На правах рукописи

ВАГУРИНА Ирина Вячеславовна

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ, ОСТАНОВЛЕННОГО В РАЗЛИЧНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ МОМЕНТЫ

01.01.05 - теория вероятностей
и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2004

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей и математической статистики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ
доктор физико-математических наук, профессор
А.Н.БОРОДИН

ОФИЦИАЛЬНЫЕОППОНЕНТЫ
доктор физико-математических наук, профессор
Я.И.БЕЛОПОЛЬСКАЯ
доктор физико-математических наук
Б.П.ХАРЛАМОВ

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

Зашита диссертации состоится "21" июня 2004 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в Санкт-Петербургском отделении Математического института имени В.А.Стеклова РАН по адресу 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского отделения Математического института имени В.А.Стеклова РАН. Санкт-Петербургском отделении

Автореферат разослан "14" мая 2004 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико математических наук А.Ю.Зайцев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория случайных процессов является важной составляющей частью теории вероятностей. Особый интерес в этой области представляет изучение распределений функционалов от диффузионных процессов. Аддитивные функционалы от броуновского движения имеют широкое применение как в современной теории вероятностей и математической статистике, так и в математической физике, финансовой математике и медицине.

Связь стохастического исчисления с теорией уравнений в частных производных берет свое начало с классической работы А. Н. Колмогорова "Об аналитических методах в теории вероятностей". Следующими результатами, касающимися методов вычисления распределений интегральных функционалов от процесса броуновского движения, были работы М. Каца. В дальнейшее развитие этих методов значительный вклад внесли П. Леви, Е. Б. Дынкин, К. Ито, Г. Маккин, Р. З. Хасьминский, Д. Рэй, А. В. Скороход, М. Йор, А. Н. Бородин и др. Количество работ, посвященных данной теме постоянно растет, что объясняется не только интересом теоретиков, но и запросами практики.

В работах вышеуказанных авторов решаются задачи о распределении функционалов от диффузионных процессов, остановленных в случайные моменты времени, такие как момент первого выхода на границу интервала, экспоненциальный момент, момент, обратный к аддитивному функционалу и момент, обратный к размаху. Используя различные комбинации максимумов и минимумов из этих моментов остановки можно получить новые случайные моменты. Изучению распределений функционалов от броуновского движения, остановленного в такие моменты, и посвящена значительная часть диссертации.

Для приложений теории вероятностей важно, чтобы решения задач выписывались в явном виде. Как известно, решение вопроса о распределениях функционалов от диффузионных процессов напрямую связано с решениями линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Как оказывается, дифференциальных уравнений, на которых основан вывод значительного числа формул для распределений функционалов, не так уж и много. Это объясняется в частности тем, что довольно редко удается найти дифференциальное уравнение второго порядка, содержащее два свободных параметра, решение которого выписывается в явном виде. По сути дела, к ним относятся известные дифференциальные уравнения, которые определяют специальные функции: Бесселя, Куммера и Уиттекера, функции параболического цилиндра. В заключительной части работы рассмотрен не изучавшийся ранее функционал от броуновского движения с линейным сносом. Для преобразования Лапласа распределения этого функционала выписано линейное дифференциальное уравнение второго порядка, для которого найдена подстановка, сводящая его к классическому гипергеометрическому уравнению. Построен диффузионный процесс, функция Грина которого отвечает именно этому уравнению.

Цель работы. Основной целью данной работы является систематическое изучение вопроса о распределении функционалов от процесса броуновского движения, остановленного в моменты максимума и минимума из различных случайных моментов. Рассмотрены все основные возможные классы моментов остановки, образованные с помощью операций максимума и минимума из момента первого выхода на границу интервала, экспоненциального момента, момента, обратного к аддитивному функционалу и момента, обратного к размаху.

Методика выполнения исследований. Для доказательства теорем и вычисления математических ожиданий функционалов были применены различные вероятностные и аналитические методы:

- применение прямого и обратного преобразований Лапласа для сведения уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям;

- использование вероятностного представления решений дифференциальных задач, для нахождения всех необходимых граничных условий в этих задачах;

- метод аппроксимации решений дифференциальных уравнений; .

- в приложениях используются методы решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты:

1) доказаны теоремы, позволяющие находить распределения функционалов от процесса броуновского движения, остановленных в момен-

ты максимума и минимума из момента первого выхода на границу интервала, моментов, обратных к аддитивным функционалам и момента, обратного к размаху;
2) приведены примеры, где в явном виде выписаны формулы для математических ожиданий функционалов от броуновского движения, остановленных в моменты, перечисленные в первом пункте;
3) рассмотрен производящий оператор диффузионного процесса, отвечающего гипергсометрическому уравнению и вычислены его основные характеристики: плотность меры скорости, шкала, функция Грина и переходная плотность;
4) получены явные формулы для математического ожидания функционалов специального вида от процесса броуновского движения с линейным сносом.

Практическая ценность. Результаты первой главы позволяют за счет различных комбинаций максимума и минимума из случайных моментов значительно расширить набор моментов остановки и получить новые формулы, позволяющие вычислять распределения различных функционалов от броуновского движения.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на *VIII* Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастическим методам в Йошкар-Оле (декабрь, 2001 г.), на *VIII* международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике (июнь, 2002 г.), на семинаре Института математической стохастики Геттингенского университета под руководством проф. М.Деппкера (апрель, 2002 г.), на семинаре по теории вероятностей и математической статистике в ПОМИ под руководством акад. И.А.Ибрагимова (апрель, 2004 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано четыре работы. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Объем работы. Диссертация сосотоит из введения и четырех глав и занимает 107 страниц. Библиография содержит 52 наименования отечественных и зарубежных авторов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования, вводятся обозначения и дается краткий обзор полученных результатов.

Введем необходимые обозначения. Пусть $W(s)$, $s \in [0,\infty)$, процесс броуновского движения. Обозначим через $\mathbf{E}_x$ и $\mathbf{P}_x$ соответственно математическое ожидание и вероятность по броуновскому движению при условии $W(0) = x$. Для любого события A и случайной величины ξ под математическим ожиданием $\mathbf{E}\{\xi(\omega); A\}$ подразумеваем $\mathbf{E}\{\xi(\omega)\mathbb{I}_A(\omega)\}$.

П.Леви было доказано, что с вероятностью единица для всех $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$ существует предел

$$\ell(t,x) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t \mathbb{I}_{[x,x+\varepsilon)}(W(s))ds,$$

где $\mathbb{I}_A(\cdot)$ - индикатор борелевского множества $A \subset \mathbb{R}$. Процесс $\ell(t,x)$, $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$, называется броуновским локальным временем.

Под кусочно непрерывной функцией на всей вещественной оси или на конечом замкнутом интервале мы подразумеваем функцию, имеющую конечное число точек разрыва, причем все разрывы первого рода. Если функция определена на конечом замкнутом интервале, то на концах интервала значение функции определено и совпадает с ее пределом справа на правом конце интервала и с пределом слева на левом конце.

Рассматриваются интегральные функционалы вида

$$A_0(s) := \int\limits_0^s f(W(v))dv,$$

где f - неотрицательная кусочно непрерывная функция, а также аддитивные функционалы более общего вида

$$A_\gamma(s) := \int\limits_0^s f(W(v))dv + \sum_{j=1}^m \gamma_j \ell(s,a_j),$$

где $\gamma_j \geqslant 0$, $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,m$, $m < \infty$.

Определим случайные моменты, рассматриваемые в данной работе.

Пусть τ - экспоненциально распределенный случайный момент времени с параметром $\lambda > 0$, не зависящий от броуновского движения, $\mathbf{P}(\tau > t) = e^{-\lambda t}$.

Момент первого выхода на границу интервала (a, b) определяется равенством

$$H_{a,b} := \min\{t : W(t) \notin (a, b)\}.$$

Для $t \geqslant 0$ определим моменты, обратные к аддитивному функционалу, следующим образом:

$$\nu_l(\beta_l, t_l) := \min\{s : \int_0^s g_l(W(v))dv + \sum_{k=1}^{q} \beta_{l,k}\ell(s, z_k) > t_l\},$$

где при $l = 1, \ldots, n$, $g_l(x)$ - неотрицательные кусочно непрерывные функции, $\beta_l = (\beta_{l,1}, \ldots, \beta_{l,q})$, $\beta_{l,k} \geqslant 0$, при $l = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, q$, $z_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, q$.

В частном случае, когда функции $g_l(x)$ являются индикаторами множеств, и $\beta_{l,k} = 0$, $l = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, q$, моменты ν_l называются моментами, обратными ко времени пребывания процесса.

И, наконец, $\theta_v := \min\{t : \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} W(s) - \inf_{0 \leqslant s \leqslant t} W(s) = v\}$ - момент, когда размах процесса $W(s)$ достигает заданного значения v., Такой момент называется обратным к размаху.

Максимум и минимум из двух случайных моментов времени μ_1 и μ_2 мы будем обозначать $\mu_1 \vee \mu_2$ и $\mu_1 \wedge \mu_2$ соответственно.

Результаты о распределении аддитивных функционалов от броуновского движения, остановленного в любой из выше перечисленных моментов, можно найти, например, в работах [1-4], [6-9]. Основным подходом, позволяющим получить эти результаты, является применение формулы Фейнмана-Каца.

Первая глава носит вспомогательный характер. В ней рассматриваются некоторые результаты, касающиеся распределений функционалов от диффузионных процессов, гипергеометрическое уравнение Гаусса и свойства его решений - гипергеометрических функций, а также необходимые вспомогательные утверждения.

Результаты **второй** и **третьей глав** позволяют за счет различных комбинаций максимума и минимума из случайных моментов значительно расширить набор моментов остановки, для которых можно получить эффективные методы вычислений распределений различных функционалов. Эффективные - в том смысле, что для конкретных примеров удается выписать в явном виде формулы для математического ожидания от функционала, а иногда и для самого распределения функционала.

В работе [5] были сформулированы теоремы для моментов $H_{a,b} \wedge \tau$ и $\theta_v \wedge \tau$. В [7], [10] получены результаты для момента $\nu_1(\beta_1, \tau_1) \wedge \nu_2(\beta_2, \tau_2) \wedge \dots \wedge \nu_n(\beta_n, \tau_n)$ и $\nu_1(\beta_1, \tau_1) \vee \nu_2(\beta_2, \tau_2) \vee \dots \vee \nu_n(\beta_n, \tau_n)$, где τ_l, $l = 1, \dots, n$ - независимые, экспоненциально распределенные случайные величины, которые не зависят от процесса броуновского движения. Во второй и третьей главах эти результаты значительно обобщены.

Во **второй главе** рассматриваются всевозможные комбинации операций максимума и минимума для момента $H_{a,b}$ и моментов $\nu_l(\beta_l, \tau_l)$, $l = 1, \dots, n$.

Первый параграф второй главы носит вводный характер.

Во втором параграфе доказываются теоремы, являющиеся основными в этой главе.

Для функционала $A_\gamma(s)$ и момента $H_{a,b}^{\wedge n} := H_{a,b} \wedge \nu_1(\beta_1, \tau_1) \wedge \dots \wedge \nu_n(\beta_n, \tau_n)$ справедлива теорема

Теорема 2.3. *Пусть $F(x)$, $f(x)$, $x \in [a, b]$, – кусочно непрерывные функции, $f(x) \geqslant 0$. Тогда функция*

$$U(x) := \mathbf{E}_x \Big\{ F(W(H_{a,b}^{\wedge n})) \exp(-A_\gamma(H_{a,b}^{\wedge n})) \Big\}$$

является единственным непрерывным решением задачи: для $x \in (a, b) \setminus \{z_1, \dots, z_q, a_1, \dots, a_m\}$

$$\frac{1}{2}U''(x) - \Big(\sum_{l=1}^{n} \lambda_l g_l(x) + f(x)\Big) U(x) = -F(x) \sum_{l=1}^{n} \lambda_l g_l(x), \qquad (1)$$

$$U'(z_k+) - U'(z_k-) = 2(U(z_k) - F(z_k)) \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \beta_{l,k}, \qquad k = 1, \dots, q, \qquad (2)$$

$$U'(a_j+) - U'(a_j-) = 2\gamma_j U(a_j), \qquad j = 1, \dots, m, \tag{3}$$

$$U(a) = F(a), \quad U(b) = F(b). \tag{4}$$

Замечание 2.1. В этой теореме и далее будем считать, что $F(a+) = F(a)$, $F(b-) = F(b)$ и $F(x)$ ограничена, если она определена на всей вещественной оси.

Замечание 2.2. В случае, когда $a = -\infty$ или $b = \infty$, соответствующие граничные условия заменяются на условия ограниченности функции $U(x)$ при $x \to -\infty$ или $x \to \infty$.

Замечание 2.3. Для кусочно непрерывных функций $F(x)$, $f(x)$ и $g(x)$ уравнение (1) нужно понимать следующим образом: оно имеет место во всех точках непрерывности функций F, f и g, а в точках разрыва этих функций его решение непрерывно вместе с первой производной.

Замечание 2.4. Если какая-нибудь из точек z_k совпадает с одной из точек a_j, то соответствующие условия из (2), (3) нужно объединить в условие

$$U'(z_k+) - U'(z_k-) = 2(U(z_k) - F(z_k)) \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \beta_{l,k} + \gamma_j U(z_k).$$

Аналогичные замечания выполняются для всех последующих результатов.

Далее, в этом же параграфе, получены теоремы для процесса броуновского движения, остановленного в момент $H_{a,b}^{\wedge n}$, но при условии, что минимум из этих моментов реализуется на одном из моментов $H_{a,b}$ или $\nu_l(\beta_l, \tau_l)$, $l = 1, \dots, n$. При этом показано, как в дифференциальной задаче изменяются граничные условия, условия на скачки производной и неоднородная часть дифференциального уравнения.

Пусть $0 \leqslant p_1 < p_2 < \dots < p_r \leqslant n$ - набор из r целых чисел от 0 до n, $r \leqslant n$. Обозначим $H_a = \min\{s : W(s) = a\}$ - момент первого достижения уровня a. При реализации момента $H_{a,b}^{\wedge n}$ на минимуме из момента H_a и момента $\nu^{\wedge r} := \min\{\nu_{p_1}(\beta_{p_1}, \tau_{p_1}), \dots, \nu_{p_r}(\beta_{p_r}, \tau_{p_r})\}$ верен следующий результат.

Теорема 2.6. *Пусть $F(x)$, $f(x)$, $x \in [a,b]$, – кусочно непрерывные функции, $f(x) \geqslant 0$. Тогда функция*

$$U(x) := \mathbf{E}_x\Big\{F(W(H^{\wedge n}_{a,b}))\exp(-A_\gamma(H^{\wedge n}_{a,b})); H^{\wedge n}_{a,b} = \min\{H_a, \nu^{\wedge r}\}\Big\}$$

является единственным непрерывным решением задачи:
для $x \in (a,b)\setminus\{z_1,\dots,z_q,a_1,\dots,a_m\}$

$$\frac{1}{2}U''(x) - \Big(\sum_{l=1}^{n}\lambda_l g_l(x) + f(x)\Big)U(x) = -F(x)\sum_{i=1}^{r}\lambda_{p_i}g_{p_i}(x),$$

$$U'(z_k+) - U'(z_k-) = 2U(z_k)\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\beta_{l,k} - 2F(z_k)\sum_{i=1}^{r}\lambda_{p_i}\beta_{p_i,k}, \qquad k = 1,\dots,q,$$

$$U'(a_j+) - U'(a_j-) = 2\gamma_j U(a_j), \qquad j = 1,\dots,m,$$

$$U(a) = F(a), \quad U(b) = 0.$$

В конце параграфа приведены примеры применения полученных результатов.

Наибольший интерес представляют случаи, когда рассматриваются произвольные комбинации операций максимума и минимума из случайных моментов. В третьем параграфе на примере моментов, в которые входят два момента $\nu_1(0,\tau_1)$, $\nu_2(0,\tau_2)$ и момент $H_{a,b}$, показано, как получаются результаты для функционала $A_0(s)$ для всевозможных комбинаций максимума и минимума из этих трех моментов.

В четвертом параграфе описан принцип построения дифференциальной задачи для общего случая, когда в определение случайного момента времени входят как операции минимума, так и операции максимума. Метод вычисления распределений функционалов, применимый для случая произвольного момента остановки, включающего операции максимума и минимума, описанный в работах [7], [10], применим и к моментам $H_{a,b}$ и $\nu_l(\beta_l,\tau_l)$, $l = 1,\dots,n$. Такой подход позволяет свести задачу в общем случае к аналогичным задачам для моментов, включающих в себя только операции минимума из меньшего числа моментов остановки, чем в исходной задаче. Все возможные варианты задач, которые при этом получатся, описаны в теоремах 2.1-2.6.

В третьей главе продолжены исследования, связанные с распределениями функционалов от процесса броуновского движения, остановленного в момент, образованный с помощью операций максимума и минимума. В число моментов, из которых выбираются максимальные и минимальные, включен момент, обратный к размаху.

В статье [8] было доказано (см. теорему 1.2), что задачи о распределении функционалов, остановленных в момент θ_v, сводятся к задачам о распределении функционалов, остановленных в моменты первого выхода на границу интервала. Во втором параграфе третьей главы доказана аналогичная теорема для момента $\theta_v^\nu := \theta_v \wedge \nu(\beta,\tau)$, где $\nu(\beta,\tau) := \min\{s : \int_0^s g(W(v))dv + \sum_{k=1}^q \beta_k \ell(s,z_k) > \tau\}$. Момент $H_{a,b}^\nu$ обозначает минимум из моментов $H_{a,b}$ и $\nu(\beta,\tau)$.

Теорема 2.1. *Пусть $f(x)$, $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, - кусочно непрерывные неотрицательные функции. Тогда при $x - v < z < x$*

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\{\exp(-A_\gamma(\theta_v^\nu)); W(\theta_v^\nu) < z, \theta_v^\nu = \theta_v\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{E}_x\{\exp(-A_\gamma(H_{z,z+v}^\nu)); W(H_{z,z+v}^\nu) = z\}.$$

Замечание 2.1. Аналогичный результат будет верен и при $x < z < x+v$. Для этого нужно заменить момент $H_{z,z+v}^\nu$ на момент $H_{z-v,z}^\nu$.

В нашем случае, по аналогии с результатом из [8], вопрос о распределении функционала в интересующий нас момент времени θ_v^ν сводится к вопросу о распределении функционала в момент $H_{a,b}^\nu$, для вычисления которого можно непосредственно воспользоваться теоремой 2.3 главы 2 при $n = 1$.

В третьем параграфе, как результат применения теоремы 2.1, получена формула для вычисления математического ожидания функционала от процесса броуновского движения, остановленного в момент θ_v^ν, без предположения, что он реализуется на конкретном моменте. Для этого заметим, что:

$$\mathbf{E}_x \exp(-A_\gamma(\theta_v^\nu)) =$$

$$= \mathbf{E}_x\{\exp(-A_\gamma(\theta_v^\nu)); \theta_v^\nu{=}\theta_v\} + \mathbf{E}_x\{\exp(-A_\gamma(\theta_v^\nu)); \theta_v^\nu{=}\nu(\beta,\tau)\}.$$

Это равенство объясняется тем, что минимум из моментов может реализоваться либо на моменте θ_v, либо на моменте $\nu(\beta,\tau)$.

Первое слагаемое вычисляется при помощи теоремы 2.1 и замечания 2.1. Второе вычисляется из вероятностных соображений. Тогда получаем следующее представление:

$$\mathbf{E}_x \exp(-A_\gamma(\theta_v^\nu)) = \int\limits_{x-v}^{x} \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{E}_x\{\exp(-A_\gamma(H^\nu_{z,z+v})); W(H^\nu_{z,z+v}) = z\}dz+$$

$$+\int\limits_{x}^{x+v} \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{E}_x\{\exp(-A_\gamma(H^\nu_{z-v,z})); W(H^\nu_{z-v,z}) = z\}dz+$$

$$+\int\limits_{x-v}^{x}\int\limits_{x-v}^{z}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\{\exp(-A_\gamma(\nu)); W(\nu) < z,$$

$$b \leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant \nu} W(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant \nu} W(s) \leqslant b+v\}dbdz+$$

$$+\int\limits_{x}^{x+v}\int\limits_{z-v}^{x}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\{\exp(-A_\gamma(\nu)); W(\nu) < z,$$

$$b \leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant \nu} W(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant \nu} W(s) \leqslant b+v\}dbdz.$$

Подинтегральные математические ожидания в первых двух слагаемых вычисляются непосредственно при помощи теоремы 2.3 второй главы при $n=1$, а математические ожидания в последних двух слагаемых находятся из теоремы 1.2 первой главы.

В четвертом параграфе приведена формула для момента $\theta_v^{a,b} := H_{a,b}\wedge\theta_v$. Если выполнено одно из трех условий

при $0 < v < \frac{b-a}{2}$

$$a < x < a+v, \tag{i}$$

$$b-v < x < b, \tag{ii}$$

при $\frac{b-a}{2} < v < b-a$

$$b-v \leqslant x \leqslant a+v, \tag{iii}$$

то справедлива формула

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-A_\gamma(\theta_v^{a,b}))\} =$$

$$= \int\limits_{\max\{x-v,a\}}^{\min\{x,b-v\}} \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{E}_x\{\exp(-A_\gamma(H_{z,z+v})); W(H_{z,z+v}) = z\}dz +$$

$$+ \int\limits_{\max\{x,a+v\}}^{\min\{x+v,b\}} \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{E}_x\{\exp(-A_\gamma(H_{z-v,z})); W(H_{z-v,z}) = z\}dz +$$

$$+\mathbf{E}_x\{\exp(-A_\gamma(H_{a,v+a})); W(H_{a,v+a}) = a\}\mathbb{I}_{(a,a+v)}(x) +$$

$$+\mathbf{E}_x\{\exp(-A_\gamma(H_{b-v,b})); W(H_{b-v,b}) = b\}\mathbb{I}_{(b-v,b)}(x).$$

В пятом параграфе рассмотрены приложения результатов, полученных в третьем и четвертом параграфах.

В шестом параграфе вычислено $\mathbf{E}_x\{\exp(-\alpha(\theta_v \vee H_{a,b}))\}$.

Четвертая глава посвящена изучению нового функционала от процесса броуновского движения с линейным сносом и диффузионного процесса, отвечающего гипергеометрическому уравнению Гаусса.

Первый параграф носит вводный характер.

Во втором параграфе изучается функционал от броуновского движения с линейным сносом: $\int\limits_0^t \frac{ds}{\mathrm{ch}^2 W_\mu(s)}$. В случае, когда вместо фиксированного момента t рассматривается независимый от броуновского движения экспоненциальный момент τ с параметром $\lambda > 0$, найдено явное выражение для функции

$$G(x) = \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\gamma\int\limits_0^\tau \frac{ds}{\mathrm{ch}^2 W_\mu(s)}\Big); W_\mu(\tau) < z\Big\}.$$

Она является единственным ограниченным решением дифференциальной задачи

$$\frac{1}{2}G''(x) + \mu G'(x) - (\lambda + \frac{\gamma}{\mathrm{ch}^2 x})G(x) = 0, \quad x \neq z,$$

$$G'(z+0)-G'(z-0)=-2\lambda$$

и имеет явное выражение

$$G(x)=\frac{\Gamma\Big(\frac{1}{2}+\sqrt{2\lambda+\mu^2}+\frac{\sqrt{1-8\gamma}}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2}+\sqrt{2\lambda+\mu^2}-\frac{\sqrt{1-8\gamma}}{2}\Big)}{\Gamma^2(1+\sqrt{2\lambda+\mu^2})}\times$$

$$\times\lambda e^{\mu(z-x)}e^{-\sqrt{2\lambda+\mu^2}|x-z|}\quad\begin{cases}F(-x)F(z), & x\leqslant z,\\ F(-z)F(x), & z\leqslant x,\end{cases}$$

где

$$F(x):=F\Big(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1-8\gamma}}{2},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1-8\gamma}}{2},1+\sqrt{2\lambda+\mu^2},\frac{1}{1+e^{2x}}\Big),$$

а $F(a,b,c,z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

В третьем параграфе получена следующая формула для $t=\infty$:

$$\mathbf{E}_x\exp\Big(-\gamma\int\limits_0^\infty\frac{ds}{\mathrm{ch}^2\,W_\mu(s)}\Big)=$$

$$=\frac{\Gamma\Big(|\mu|+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1-8\gamma}}{2}\Big)\Gamma\Big(|\mu|+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1-8\gamma}}{2}\Big)}{|\mu|\Gamma^2(|\mu|)}\begin{cases}\widetilde{F}(-x), & \mu>0,\\ \widetilde{F}(x), & \mu<0,\end{cases}$$

где $\widetilde{F}(x):=F\Big(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1-8\gamma}}{2},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1-8\gamma}}{2},1+|\mu|,\frac{1}{1+e^{2x}}\Big)$.

Как известно, однородному линейному дифференциальному уравнению второго порядка можно поставить в соответствие диффузионный процесс с определенным производящим оператором. В работе найден производящий оператор диффузионного процесса, для которого функция Грина выписывается через гипергеометрические функции. Таким оператором является

$$\mathfrak{L}f:=\frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}+(|\mu|+(\ln F(x))')\frac{df}{dx},$$

где $\mu\in\mathbb{R}$, $\gamma\in\mathbb{R}$.

Фундаментальные решения уравнения $\mathfrak{L}f = \lambda f$ имеют вид

$$\varphi(x) = e^{-x(\sqrt{\mu^2+2\lambda}+|\mu|)}\frac{F(x)}{\widetilde{F}(x)},$$

$$\psi(x) = e^{x(\sqrt{\mu^2+2\lambda}-|\mu|)}\frac{F(-x)}{\widetilde{F}(x)}.$$

Получено выражение для функции Грина:

$$G(x,y) = \frac{e^{(x-y)\sqrt{2\lambda+\mu^2}-|\mu|(x+y)}}{2\Gamma\Big(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1-8\gamma}}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1-8\gamma}}{2}\Big)\widetilde{F}(x)\widetilde{F}(y)}\times$$

$$\times\int\limits_0^1 t^{\frac{\sqrt{1-8\gamma}}{2}-\frac{1}{2}}(1-t)^{\sqrt{2\lambda+\mu^2}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1-8\gamma}}{2}}\Big(1-\frac{t}{1+e^{2y}}\Big)^{\frac{\sqrt{1-8\gamma}}{2}-\frac{1}{2}}dt\times$$

$$\times\int\limits_0^1 s^{\frac{-\sqrt{1-8\gamma}}{2}-\frac{1}{2}}(1-s)^{\sqrt{2\lambda+\mu^2}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1-8\gamma}}{2}}\Big(1-\frac{s}{1+e^{-2x}}\Big)^{\frac{-\sqrt{1-8\gamma}}{2}-\frac{1}{2}}ds.$$

Переходная плотность $p(v;x,y)$ в случае $x \leqslant y$ выражается формулой:

$$p(v;x,y) = C(v;x,y)\int\limits_0^\infty z e^{-\frac{z^2}{4v}}\big(1-e^{y-x-z}\big)^{\frac{-\sqrt{1-8\gamma}}{2}-\frac{1}{2}}e^{(y-x-z)\frac{\sqrt{1-8\gamma}}{2}-\frac{1}{2}}$$

$$\times\big(1+e^{-2x}\big)^{\frac{\sqrt{1-8\gamma}}{2}+\frac{1}{2}}\big(e^{-2x}+e^{y-x-z}\big)^{\frac{-\sqrt{1-8\gamma}}{2}-\frac{1}{2}}$$

$$\times\int\limits_0^1\frac{(1-t)\Big(t\big(1-\frac{t}{1+e^{2y}}\big)\Big)^{\frac{\sqrt{1-8\gamma}}{2}-\frac{1}{2}}}{\Big(\big(1-\frac{t}{1-e^{y-x-z}}\big)\big(1-\frac{t}{1+e^{y+x-z}}\big)\Big)^{\frac{\sqrt{1-8\gamma}}{2}+\frac{1}{2}}}dtdz,$$

где

$$C(v;x,y) = \frac{e^{-|\mu|(x+y)}\widetilde{F}^{-1}(x)\widetilde{F}^{-1}(y)}{2\Gamma\Big(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1-8\gamma}}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1-8\gamma}}{2}\Big)}\frac{e^{-\mu^2 v}}{2\sqrt{\pi}v^{3/2}}.$$

Выражение для переходной плотности при $y \leqslant x$ легко получить из выражения для переходной плотности при $x \leqslant y$ заменой $x \to y$ и $y \to x$.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. И. В. Вагурина, *Распределение интегральных функционалов от броуновского движения, остановленного в различные случайные моменты времени,* Обозр. прикл. и пром. математики, 8 ((2), 2001), 751-752.
2. И. В. Вагурина, *Распределения аддитивных функционалов от броуновского движения, остановленного в различные случайные моменты времени,* Зап. научи. семин. ПОМИ, **294** (2002), 55-76.
3. I. V. Vagurina, *On distributions of functionals of stopped Brownian motion,* 8th Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, Abstracts of Communications (2002), 327-328.
4. И. В. Вагурина, *Распределения аддитивных функционалов от броуновского движения, остановленного в моменты максимума и минимума из случайных времен,* Зап. научн. семин. ПОМИ, **298** (2003), 36-53.

Список литературы

1. T. Jeulin, M. Yor, *Sur les distributions de certaines fonctionnelles du mouvement brownien,* Seminar de Probab. XV, 1979/80. Lecture Notes in Math., **850** (1981), 210-226.
2. N. Ikeda, S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes,* North-Holland Publ.Co. and Kodansha ltd, Amsterdam, Oxford, New York, and Tokyo, 1981.
3. J. P. Imhof, *On the range of Brownian motion and its inverse process,* Ann.Prob., 13 (1985), 1011-1017.
4. M. Yor, *On some exponential functionals of Brownian motion,* Adv. Appl. Prob., **24** (1992), 509-531.
5. О. В. Андреева, *О распределении функционалов от броуновского движения, остановленного в случайный момент времени,* Дипломная работа, СПбГУ, математико-механический факультет, С.-Петербург, 2000.
6. А. Н. Бородин, *Распределение интегральных функционалов от процесса броуновского движения,* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **119** (1982), 19-38.
7. А. Н. Бородин, *О распределении функционалов от броуновского движения, остановленного в момент, обратный ко времени пребывания,* Зап. научн. семин. ПОМИ, **228** (1996), 39-56.
8. А. Н. Бородин, *О распределении функционалов от броуновского движения, остановленного в момент, обратный к размаху,* Зап. научн. семин. ПОМИ, **260** (1999), 50-72.
9. А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для случайных блужданий,* Труды Математического ин-та им. В. А. Стсклова РАН, Наука, С.-Петербург, 1994.
10. А. В. Либер, В. А. Смирнова, *О распределении функционалов от броуновского движения с линейным сносом,* Зап. научн. семин. ПОМИ, **244** (1997), 205-217.

ЛР № 040815 от 22.05.97.

Подписано к печати 29.04 2004 г. Формат бумаги 60Х84 1/16. Бумага офсетная.
Печать ризографическая. Объем 1 п.л. Тираж 100 экз. Заказ 3244.
Отпечатано в отделе оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ
с оригинал-макета заказчика.
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 26.