В третьем параграфе представлены результаты контрольного эксперимента, направленного на оценку эффективности разработанной нами экспериментальной программы, прослеживание динамики изменений в комбинаторном мышлении и общем умственном развитии детей, выявление возможного влияния формирования начальных комбинаторных представлений на развитие вероятностного мышления. Сравнение результатов двух контрольных серий (сразу после формирования и спустя три месяца) показало следующую картину.

Хотя оба вида обучения основам комбинаторики оказали влияние на успешность выполнения испытуемыми комбинаторных задач, эффективность экспериментальной методики обучения была существенно выше, чем традиционной (рис. 4): если до обучения различия результатов экспериментальной и контрольной групп одной возрастной ступени были не значимыми ($p=0,173$ для младших школьников, $p=0,530$ для подростков по критерию Манна-Уитни), то после обучения они достигли убедительной статистической значимости (соответственно $p=0,000$ и $p=0,005$).

Рис 4 Динамика успешности решения комбинаторных задач при разных типах обучения



У младших школьников из экспериментальной и контрольной групп значимость различий в результатах констатирующей серии и первого (сразу после обучения) контрольного среза достигла высшего статистического уровня ($p=0,000$ по критерию Вилкоксона для связанных выборок). Дисперсионный анализ (метод повторных измерений) подтвердил очевидное влияние обеих программ обучения при том, что степень влияния экспериментального формирования была заметно выше ($F=215,6$ и $F=112,7$ при $p=0,000$). В возрастной группе подростков картина была аналогичной ($F=62,19$ при $p=0,000$ и $F=25,02$ при $p=0,001$ в экспериментальной и контрольной группах соответственно). Фактически младшие школьники из экспериментальной группы достигли уровня подростков, и такие результаты сохранились и при отсроченном контроле – через три месяца.

Показательно, что результаты детей при традиционном обучении сохраняли тесную зависимость от их исходного уровня успеваемости по математике, в то время как формирующая программа обучения, предоставив равные возможности для продвижения всех учащихся, резко ослабила такую зависимость. Рис. 5 и 6 наглядно показывают, что не только «троечники» и «хорошисты», но даже «двоечники» (в группе подростков) в ходе формирующего обучения оказались способными сделать практически такой же «скачок», как и «отличники». В то же время при традиционной форме преподавания подобного «выравнивания» учащихся на высших показателях не наблюдалось.

Сфера влияния усвоения основ комбинаторики не ограничилась только решением соответствующих задач, но также затронула показатели *операционального* мышления (задания Ж. Пиаже) и *общего умственного* развития детей (тесты Дж. Равена и Д. Гривилс, Г. Уилсон). Изменился сам способ рассуждения детей: четкое выделение и

систематический перебор признаков, одновременный учет нескольких оснований и др. действия они свободно переносили в контекст совершенно иных (чем в обучении) заданий, например, классических матричных тестов. Сам факт переноса учащимися полученных знаний на новые задания исключал возможность их формального усвоения и подтверждал значительный развивающий эффект усвоения понятий математической комбинаторики (рис. 7).

Рис. 5. Успешность решения комбинаторных задач младшими школьниками, имеющими разную успеваемость по математике



Рис. 6. Успешность решения комбинаторных задач подростками, имеющими разную успеваемость по математике

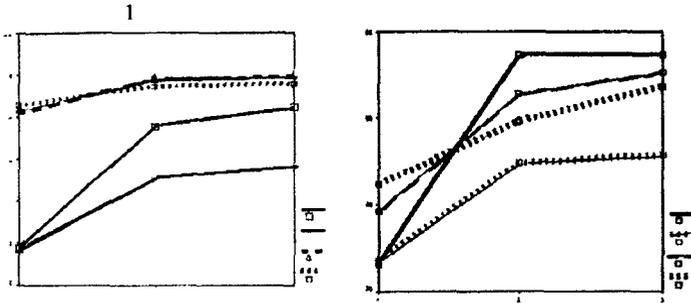


А – экспериментальное формирование, Б – традиционное обучение,

В - стихийный опыт

Отметим, что наиболее мощное развивающее влияние формирующего обучения имело место в возрастной группе младших школьников: четвероклассники с особым интересом относились к занятиям, где путем преобразования исходного множества в предметно-практическом плане они учились самостоятельно составлять разнообразные наборы элементов. Их живой интерес и весьма успешные результаты указывают на высокую чувствительность младших школьников к усвоению комбинаторного материала, что в свою очередь свидетельствует о возможности и целесообразности введения данного раздела уже в начальной школе.

Рис 7. Динамика успешности выполнения задач Пиаже (1) и Равена (2)



СРЕЗЫ 1 – до обучения, 2 – после обучения, 3 – через 3 мес.

ГРУППЫ:

- 1-я экспериментальная (мл школьники)
- 1-я контрольная (мл школьники)
- 2-я экспериментальная (подростки)
- 2-я контрольная (подростки)

Знакомство с комбинаторными операциями оказало определенное положительное влияние и на понимание детьми вероятностных задач, но не вело к автоматическому распространению формально-операционального уровня их рассуждений из области комбинаторики на область вероятностных событий. Поскольку комбинаторика служит основой для *исчисления* вероятностей, главный развивающий эффект формирующей программы следует ожидать в ходе освоения учащимися задач, требующих количественной оценки вероятностей.

Рис. 8. Динамика комбинаторного мышления при разных типах обучения и в стихийных условиях



Дополнительно оценивалась *динамика стихийного* продвижения в комбинаторных представлениях у подростков с помощью 3-й контрольной группы, не участвовавшей в обучении. Полученные данные показали, что процесс становления комбинаторных представлений в условиях стихийно приобретаемого опыта происходит крайне медленно, а его результаты неустойчивы и целиком зависят от общего уровня интеллектуального

развития (рис. 8).

В **заключении** обобщаются основные результаты теоретического анализа и экспериментального исследования, формулируются основные **выводы**:

1. Общая картина развития мышления учащихся младшего школьного и подросткового возраста характеризуется неравномерностью и ярко выраженными индивидуальными различиями. В обеих возрастных группах встречаются ответы как дооперационального, конкретно-операционального, так и уровня формальных операций. Хотя с возрастом (в условиях стихийного развития) способность детей к комбинаторному рассуждению постепенно растет, и подростки в целом успешнее младших школьников решают комбинаторные задачи, однако темпы подобного продвижения медленны и зависят от особенностей и предметного содержания задач. В результате имеет место весьма значительный разброс в достигаемом уровне комбинаторных представлений, когда в среднем лишь пятая часть четвероклассников и менее половины восьмиклассников демонстрируют нормативно ожидаемый уровень, при этом у части детей комбинаторные суждения находятся на крайне низком (дошкольном) уровне.

2. Тот факт, что в условиях стихийного развития логические структуры мышления, лежащие в основе комбинаторики, появляются у большей части учащихся только к середине подросткового возраста и позже, объясняет особую трудность попыток преподавания комбинаторики в школе, их низкую успешность и формализм знаний.

3. Необходимым психологическим условием развития комбинаторного мышления у детей и подростков выступает *ориентировка* на такие свойства множества и его подмножеств, как объем, а также состав, порядок и повторяемость элементов. Такая ориентировка формируется на основе действия по составлению наборов из множеств и раскрывает генетически исходные отношения трех основных типов комбинаторных соединений (размещений, сочетаний и перестановок).

4. Для успешного освоения логических предпосылок комбинаторного мышления детям требуется специальная *пропедевтика*, в ходе которой они приобретают реальный (т.е. предметно-практический, а не только вербально-знаковый) опыт действия с множествами. Между тем стихийно-практическое освоение детьми окружающего мира обычно не обеспечивает им ни достаточного опыта по составлению множеств, ни ориентировки в их составе, а традиционные методы обучения игнорируют их, преподавая комбинаторные понятия в виде формул.

5. Методика поэтапного формирования действия по составлению наборов из

множество (вместе с предшествующей ей пропедевтикой) обеспечивает полноценное усвоение учащимися понятий математической комбинаторики. Отсроченная по времени (три месяца) проверка качества усвоенных комбинаторных понятий подтвердила их прочность и обобщенный характер в обеих возрастных группах.

6. Важным условием эффективности экспериментальной методики было преподнесение ориентировки в разных типах комбинаторных соединений учащимся в виде *единой целостной системы*. В отличие от раздельного их представления, принятого в существующих программах преподавания комбинаторики, *системная ориентировка* раскрывает генетически исходные отношения, делая наглядными все пункты сходства и различий между типами соединений. Это открывает возможность усвоения действительно *обобщенного* способа решения комбинаторных задач, обеспечивает осознанность и системность комбинаторных понятий.

7. Результаты формирования комбинаторных понятий по экспериментальной методике практически не зависели от уровня успеваемости учащихся по математике, в то время как при традиционном способе обучения такая зависимость сохранялась, и успешными оказывались лишь самые сильные (с точки зрения школьной успеваемости) ученики. Данный феномен сглаживания индивидуальных различий объясняется тем, что полноценная ориентировка детей в предмете и опора на активную деятельность в процессе обучения устранила необходимость путем проб и ошибок искать недостающие условия, предоставляла всем детям (а не только наиболее «сообразительным», «умным») достаточные средства, чтобы по-настоящему разобраться в изучаемом материале.

8. Специальным образом построенная пропедевтика и поэтапное формирование действия по составлению из множества его подмножеств (соединений) делает доступными понятия математической комбинаторики не только для подростков, но и для *младших школьников*, обнаруживающих высокий интерес и сензитивность к данному содержанию.

9. Установлено опутимое положительное влияние формирования понятий комбинаторики у детей как на развитие их мышления по критериям операциональной теории Ж. Пиаже, так и на показатели их общего умственного развития по критериям теста Дж. Равена и др. Благодаря распространенности и генерализованному характеру усвоенные комбинаторные действия (четкое выделение и систематический перебор признаков, одновременный учет нескольких оснований и др.) дети свободно переносили в контекст различных интеллектуальных заданий, например, классических матричных

тестов. Сам факт переноса учащимися полученных знаний на новые задания исключает возможность их формального усвоения и свидетельствует о значительном развивающем потенциале понятий математической комбинаторики. В то же время необходимо дальнейшее исследование места и функции сформированных комбинаторных понятий в общей структуре мышления детей и подростков.

10. Полученные эмпирические данные убедительно показывают целесообразность введения раздела о комбинаторике в программу по математике начальной школы (при условии соответствующего способа ее преподавания).

Основное содержание диссертации отражено в следующих **публикациях**:

1. Развитие мышления младших школьников и подростков в процессе освоения понятий математической комбинаторики // Психология и школа, 2006, № 2 (0,5 п. л.)

2. Формирование обобщенного способа решения комбинаторных задач // Современные гуманитарные исследования, 2006, № 2 (0,5 п. л.).

3. Влияние комбинаторных понятий на общее умственное развитие учащихся // Тезисы Всероссийской научно-практической конференции "Актуальные проблемы прикладной психологии" (Калуга, 26-28 мая 2006 г.) – Калуга, 2006 (0,2 п. л.).

Отпечатано в копицентре «СТ ПРИНТ»
Москва, Ленинские горы, МГУ, 1 Гуманитарный корпус
www.stprint.ru e-mail: zakaz@stprint.ru тел.: 939-33-38
Тираж 100 экз Подписано в печать 15.05 2006 г

2006A

70158

10158