На правах рукописи

Такмазьян Андрей Куркенович

Влияние мениска на течения вязкой жидкости со свободной поверхностью

Специальность 01.02.05 — Механика жидкости, газа и плазмы.

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2003

Диссертация выполнена на кафедре аэромеханики и газовой динамики механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Научный руководитель —	доктор физико-математических наук, профессор В. Я. Шкадов.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Н. Н. Смирнов;
	доктор физико-математических наук, профессор В. Н. Варапаев.
Ведущая организация —	Институт проблем механики РАН.

Защита состоится 21 ноября 2003 г. в 16 ч. 20 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.89 при МГУ им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета Московского Государственного университета.

Автореферат разослан "17" октября 2003 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук А. Н. Осипцов.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В работе рассматриваются течения тонких пленок вязкой жидкости по поверхности твердого тела, движущегося или неподвижно погруженного в объем жидкости. Основное внимание уделено теоретическому исследованию течения в области мениска, где тонкий слой пленки переходит в основной объем жидкости. Такого рода течения возникают в ряде важных процессов и устройств современной техники, например, при получении защитных пленок покрытия на металлических, стеклянных, пластмассовых нитях; пленок оптически активного вещества на плоских подложках для кино- и фототехники; при образовании остаточных пленок на стенках цилиндрических и плоских капилляров при вытеснении из них вязкой жидкости другой менее вязкой жидкостью или газом; возникновении пленок загрязнителей при самопроизвольном растекании капель жидкости под воздействием градиентов поверхностного натяжения или массовых сил.

В технологии покрытия поверхностей тонкими слоями вещества и получения пленок широко распространен способ вытягивания из объема жидкости твердой основы (пластины или нити), на которой образуется пленка. При вытеснении вязкой жидкости из капилляров другой жидкостью или газом возникает течение с поверхностью раздела, которая включает в себя область динамического мениска вблизи передней точки движущегося фронта вытеснения и область кольцевой остаточной пленки вдали от передней точки. Еще один из способов нанесения тонкого слоя жидкости на твердую неподвижную подложку состоит в создании градиента температуры на поверхности контакта подложки с жидкостью. Вследствие этого возникает градиент поверхностного натяжения, который служит движущей силой, вызывающей растекание жидкости по подложке (эффект Марангони). При этом движение жидкости может быть направлено против действия массовых сил.

Основной проблемой в данных задачах является определение толщины пленки для данной жидкости при заданном режиме течения (скорости вытягивания или вытеснения, градиенте температуры). На данный момент существует необходимость в теории, позволяющей на основе быстрых и эффективных численных расчетов производить вычисление профиля динамического мениска и, соответственно, асимптотической толщины пленки вдали от мениска, с учетом влияния инерции и эффекта Марангони.

Цели работы

1. Исследовать влияние динамического мениска в течениях пленок покрытия при а) извлечении твердого тела из жидкого объема, б) при вытеснении жидкости из капилляра другой жидкостью, в) при самопроизвольном распространении жидких пленок по твердой поверхности под действием градиента поверхностного натяжения. 2. Примененить к исследованию данных течений метод последовательного сведения полной краевой задачи, включающей уравнение Навье–Стокса и граничные условия на неизвестной свободной поверхности, к системе одномерных уравнений для локальной толщины слоя и построить численный алгоритм, пригодный для проведения быстрых и эффективных расчетов. 3. Найти форму мениска и толщину формирующейся пленки для высокоинтенсивных движений, когда требуется включения в математические модели всех главных нелинейных членов, связанных с инерционной частью уравнений и кривизной поверхности раздела в граничных условиях. 4. Дать теоретическое истолкование новых экспериментов по вытеснению жидкостей из капилляров, нанесению покрытий при извлечении пластины из жидкого объема, термокапиллярному натеканию на вертикальную пластину.

Методы исследования

Используемый в диссертации метод исследований течений тонких пленок основывается на трех существенных моментах. Вводится малый параметр, характеризующий отношение производных искомых величин по продольной и поперечной координатам, и исходная краевая задача для уравнений Навье–Стокса сводится к задаче для уравнений типа пограничного слоя с самоиндуцированным давлением. Выбирается базисная система функций от поперечной координаты, искомые решения разлагаются по этой системе и методом Галеркина выводятся дифференциальные уравнения для коэффициентов разложений. Набор безразмерных параметров задачи приводится к простейшему виду при рассмотрении класса течений, в которых силы вязкости, тяжести и поверхностного натяжения имеют одинаковый порядок. Профиль мениска строится из решения полученной краевой задачи гладким склеиванием поверхностей динамического и статического менисков в некоторой промежуточной точке, подбираемой в процессе решения, либо сквозным расчетом всей поверхности динамического мениска, удовлетворяющей условиям на краях.

Достоверность результатов

Достоверность результатов диссертации обусловлена достоверностью используемого метода, успешно применявшегося при решении множества задач динамики тонких пленок, корректностью вычислений и подтверждением теории экспериментальными данными.

Научная новизна

В диссертации впервые получены следующие результаты. 1) Теоретически найдена зависимость толщины термокапиллярной пленки на вертикальной пластине от градиента поверхностного натяжения, соответствующая современным экспериментальным данным. 2) Теоретически найдена зависимость при инерционных режимах вытеснения толщины остаточной пленки на стенках круглого капилляра от скорости вытеснения, соответствующая данным экспериментов. 3) Показано существование семейства решений для формы фронта вытеснения жидкости из круглого капилляра при каждом фиксированном наборе внешних параметров: кроме монотонно сужающегося к передней точке фронта теоретически построены наблюдавшиеся в экспериментах немонотонные профили поверхности раздела с локальными максимумами толщины пленки. 4) Построено семейство решений для формы мениска в зависимости от числа Капицы и найдена зависимость асимптотической толщины пленки на вытягиваемой из объема жидкости пластине от числа капиллярности при больших числах Рейнольдса в условиях высокоинтенсивного нанесения с полным учетом инерционных членов и кривизны мениска.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертации могут служить для построения простых инженерных моделей пленочных течений с зоной мениска; для определения толщин получаемых в приложениях тонких пленок при интенсивных режимах нанесения покрытий, при воздействии на пленочное течение термокапиллярных эффектов, при возникновении немонотонных профилей границы раздела в процессе вытеснения жидкости из капилляра. Результаты могут быть применены в технологических приложениях, включающих покрытие твердой основы тонкой пленкой — фармакология, пищевая промышленность, защита от коррозии, производство многослойных композитов и полимерных пленок; для оценки возможного процента добычи нефти методом водозаполнения пласта.

Апробация диссертации

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на 5-й Международной конференции по механике жидкости Европейского механического сообщества, на конференции "Аэродинамика и газовая динамика в XXI веке" в МГУ им. М. В. Ломоносова (2003 г.), на IX, X и XI школах-семинарах "Современные проблемы аэрогидродинамики" под руководством академика Г. Г. Черного (2001, 2002 и 2003 гг.), конференциях "Ломоносовские чтения" (2002 и 2003 гг.), на научно-исследовательском семинаре "Течения в пористых средах" под руководством профессора Н. Н. Смирнова и научно-исследовательских семинарах кафедры аэромеханики и газовой динамики механико-математического факультета МГУ.

Публикации

Результаты диссертации достаточно полно отражены в восьми публикациях, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и приложения. В первой главе формулируется общий подход, три последующие отражают результаты решения трех основных задач, в приложение вынесены замечания, не существенные для общего понимания работы. Текст работы изложен на 95 страницах и включает 19 иллюстраций и список литературы из 55 наименований.

Краткое содержание работы

Введение

Во введении приведен обзор предыдущих теоретических и экспериментальных работ по теме диссертации и сформулированы новые результаты автора.

Глава I. Модельные эволюционные уравнения для многослойных пленочных течений

В данной главе выводятся модельные уравнения для многослойных пленочных течений, включающих зону мениска, на движущейся вертикальной осесимметричной поверхности, частично погруженной в жидкость.

Рассматривается течение без смешения n слоев вязких несжимаемых жидкостей, расположенных один поверх другого, так что первый слой течет по цилиндрической поверхности твердого тела, а n-й слой имеет поверхность, свободную от напряжений. Течение происходит в поле силы тяжести, симметрично относительно оси цилиндра и имеет нулевую азимутальную составляющую скоростей. Рассматриваются течения, для которых существенно влияние сил поверхностного натяжения на поверхности первого слоя.

В предположении малости капиллярного числа задачи (капиллярное число определяет отношение вязких сил к силам поверхностного натяжения), система уравнений Навье–Стокса и граничных условий, описывающих течение, сводится к системе уравнений типа пограничного слоя с самоиндуцированным (засчет поверхностного натяжения) давлением. При этом в граничных условиях сохраняются сильно нелинейные члены, которые малы в области пленочного течения, но велики в зоне мениска.

Уравнения для профилей границ раздела жидкостей получаются с помощью варианта метода Галеркина, примененного в 1967г. Шкадовым к исследованию волновых режимов пленочных течений на вертикальной стенке. Продольную компоненту скорости каждой жидкости можно приближенно представить в виде конечной суммы N членов разложения по некоторой полной системе функций. Уравнения баланса продольного импульса преобразуются с учетом уравнений неразрывности и интегрируются в поперечном направлении, каждое в пределах своего слоя, при этом учитываются кинематические граничные условия на границах раздела. Далее, преобразования с учетом граничных условий баланса нормальных напряжений и постоянства давления поперек каждого слоя, дают n нелинейных эволюционных уравнений для толщины пленки. Еще n уравнений получаются аналогичным интегрированием уравнений неразрывности поперек слоев с учетом кинематических условий на границе. Вместе с n кинематическими условиями равенства продольных скоростей и n условиями баланса касательных напряжений на границах разделов, мы получаем систему $2n$ нелинейных эволюционных уравнений и $2n$ нелинейных связей для n

функций безразмерной локальной толщины каждого слоя и $N \times n$ коэффициентов разложения. Если ограничиться первым шагом в применении прямого метода (Галеркина) и принять $N = 3$, то получается замкнутая система.

Глава II. Инерционные режимы нанесения покрытий

В данной главе рассмотрена задача нанесения покрытия на пластину при вытягивании ее в поле силы тяжести из жидкого объема. Получены новые результаты для инерционного режима вытягивания, наилучшим образом описывающие известные эксперименты.

Рассматривается вытягивание цилиндра радиуса R вертикально вверх со скоростью U в поле силы тяжести g из объема жидкости вязкости μ и плотности ρ. Результат для пластины получается в пределе $R \to \infty$. Безразмерные параметры, входящие в задачу, заданы выражениями

$$\varepsilon = \frac{h_0}{R}, \quad \delta = \mathrm{Ca}^{1/3}, \quad \mathrm{Ca} = \frac{U\mu}{\sigma}, \quad F = \varepsilon^2 \frac{\mathrm{Bd}}{\mathrm{Ca}}, \quad c = \varepsilon\delta\mathrm{Ca}\mathcal{A},$$
$$\mathrm{Bd} = \frac{\rho g R^2}{\sigma}, \quad \mathcal{A} = \frac{\rho\sigma R}{\mu^2},$$

здесь σ — поверхностное натяжение, h_0 — асимптотическая толщина пленки на цилиндре вдали от объема жидкости. Параметры Ca, Bd, $\mathcal{A}$ известны из условий проведения эксперимента, а ε нужно определить из решения краевой задачи для системы модельных уравнений. При вытягивании пластины нужно положить $\varepsilon = 0$, $\varepsilon R = h_0$ и по заданным параметрам Ca, $\gamma = \sigma\rho^{1/3}\mu^{-4/3}g^{-1/3}$ (число Капицы) определить $F = \rho g h_0^2/(U\mu)$, учитывая, что $c = \mathrm{Ca}^{11/6}\gamma^{3/2}F^{1/2}$.

Приближая продольную скорость полиномом второй степени, удовлетворяющим кинематическим условиям и условию равенства касательных напряжений нулю на свободной границе, получаем, используя метод главы I, систему обыкновенных дифференциальных уравнений для толщины пленки H и кривизны свободной поверхности $\varkappa$:

$$H' = -\frac{f}{(1-\delta^2 f^2)^{1/2}}, \qquad f' = \varkappa,$$

$$\varkappa' = \frac{3(H-1)}{H^3} + \frac{F(1-H^3)}{H^3} - \frac{1}{5}c\left[H^2 - 6\left(1 - \frac{1}{3}F\right)^2\right]\frac{H'}{H^3}. \tag{1}$$

Начальные условия для численного интегрирования системы (1) задаются в области перехода мениска в слой пленки постоянной толщины и определяются из решения уравнений, линеаризованных около асимптотического значения толщины пленки $H = 1$. При известном режиме вытягивания для данной жидкости (заданных параметрах Ca и γ) выбирается пробное значение F, тогда коэффициенты системы (1) полностью определены, и система (1) интегрируется численно в сторону убывания продольной координаты до выполнения одного из двух краевых условий перехода поверхности мениска в поверхность объема жидкости: $H' \to -\infty$, $\varkappa \to 0$. При этом, когда F принадлежит некоторому интервалу $(0, F_*)$, в процессе численного интегрировании достигается точка, в которой выполняется первое краевое условие, и профиль мениска нигде не имеет точки перегиба, а при $F > F_*$ у профиля мениска существует точка перегиба $\varkappa = 0$. При $F \to F_* + 0$ в точке перегиба имеем $H' \to -\infty$, т.е. значение F_* — искомое.

Из сравнения полученных результатов с экспериментами, проводившимися при малых значениях γ, следует, что данная теория хорошо описывает такие режимы течения. Кроме того, построенная теория наилучшим образом описывает эксперименты с инерционными режимами нанесения, когда число Капицы жидкости может значительно превышать единицу, а число капиллярности – быть конечным.

Глава III. Инерционное вытеснение жидкостей из капилляров

В данной главе дано развитие гидродинамической теории процесса вытеснения жидкости из капилляра, обеспечивающее возможность истолкования экспериментов при различных условиях и, прежде всего, для инерционных режимов вытеснения. Также получены решения, соответствующие немонотонным профилям фронта вытеснения, и обсуждена их связь с экспериментальными данными.

Рассматривается стационарное осесимметричное течение внутри круглого вертикального капилляра радиуса R при установившемся вытеснении из него жидкости вязкости μ_1 и плотности ρ_1 другой жидкостью с вязкостью μ_2 и плотностью ρ_2. Граница раздела жидкостей в области фронта вытеснения, движущегося с постоянной скоростью U_0, образует динамический мениск, который с удалением от передней точки фронта асимптотически переходит в цилиндрическую поверхность пленки вытесняемой жидкости, остающейся на стенках капилляра, и имеющей постоянную толщину h_0.

Задача содержит следующие независимые безразмерные комбинации

$$\varepsilon = \frac{h_0}{R}, \quad \mathrm{Ca} = \frac{\mu_1 U_0}{\sigma}, \quad A = \frac{\rho_1 \sigma R}{\mu_1^2}, \quad B = \frac{\rho_1 g R^2}{\mu_1 U_0}, \quad \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

Подход главы I при подстановке в уравнения баланса продольного импульса скоростей жидкости в виде, соответствующем точному решению этих уравнений в безынерционном приближении:

$$u^{(i)} = \breve{\gamma}_i(\xi)(1-\varepsilon\eta)^2 + \breve{B}_i(\xi)\ln(1-\varepsilon\eta) + \breve{A}_i(\xi), \qquad i = 1, 2.$$

(здесь ξ — продольная, η — поперечная к пленке координата) дает систему обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка для определения толщины пленки $H(\xi)$ и кривизны $\varkappa(\xi)$:

$$H'' = \varkappa(1+\delta^2 H'^2)^{3/2} - \frac{\varepsilon}{\delta^2}\frac{1+\delta^2 H'^2}{1-\varepsilon H},$$

$$\varkappa' = \varepsilon^2\left[4(\mu\breve{\gamma}_2 - \breve{\gamma}_1) + B(1-\rho)\right] + 2c\left[\frac{x^2}{x^2-1}\frac{\mathrm{d}G_1}{\mathrm{d}\xi} - x^2\rho\frac{\mathrm{d}G_2}{\mathrm{d}\xi}\right], \qquad (2)$$

где $\delta = \mathrm{Ca}^{1/3}$, $c = \varepsilon\,(\mathrm{Ca})^{4/3}A$. Функции $\breve{\gamma}_1(x)$, $\breve{\gamma}_2(x)$, $G_1(x)$, $G_2(x)$, где $x = (1-\varepsilon H)^{-1}$, содержащие параметры ε, μ, ρ, B, известны.

При заданных значениях параметров Ca, A, B, μ, ρ параметр ε подбирается так, чтобы при численном интегрировании от асимптотических начальных условий вдали от мениска при достижении передней точки фронта вытеснения (находящейся на оси капилляра) выполнялись условия гладкости поверхности раздела.

Рассмотрены случаи инерционного режима вытеснения жидкостей газом из горизонтальных капилляров, при значениях параметров $\mu = \rho = B = 0$, $A = 9800, 65700, 35100, 18900$. Результаты с хорошей точностью описывают эксперимент.

Получен следующий результат: при каждом фиксированном значении Ca существует последовательность решений с $n = 0, 1, 2, \ldots$ максимумами толщины остаточной пленки, каждое из которых соответствует динамически возможному стационарному режиму вытеснения жидкости из капилляра. Такие течения представляют последовательность выпуклых пузырей, соединенных тонкими перешейками. Такие решения обладают двумя свойствами: а) асимптотическая толщина пленки для них больше, чем у пленок с монотонной границей и растет с увеличением количества точек минимума; б) продольный размер каждого горба составляет примерно $3R$, поэтому протяженность зоны мениска больше $3R$ на этих решениях. Оба эти свойства согласуются с результатами экспериментальных наблюдений о том, что эффективная остаточная толщина пленок при вытеснении из капилляра пузырей растет с увеличением длины пузыря.

Глава IV. Течение пленки под воздействием эффекта Марангони

Рассматривается пленка, образующаяся под воздействием термокапиллярного эффекта Марангони на вертикальной плоской пластинке, погруженной одним концом в сосуд с жидкостью. Температура пластинки линейно убывает вверх по мере удаления от горизонтальной поверхности жидкости в сосуде. Поверхностное натяжение жидкости σ в первом приближении линейно зависит от температуры. В тонкой пленке температура поверхности принимается равной температуре на пластинке, таким образом, на свободной поверхности пленки существует градиент поверхностного натяжения τ, направленный против силы тяжести. Течения, вызываемые градиентом поверхностного натяжения, достаточно медленные, поэтому инерционными членами в уравнениях можно пренебречь. Задача содержит два параметра: $\delta = (\tau^2/\rho g \sigma)^{1/3}$, известный из условия проведения эксперимента, и $\alpha = \tau/(\rho g h_0)$, где h_0 — предельная толщина пленки вдали от мениска, α определяется в процессе решения. Система уравнений метода Галеркина с параболическим профилем продольной скорости имеет вид

$$\begin{aligned} H'' &= -\varkappa\left(1+\delta^2 H'^2\right)^{3/2}, \\ \varkappa' &= -\alpha^2 - \frac{\alpha}{H^3}\left(\frac{3}{2}-\alpha\right) + \frac{3\alpha}{2H}\,\frac{1}{(1+\delta^2 H'^2)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Решение системы (3) гладко склеивается в промежуточной точке с решением уравнения для статического мениска, из условий склеивания определяется значение параметра α — безразмерной толщины пленки. Расчетная зависимость $\alpha(\delta)$ с хорошей точностью описывает данные экспериментов. При введении в рассмотрение расклинивающего давления в тонком слое пленки, с изотермой $\Pi(h) = Ah^{-3} + Bh^{-2}$, можно описать результаты измерений экспериментов при нестандартных условиях (течение органического масла по серебряной пластине, покрытой слоем нихрома), приняв для констант A и B значения $A = 10^{-16}$ Дж или $B = 10^{-10}$ Н (для обычных условий $A = 10^{-21}$ Дж, $B = 10^{-12}$ Н).

Проведены также расчеты профиля движущегося фронта термокапиллярной пленки, хорошо соответствующие экспериментальным.

Выводы

Разработан эффективный метод сведения краевых задач для уравнений Навье–Стокса, описывающих неоднородные течения пленок с включением зон мениска, к модельным системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Во всех трех рассмотренных частных случаях двухточечные краевые задачи для модельных систем корректны и допускают построение решений численными методами. Тем самым обеспечена возможность математического моделирования реальных пленочных течений на режимах, которые до сих пор не поддавались теоретическому описанию.

В рамках единого подхода исследованы три группы течений, в которых формирующаяся на твердой поверхности жидкая пленка соединена с жидким объемом зоной мениска: вытягивание пластины из объема жидкости, вытеснение жидкости из круглого капилляра, термокапиллярное натекание пленки на неподвижную вертикальную пластину. Успешно рассчитаны инерциальные режимы течений при больших значениях капиллярного числа, для ряда случаев впервые получено согласование расчетных и экспериментальных данных о предельной асимптотической толщине пленки и форме ограничивающей поверхности раздела. Обнаружены явления: образование немонотонных поверхностей раздела при вытеснении жидкости из капилляра; существование критического значения числа Капицы, разделяющего режимы извлечения плоской поверхности из жидкого объема на два типа по характеру зависимости асимптотической толщины пленки от числа капиллярности; существование двух принципиально различающихся режимов натекания жидкой пленки на твердую поверхность против действия силы тяжести, вызываемых термокапиллярным эффектом Марангони.

Представленная теория течения неоднородных пленок при больших значениях безразмерных параметров, связанных с силой тяжести и инерционными членами, представляет существенное развитие асимптотического подхода, приводящего к формуле Ландау–Левича–Дерягина, при выводе которой эти параметры полагаются равными нулю.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Такмазьян А. К., Шкадова В. П., Шкадов В. Я.* Влияние мениска на течения вязкой жидкости со свободной поверхностью // Тезисы докладов IX школы-семинара "Современные проблемы аэрогидродинамики". Сочи, "Буревестник" МГУ. 5–14.09.2001. Изд-во МГУ.

2. *Такмазьян А. К., Шкадов В. Я.* Течение пленки жидкости под воздействием термокапиллярного эффекта Марангони // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Механ. 2002. № 3, 46–50.

3. *Такмазьян А. К., Шкадова В. П., Шкадов В. Я.* О формах поверхности раздела при вытеснении вязкой жидкости из капилляра // Тезисы докладов X школы-семинара "Современные проблемы аэрогидродинамики". Сочи, "Буревестник" МГУ. 5–15.09.2002. Изд-во МГУ.

4. *Такмазьян А. К., Шкадов В. Я., Шкадова В. П.* Стационарные капиллярные течения вязкой жидкости со свободной поверхностью, включающей область мениска // Тезисы докладов Всероссийской конференции "Аэродинамика и газовая динамика в XXI веке", посвященной 80-летию академика Г. Г. Черного. Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова. 27–30.01.2003. Изд-во МГУ.

5. *Такмазьян А. К.* О неединственности решения задачи вытеснения вязкой жидкости из круглого капилляра // Тезисы докладов научной конференции "Ломоносовские чтения", секция механики. Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова. Апрель 2003. Изд-во МГУ.

6. *Шкадов В. Я., Такмазьян А. К.* Инерционные режимы вытеснения вязкой жидкости из капилляра // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Механ. 2003. № 3.

7. *Шкадова В. П., Шкадов В. Я., Такмазьян А. К.* Пленочные течения вязкой жидкости, включающие зоны мениска // Отчет № 4650 НИИ Механики МГУ им. М. В. Ломоносова. Москва. 2003.

8. *Shkadov V. Ya., Shkadova V. P., Takmazian A. K.* Steady viscous capillary film flows including meniscu // 5-th Euromech Fluid Mechanics Conference 2003. Book of abstracts. p.446.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете
МГУ им. М.В. Ломоносова,

Подписано в печать 14. 10. 2003г.
Формат 60×90 1/16. Усл. печ. л. 0,75
Тираж 100 экз. Заказ 39

Лицензия на издательскую деятельность ИД В 04059,
от 20.02.2001г.

Отпечатано с оригинал–макета на типографском оборудовании
механико-математического факультета и Франко-русского
центра им. А.М. Ляпунова.