РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

На правах рукописи

Панюшкин Сергей Владимирович

Обобщенное преобразование Фурье и его применения

(01. 01. 01. — математический анализ)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва 2005

Работа выполнена в лаборатории теории функций и функционального анализа Орловского государственного университета

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

профессор Громов В.П.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,

профессор Гольдман М.Л.;

доктор физико-математических наук,

профессор Латышев А.В.

Ведущая организация:

Московский энергетический институт

Защита состоится 29 декабря 2005 года в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета К 212.203.04 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Российском университете дружбы народов по адресу: 117419, Москва, ул. Орджоникидзе, 3, ауд. 495а.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Российского университета дружбы народов по адресу: 117419, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.

Автореферат разослан "   "   2005 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета К 212.203.04, Ику- Куценко И.Л.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Для решения разнообразных задач анализа часто применяется преобразование Фурье сопряженного пространства и его обобщения. Пусть H — отделимое локально выпуклое пространство функций аргумента z. Оператор T, действующий на сильно сопряженном к H пространстве по правилу:

$$T(l) = l(e^{\lambda z}) = \varphi(\lambda), \quad \forall l \in H^*,$$

называется преобразованием Фурье пространства H^*. В литературе употребляются также и другие названия оператора H^* : преобразование Фурье-Лапласа, преобразование Лапласа, преобразование Фурье-Бореля.

Образом преобразования Фурье часто является некоторое пространство целых функций Λ, представляюшее собой реализацию пространства H^*. Как правило, оно обладает достаточно "хорошими" свойствами, позволяющими изучать пространства H и H^*.

К числу наиболее ранних исследований по данной теме относятся работы Л.Эренпрайса, И.М. Гельфанда и Г.Е. Шилова. Дальнейшие наиболее значимые результаты в данном направлении получены Б.А.Тейлором, В.В.Напалковым, И.Ф.Красичковым, Ю.А.Дубинским, О.В.Епифановым, Р.С.Юлмухаметовым. В работах этих авторов преобразование Фурье использовалось для решения задачи Коши и уравнений свертки в различных функциональных пространствах, решения задач спектрального синтеза, нахождения общего вида оператора, перестановочного с дифференциальным оператором, описания подпространств, инвариантных относительно оператора дифференцирования, исследования равномерно аналитических пространств.

Весьма широкий круг важных задач, для решения которых применялось преобразование Фурье, говорит о необходимости обобщения этого метода. Различные обобщения преобразования Фурье рассматривались Ю.Ф.Коробейником и С.Н.Мелиховым, И Ф.Красичковым, В.П.Громовым, И.С.Елисеевым.

Цель работы - исследование обобщенного преобразования Фурье пространства, сопряженного к произвольному локально выпуклому пространству, в случае, когда ядром является аналитическая вектор-функция.

Методика исследования. В работе используются методы теории локально выпуклых пространств, теория целых векторнозначных функций, теория порядка и типа оператора.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Научная и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть применены для решения задачи Коши дифференциально-операторных уравнений, в частности, уравнений свертки, решению задач спектрального синтеза, нахождению общего вида оператора, перестановочного с данным оператором, описанию инвариантных подпространств и др.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на научно-исследовательских семинарах по теории операторов Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (руководитель — профессор А.Г.Костюченко), по дифференциальным уравнениям Московского Энергетического института (руководитель — профессор Ю.А.Дубинский), по комплексному анализу Российского университета Дружбы Народов (руководитель — профессор А.В.Арутюнов), на Воронежской зимней математической школе — 2005 "Современные методы теории функций и смежные проблемы", а также на ежегодных научных конференциях Орловского государственного университета в 2003-2005 гг.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 работ. Все работы выполнены без соавторов.

Структура и объем работы. Дисертация состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 51 наименование. Общий объем работы — 86 листов машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность выбора темы исследования, ее исторические аспекты, дается содержание основных результатов работы.

В первой главе подробно изучается обобщенное преобразование Фурье пространства, сопряженного к произвольному локально выпуклому, с ядром, являющимся целой векторнозначной функцией довольно общего вида. Полученные результаты иллюстрируются разнообразными примерами.

В §1.1 дано определение обобщенного преобразования Фурье в пространстве, сопряженном к локально выпуклому, в случае, когда ядром является произвольная аналитическая вектор-функция.

Пусть H — локально выпуклое отделимое линейное топологическое пространство, топология которого определена мультинормой $\left\{\|\cdot\|_p\right\}$, $p \in \mathcal{P}$ и H^* — сопряженное к нему.

Определение. Пусть $f : \mathbb{C} \to H$ *— фиксированная аналитическая в некоторой области* G *вектор-функция. Оператор*

$$T : H^* \to \Lambda; \;\; H^* \ni l \to T(l) = l[f(\lambda)] = \varphi(\lambda)$$

назовем обобщенным преобразованием Фурье с ядром f. *Здесь* Λ *— множество значений оператора* T *:* $\Lambda = \{\varphi = T(l)\,;\, \forall\, l \in H^*\}$.

Значениями обобщенного преобразования Фурье являются скалярные функции, аналитические в G.

В данной диссертации (за исключением §1.3) ограничиваемся рассмотрением случая, когда f — целая вектор-функция:

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \lambda^n, \;\; x_n \in H, \;\; \lambda \in \mathbb{C}.$$

В этом достаточно общем случае получены достаточные условия, в которых обобщенное преобразование Фурье устанавливает алгебраический и топологический изоморфизм между пространством, сильно сопряженным к локально выпуклому, и весовым пространством целых функций индуктивного типа.

Пусть $N_p(r)$, $p \in \mathcal{P}$ — семейство действительнозначных функций положительного аргумента r, определенных следующим образом:

$$N_p(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_p r^n, \quad r > 0.$$

Рассмотрим семейство пространств целых функций

$$\Lambda_p^N = \{\varphi(\lambda) : |\varphi(\lambda)| \leqslant C N_p(|\lambda|)\}, \; p \in \mathcal{P}$$

с нормой

$$\|\varphi\| = \sup_{r>0} \left\{ \frac{\max\limits_{|\lambda| \leqslant r} |\varphi(\lambda)|}{N_p(r)} \right\}.$$

Пусть пространство $\Lambda^N = \lim\limits_{p} ind \Lambda_p^N$ — предел индуктивного спектра $\{\Lambda_p^N\}$.

Теорема 1.1. Пусть H — бочечное пространство и $\{x_n\} \subset H$ — базис, по которому каждый вектор $x \in H$ разлагается в ряд с коэффициентами $\{c_n(x)\}$. Пусть

$$\forall p \in \mathcal{P}, \;\; \forall x \in H, \;\; \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x)| \, a_{p,n} < +\infty,$$

где

$$a_{p,n} = \inf_{r>0} \frac{N_p(r)}{r^n}.$$

Тогда Λ совпадает с Λ^N алгебраически.

При определенных условиях имеет место и топологическое соответствие пространств Λ и Λ^N, Λ^M:

Теорема 1.2. Пусть в условиях теоремы 1.1 H — пространство Фреше и функции $N_p(r)$ удовлетворяют условию:

$$\forall p \geqslant 1, \;\; \lim_{r \to \infty} (N_{p+1}(r) - N_p(r)) = +\infty.$$

Тогда $\Lambda = \Lambda^N$.

Замечание 1.3. Система функционалов $\{c_n(x)\}$ является биортогональной к базису $\{x_n\}$, то есть $c_n(x_m) = \delta_{nm}$, $\forall m$, $\forall n$. Оператор, обратный обобщенному преобразованию Фурье — $T^{-1} : \Lambda \to H^*$, записывается в виде:

$$\forall \varphi \in \Lambda, \ \forall x \in H, \ \ (T^{-1}\varphi)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n c_n(x).$$

В частности, если H — функциональное пространство, а ядром обобщенного преобразования Фурье является экспонента, то $c_n = \delta^{(n)}$ и обратное преобразование имеет вид

$$\forall \varphi \in \Lambda, \ \forall x \in H, \ \ (T^{-1}\varphi)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \delta^{(n)}(x).$$

В ряде работ, в том числе в работах Ю.А. Дубинского, именно этот оператор называется преобразованием Фурье.

В §1.2 детально иследованы случаи совпадения множества значений обобщенного преобразования Фурье с распространенными и широко применяемыми в анализе пространствами: пространствами целых ($H(\mathbb{C})$) и аналитических в круге функций (H_R), весовыми пространствами целых функций с экспоненциальной шкалой ($[\rho, \sigma]$, $[\rho, \sigma)$, $[\rho, \infty)$.) Установлены необходимые и достаточные условия, в которых обобщенное преобразование Фурье представляет алгебраический и топологический изоморфизм между пространством, сильно сопряженным к локально выпуклому, и данными пространствами.

Пусть ядро обобщенного преобразования Фурье — целая вектор-функция порядка ρ и типа σ, $\rho \neq 0, \infty$, $\sigma \neq 0, \infty$.

Тогда необходимые условия алгебраического изоморфизма пространства H^* с $[\rho, \sigma]$ дает

Лемма 1.4. Пусть Λ совпадает с $[\rho, \sigma]$ поэлементно. В таком случае система $\{x_n\}$ является минимальной.

Если имеет место не только алгебраическое, но и топологическое соответствие H^* с $[\rho, \sigma]$, то можно указать и другие, более содержательные необходимые условия:

Теорема 1.3. Пусть $\Lambda = [\rho, \sigma]$. *Тогда система* $\{x_n\}$ *представляет собой слабый базис в* H;

$$\forall x \in H, \ \exists \{c_n\} \subset \mathbb{C}, \ \forall l \in H^*, \ l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, l(x_n).$$

При этом выполняется условие

$$\varlimsup_{n\to\infty} n^{-1/\rho} \sqrt[n]{|c_n|} < (\rho e \sigma)^{-1/\rho}. \tag{1}$$

Достаточные условия алгебраического изоморфизма пространства H^* с $[\rho, \sigma]$ устанавливает

Теорема 1.6. Пусть H *— бочечное пространство и система векторов* $\{x_n\}$ *представляет собой слабый базис в* H, *причем* $\forall x \in H$ *выполняется условие (1). Тогда оператор* T *осуществляет алгебраический изоморфизм пространств* H^* *и* $[\rho, \sigma]$.

А достаточные условия топологического изоморфизма этих пространств описывает

Теорема 1.8. Пусть H *— полное бочечное пространство и система векторов* $\{x_n\}$ *представляет собой слабый базис в* H, *причем* $\forall x \in H$ *выполняется условие (1.11), и* f *имеет порядок* $\rho \geqslant 1$. *Тогда оператор* T *осуществляет топологический изоморфизм пространств* H^* *и* $[\rho, \sigma]$.

Аналогичные результаты получены в данном параграфе для пространств $[\rho, \sigma)$, $[\rho, \infty)$, а в §1.3 — для пространств $H(\mathbb{C})$ и H_R.

В §1.4 приведены примеры, иллюстрирующие основные теоремы предыдущих параграфов. Многие из них являются достаточно общими и содержат в качестве частных случаев известнын результаты. В частности, рассматривается обобщенное преобразование Фурье пространств, сопряженных к пространствам целых и аналитических функций: $H(\mathbb{C})$, H_R, $\overline{H}_R$, $[\rho, \sigma]$, $[\rho, \sigma)$, $[\rho, \infty)$, а также к пространству быстро убывающих последовательностей

Σ, пространству $E[-1,1]$ бесконечно дифференцируемых вещественных или комплексных функций на отрезке $[-1,1]$ и к пространству быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций $\mathcal{J}$ (то есть, обобщенное преобразование Фурье обобщенных функций умеренного роста).

Вторая глава посвящена применению обобщенного преобразования Фурье к решению ряда задач современного анализа.

В §2.1 данной работы обобщенное преобразование Фурье применяется к нахождению порядка и типа линейного непрерывного оператора, действующего в локально выпуклом пространстве.

Теорема 2.2. Пусть в отделимом локально-выпуклом пространстве H *действует линейный непрерывный оператор* A *и* $f(\lambda)$ *— его собственная вектор-функция порядка* ρ *и тип* σ. *Тогда, если обобщенное преобразование Фурье с ядром* $f(\lambda)$ *устанавливает топологический изоморфизм между* H^* *и* $[\rho,\sigma]$ *(см. теорему 1.8.), то порядок оператора* A *равен* $\frac{1}{\rho}$, *а тип бесконечен.*

Аналогичные теоремы получены и для пространств $H(\mathbb{C})$, H_R, $[\rho,\sigma)$, $[\rho,\infty)$.

С помощью этих теорем, в частности, найдены характеристики оператора обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева D_f в пространствах $H(\mathbb{C})$, H_R, $[\rho,\sigma]$, $[\rho,\sigma)$, $[\rho,\infty)$, что позволило уточнить и дополнить некоторые оценки итераций такого оператора, полученные ранее А.Ф. Леонтьевым. Данные результаты также обобщают теоремы, полученные С.Н. Мишиным для оператора обычного дифференцирования. Также найдены характеристики оператора обобщенного сдвига и дифференциального оператора с переменными коэффициентами в пространствах $H(\mathbb{C})$ и H_R.

Найденные характеристики оператора D_f использованы для решения задачи о применимости к различным пространствам целых функций дифференциального оператора с постоянными коэффициентами в обобщенных производных Гельфонда-Леонтьева:

$$B(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n D_f^n(F).$$

В данной диссертации рассмотрена задача применимости оператора B к пространствам индуктивного типа — $[\rho, \sigma)$, $[\rho, \infty)$. Также в условиях существования оператора B найдены его характеристики в данных пространствах.

В §2.2 рассматривается применение обобщенного преобразования Фурье к нахождению общего вида линейного непрерывного функционала на пространствах векторнозначных функций. Установлены теоремы, описывающие общий вид линейного непрерывного функционала на пространстве целых векторнозначных функций, пространстве аналитических в круге векторнозначных функций ($\mathbf{H}_R(H)$) и весовом пространстве целых векторнозначных функций с экспоненциальной шкалой ($\mathcal{H}_\sigma^\rho(H)$).

Теорема 2.7. Пусть H — пространство Фреше, тогда каждый $m \in \mathcal{H}_R(H)^*$ представляется рядом

$$m(f) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n(x_n), \quad l_n \subset H^* \tag{2}$$

где последовательность $\{l_n\}$, имеет порядок $\beta \leqslant 0$, а при порядке $\beta = 0$ — тип $\alpha < R$. И обратно, любая последовательность функционалов $\{l_n\} \subset H^*$ с укзанными характеристиками определяет функционал $m \in \mathcal{H}_R(H)^*$ по формуле (2).

Теорема 2.8. Пусть H — пространство Фреше, тогда каждый $m \in \mathcal{H}_\sigma^\rho(H)^*$ представляется рядом (2), где последовательность $\{l_n\}$ имеет порядок $\beta \leqslant \frac{1}{\rho}$, а при порядке $\beta = \frac{1}{\rho}$ — тип $\alpha < (\rho e \sigma)^{-1/\rho}$. И обратно, любая последовательность функционалов $\{l_n\} \subset H^*$ с указанными характеристиками определяет функционал $m \in \mathcal{H}_\sigma^\rho(H)^*$ по формуле (2).

Данные теоремы сформулированы в терминах порядка и типа последовательности линейных непрерывных функционалов, поэтому для их применения необходим способ подсчета этих характеристик. Показано, что одним из эффективных способов их нахождения является использование обобщенного преобразования Фурье.

Теорема 2.9. Пусть выполняются условия теоремы 1.2. (следовательно, обобщенное преобразование Фурье устанавливает топологический изоморфизм H^* и Λ). Последовательность функционалов $\{l_n\} \subset H^*$ имеет порядок и тип тогда и только тогда, когда $\exists p_0 \in \mathcal{P}$, такое, что $\{\varphi_n\} \subset \Lambda^N_{p_0}$, при этом порядок β последовательности $\{l_n\}$ вычисляется по формулам:

$$\beta = \lim_{p \to \infty} \beta_p,$$

$$\beta_p = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln \|\varphi_n\|_p}{n \ln n}, \quad p > p_0,$$

а при $\beta \neq \pm\infty$ тип α последовательности $\{l_n\}$ вычисляется по формулам:

$$\alpha = \lim_{p \to \infty} \alpha_p,$$

$$\alpha_p = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\sqrt[n]{\|\varphi_n\|_p}}{n^\beta}, \quad p > p_0.$$

Здесь же рассмотрены разнообразные примеры.

В §2.3 исследуется применение обобщенного преобразования Фурье к задаче слабого и сильного представления элементов локально выпуклого пространства. Основополагающими в этом направлении являются работы Л.Эренпрайса, который с помощью классического преобразования Фурье получил представление целой функции в виде:

$$F(z) = \int\limits_{\mathbf{C}} \frac{e^{\lambda z} dm(\lambda)}{k(\lambda)}, \quad \forall F \in \mathbb{C},$$

где m - комплексная счетно-аддитивная мера ограниченной вариации на $\mathbb{C}, k(\lambda)$ — положительная функция.

Применение обобщенного преобразования Фурье дает представление

$$x = \int\limits_{\mathbf{C}} \frac{f(\lambda)dm(\lambda)}{k(\lambda)}, \quad \forall x \in H,$$

обобщающее указанное выше.

Также в данном параграфе рассматривается представление элементов пространства H в виде ряда по системе значений функции f. Для случая экспоненты оно изучалось Б.А. Тейлором, В.В. Напалковым, Ю.Ф. Коробейником.

Если $S = \{\lambda_j\}$ - дискретное слабо достаточное множество пространства Λ, то имеет место слабое представление векторов пространства H рядом вида:

$$x = \sum_{(\lambda_j)} c_j f(\lambda_j), \quad \forall x \in H.$$

Приведены условия, в которых данный ряд сходится сильно и абсолютно по топологии H.

Автор выражает признательность профессору В.П.Громову за постановку задачи, постоянное внимание и помощь при написании данной работы

Публикации автора по теме диссертации

[1] Панюшкин, С.В. Обобщенное преобразование Фурье и его применение к нахождению порядков и типов операторов. // Ученые записки / ОГУ. — Орел, 2003. — вып. 4. — С. 47-69.

[2] Панюшкин, С.В. Об общем виде линейного непрерывного функционала на пространствах аналитических векторнозначных функций. // Ученые записки / ОГУ. — Орел, 2003. — вып. 4. — С. 70-79.

[3] Панюшкин, С.В. Обобщенное преобразование Фурье и его применение к нахождению порядков и типов последовательностей функционалов. // Ученые записки / ОГУ. — Орел, 2005. — вып. 5. — С. 79-85.

[4] Панюшкин, С.В. Обобщенное преобразование Фурье и его применения. // Материалы ВЗМШ Современные методы теории функций и смежные проблемы. — 2005. — С. 176-177.

[5] Панюшкин, С.В. Обобщенное преобразование Фурье и его применение к нахождению порядка и типа операторов. // Всероссийская научно-практическая конференция: Вклад земляков-орловцев в развитие и становление российской науки, культуры и образования. Тезисы доклада. — 2003. — С. 36-37.

[6] Панюшкин, С В. Об общем виде линейного непрерывного функционала на пространствах аналитических векторнозначных функций. // Всероссийская научно-практическая конференция: Вклад земляков-орловцев в развитие и становление российской науки, культуры и образования. Тезисы доклада. — 2003. — С. 37-38.

Панюшкин Сергей Владимирович (Россия, Орел)

«Обобщенное преобразование Фурье и его применения»

Исследуется обобщенное преобразование Фурье пространства, сопряженного к локально выпуклому в случае, когда ядром преобразования является аналитическая векторнозначная функция. Полученные результаты применяются для решения ряда новых задач функционального анализа.

Panjushkin Sergey Vladimirovich (Russia, Oryol)

«Generalized Fourier transormation and its applications»

The generalized Fourier transormation of space, conjugate to the locally convex space, in case of kernel of transformation is analitical vector-valued function, is investigated. The obtained outcomes are applied to a solution of a series of new problems of the functional analysis.

Отпечатано в типографии МП «Переплетчик»

Орел, ул. Пушкина, 20

объем 0,9 п.л., тираж 100 экз., заказ № 378