На правах рукописи

УТЕШЕВ Алексей Юрьевич

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИМВОЛЬНЫХ МЕТОДОВ ЛОКАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

05.13.16 — применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург — 1998

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор Зубов В.И.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор Гердт В.П.
доктор физико-математических наук, профессор Зайцев В.Ф.
доктор технических наук, профессор Кулаков Ф.М.

Ведущая организация: Институт математики и механики Уральского отделения РАН (Екатеринбург)

Защита состоится "17" ноября 1998 г. в 10 часов на заседании диссертационного совета Д.003.62.01 при Санкт-Петербургском институте информатики и автоматизации РАН по адресу: 199178, Санкт-Петербург 14 линия, д. 39

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации РАН

Автореферат разослан "16" октября 1998 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Копыльцов А.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В последние десятилетия наблюдается интенсивное развитие компьютерной алгебры (аналитических вычислений) — новой области информатики, направленной на автоматизацию процесса решения математических задач путем преобразования на компьютере математических выражений. Конечным результатом исследований в данной области являются программные системы аналитических вычислений (САВ), такие, например, как Maple, Mathematica, Axiom, Reduce, которые находят широкое применение в самых различных областях науки и техники. Среди различных факторов, влияющих на эффективность применения САВ для решения конкретной задачи, важнейшим является наличие достаточно развитого встроенного математического аппарата (типов данных и алгоритмов их преобразований). Поэтому, с точки зрения развития методов компьютерной алгебры, особый интерес представляют приложения в содержательных предметных областях, которые требуют разработки новых алгоритмических и математических методов для их решения.

Примером такой предметной области являются нелинейные алгебраические уравнения. Многие задачи теории дифференциальных уравнений, теории управления и оптимизации сводятся к поиску нулей системы полиномиальных уравнений

$$f_1(X) = 0, \dots, f_L(X) = 0 \quad (X := (x_1, \dots, x_L), n_j := \deg f_j) \tag{1}$$

с вещественными коэффициентами. Часто требуется получить точную информацию о числе вещественных нулей этой системы в определенной области пространства $\mathbb{R}^L$, например, описываемой системой полиномиальных неравенств

$$g_1(X) > 0, \dots, g_K(X) > 0 \tag{2}$$

также с вещественными коэффициентами. Искомое число нулей обозначается в дальнейшем

$$\mathrm{nrz}\{(1) \mid g_1(X) > 0, \dots, g_K(X) > 0\},$$

а задача его определения называется общей задачей локализации нулей.

Актуальность символьного подхода для ее решения уже в одномерном случае была установлена в исследованиях Д.Уилкинсона по оценке чувствительности вещественных корней полинома к возмущениям его коэффициентов. В общем случае проблема перерастает в задачу исследования свойств нулей системы (1) в зависимости от параметров в ней содержащихся. При специализации этих параметров система (1) еще может быть решена численными методами, но последние малоэффективны для задачи исследования нулей при динамике этих параметров. Здесь аналитическое представление решения или преобразование задачи к эквивалентной, но более простого вида, может оказаться незаменимым.

Разработанные А.Акритасом, Д.Коллинзом, Д.Бини, В.Паном и другими исследователями надежные символьные алгоритмы локализации нулей в одномерном случае широко реализованы в современных САВ. Сведением к одномерному случаю задача локализации в $\mathbb{R}^2$ решается в пакете CAD (цилиндрического алгебраического разложения), разработанного Д.Коллинзом и С.Макколламом.

Попытки распространения этих методов на бо́льшие размерности предпринимались неоднократно. Большинство из них использовали в качестве рабочего аппарата предложенный Б.Бухбергером в 1965 г. конструктивный алгоритм построения базиса Грёбнера идеала, порождаемого полиномами $f_1, \dots, f_L$. С помощью этого алгоритма систему (1), как правило, удается привести к эквивалентной ей (т.е. имеющей тот же набор нулей) системе вида

$$x_1 - \Phi_1(x_L) = 0, \dots, x_{L-1} - \Phi_{L-1}(x_L) = 0, \mathcal{X}_L(x_L) = 0, \qquad (3)$$

т.е. произвести **исключение** переменных $x_1, \dots, x_{L-1}$. Здесь $\Phi_1, \dots, \Phi_{L-1}$ — рациональные функции, а $\mathcal{X}_L$ — полином от x_L.

Однако эмпирически было установлено, что непосредственное применение алгоритма Бухбергера для получения системы (3) весьма затратно даже для современной вычислительной техники. Кроме того, для систем общего вида оказалось невозможной априорная оценка времени работы алгоритма. Это обстоятельство побудило исследователей искать комбинированные подходы как к исключению, так и к отделению переменных, при этом допускалось использование аппарата базисов Грёбнера на промежуточных стадиях. Некоторые из этих подходов основывались на идеях классической теории исключения и использовали различные детерминантные представления многомерного результанта $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_L)$. В последнее десятилетие особое внимание было привлечено к методу, намеченному Ш.Эрмитом. Идеи этого метода развивались в нескольких научных центрах США, Франции и ФРГ . Из отечественных исследований, примыкающих к этой тематике, следует отметить работы красноярской школы теории функций нескольких комплексных переменных (Л.А.Айзенберг, В.А.Болотов, А.К.Цих, А.П.Южаков и др.).

Цель работы заключается в разработке конструктивных и реализуемых на ЭВМ алгоритмов исключения переменных и локализации нулей системы полиномиальных уравнений (как частный случай — построение многомерной системы полиномов Штурма), и в применении этих алгоритмов к конкретным задачам нелинейной оптимизации, устойчивости, чувствительности.

Методы исследования. В работе используются методы классической высшей алгебры (теория исключения, теория ганкелевых квадратичных форм), теории функций комплексной переменной (многомерные вычеты), качественной теории дифференциальных уравнений и теория базисов Грёбнера.

Научная новизна. В диссертации впервые построены два рекурсивных по числу переменных детерминантных алгоритма одновременного исключения переменных и локализации нулей системы (1) общего положения. Порядок определителей — минимальный по сравнению с известными ранее. Для системы (1), не удовлетворяющей условиям общего положения, предложен новый, развивающий технику базисов Грёбнера, подход к ее решению, заключающийся в исключении части переменных. Указаны способы преобразования предлагаемых символьных методов локализации нулей в численные методы их нахождения.

Предложен и реализован новый алгоритм решения общей задачи полиномиальной оптимизации, заключающийся в нахождении детерминантного представления полинома от одной переменной, имеющего своими корнями критические значения целевой функции. Алгоритм не требует обычных предположений типа выпуклости.

В обобщение критерия Рауса устойчивости полинома разработаны алгоритмы проверки наличия всех корней полинома в произвольной алгебраической области комплексной плоскости.

Установлена чисто алгебраическая разрешимость проблемы вычисления индекса Кронекера–Пуанкаре для полиномиальных векторных полей и алгебраических многообразий и неразрешимость задачи построения полиномиальной функции Ляпунова для автономной системы двух дифференциальных уравнений в критическом случае полного вырождения матрицы линейного приближения.

Практическая значимость результатов диссертации определяется тем, что разработанные в ней методы, алгоритмы и рекомендации изначально ориентированы на решение проблем реализуемости математического аппарата на базе широкодоступных вычислительных средств типа персональных компьютеров. Система предлагаемых соискателем аналитических алгоритмов достаточно универсальна и адаптируема к особенностям конкретной области приложений. Будучи примененной на этапе качественного исследования математической модели объекта, она позволяет, во-первых, обеспечить контроль достоверности информации, получаемой применением различных вычислительных схем, во-вторых, существенно повысить эффективность и качество выполняемых расчетов, и, в-третьих, проанализировать поведение модели в зависимости от параметров. Кроме того, эта система полезна в качестве генератора достаточно сложных тестовых примеров для проверки сходимости разрабатываемых численных или численно-аналитических алгоритмов и отладки программ.

Положения, выносимые на защиту.

1. Два аналитических детерминантных метода исключения переменных и локализации вещественных нулей системы полиномиальных уравнений. Техника исследования свойств нулей системы уравнений в зависимости от содержащихся в ней параметров.

2. Алгоритм решения задачи полиномиальной оптимизации в ее общей постановке.

3. Техника построения коэффициентных критериев знакоопределенности однородного полинома, устойчивости системы дифференциальных уравнений в критическом по Ляпунову случае, наличия корней полинома $f(z)$ в произвольной алгебраической области комплексной плоскости.

Апробация работы. Диссертация в целом, а также ее отдельные разделы, докладывались на конференциях: 5-й Четаевской "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением" (Казань, 1987), "Метод функций Ляпунова" (Иркутск, 1989), CSAM'93 по компьютерным системам и прикладной математике (С.-Петербург, 1993), Interval'94 по интервальным и компьютерно-алгебраическим методам (С.-Петербург, 1994), CASC-98 по компьютерной алгебре в научных вычислениях (С.-Петербург, 1998), конференции, посвященной 90-летию Л.С.Понтрягина (Москва, 1998); на семинарах университета Твента (Энсхеде, Нидерланды), центра математики и информатики (CWI, Амстердам, Нидерланды), исследовательского института по символьным вычислениям (RISC, Линц, Австрия), технического университета г.Тимошиара (Румыния), на открытом семинаре PoSSo-95 (Ираклио, Греция); на городском семинаре "Информатика и компьютерные технологии" (СПИИРАН), а также на семинарах кафедры математического моделирования энергетических систем Санкт-Петербургского государственного университета.

Работа была поддержана совместным грантом Правительства Российской Федерации и Международного Научного Фонда (№JKF-100).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 20 печатных работах.

Структура и объем работы. Диссертация содержит 275 страниц и состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 167 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава содержит обзор классических результатов по установлению взаимного расположения корней полиномов $f(x)$ и $g(x)$ от одной переменной.

В §1.1 приводится сводка результатов из теории матриц с особенным акцентом на вычисление определителя и индексов инерции ганкелевой матрицы.

В §1.2 собраны некоторые ключевые определения и результаты классической теории полиномов от одной переменной: результант, дискриминант, субрезультанты, линейное представление наибольшего общего делителя полиномов $f(x)$ и $g(x)$.

Конструктивное вычисление этих объектов возможно разными способами, и в параграфах 1.3 и 1.5 указываются два из них. Приводимые результаты являются одномерными аналогами тех, что будут получены в главе 2. Способ локализации, излагаемый в §1.3, основан на результатах Якоби, Эрмита, Сильвестра и Кронекера. Рассматриваются три ганкелевы матрицы

$$S = [s_{j+k}]_{j,k=0}^{n-1}, \quad H = [h_{j+k}]_{j,k=0}^{n-1}, \quad C = [c_{j+k}]_{j,k=0}^{n-1}, \tag{4}$$

элементы которых вычисляются по рекуррентным формулам как коэффициенты рядов Лорана

$$\frac{f'}{f} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s_j}{x^{j+1}}, \quad \frac{f'g}{f} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h_j}{x^{j+1}}, \quad \frac{g}{f} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{x^{j+1}} \quad .$$

Эти коэффициенты являются значениями определенных симметрических рациональных функций от корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ полинома $f(x)$, (например, коэффициент s_j известен как j-я сумма Ньютона: $s_j = \lambda_1^j + \cdots + \lambda_n^j$). Сигнатура матрицы S оказывается равной числу различных вещественных корней полинома $f(x)$, а по индексам инерции матриц H или C устанавливается число вещественных корней $f(x)$, удовлетворяющих условию $g(x) > 0$ или $g(x) = 0$.

Преимущество при использовании "ганкелевого" подхода к локализации корней проиллюстрировано в §1.4 на примере двух известных задач. Одна из них — локализация собственных чисел вещественной матрицы A — представляет развитие метода Леверье. Вековое уравнение

$$f(x) := \det(A - xE) = 0 \quad \text{эквивалентно} \quad \det[s_{j+k}x - s_{j+k+1}]_{j,k=0}^{n-1} = 0 \ ,$$

где значение s_k может быть вычислено как $\operatorname{Sp} A^k$. При этом главные миноры $\Delta_j(x)$ второго определителя позволяют установить число различных собственных значений на произвольном интервале $]a,b[$:

$$\operatorname{nrz}\{f(x)=0 \mid a<x<b\} = V(1,\Delta_1(a),\ldots,\Delta_n(a)) - V(1,\Delta_1(b),\ldots,\Delta_n(b)).$$

Здесь V означает число знакоперемен в числовой последовательности.

Вторая задача — оценка чувствительности корней полинома к возмущениям его коэффициентов: для полинома

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n + \varepsilon x^j$$

требуется локализовать критические значения параметра ε, т.е. такие, при прохождении которых изменяется число вещественных корней.

Теорема 1 . *Критические значения параметра ε являются корнями полинома*

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = \mathcal{D}(f(x)) = \mathcal{R}_x(\Phi(x), G(x)+\varepsilon) \tag{5}$$

Здесь $\deg\mathcal{F}=n$, $\mathcal{D}$ *— дискриминант,* $\mathcal{R}$ *— результант,* $\Phi(x) := f(x) - \frac{1}{j}f'(x)x$, $G(x) := \frac{1}{j}\widetilde{q}_{j-1}(x)f'(x)$, *а* $\widetilde{q}_{j-1}$ *обозначает остаток от деления полинома* $[\{a_n-\Phi(x)\}/\{ja_nx\}]^{j-1}$ *на* $\Phi(x)$.

Однако выражения для коэффициентов полинома $\mathcal{F}(\varepsilon)$ часто оказываются более громоздкими, чем для коэффициентов $f(x)$. Так, например, если порядки коэффициентов полинома Уилкинсона

$$f(x) = (x+1)(x+2)\ldots(x+20)+\varepsilon x^{19} \tag{6}$$

не превышают 10^{20}, то соответствующий полином $\mathcal{F}(\varepsilon)$ имеет коэффициенты порядков не менее 10^{275}. Таким образом, для анализа чувствительности корней одного полинома мы должны найти корни другого с еще более сложными коэффициентами. Предлагаемый в работе выход из порочного круга заключается в преобразовании задачи к задаче установления числа

$$\operatorname{nrz}\{\Phi(x)=0 \mid G(x)+\varepsilon>0\}.$$

Соответствующая этой задаче ганкелева матрица $H(\varepsilon)$ из §1.3 имеет определитель равный $\mathcal{F}(\varepsilon)$, а ее главные миноры $H_j(\varepsilon)$ позволяют отделить корни этого полинома применением формулы

$$\operatorname{nrz}\{\mathcal{F}(\varepsilon)=0 \mid a<\varepsilon<b\} = V(1,H_1(b),\ldots,H_n(b)) - V(1,H_1(a),\ldots,H_n(a)).$$

При таком подходе само каноническое представление полинома $\mathcal{F}(\varepsilon)$ оказывается ненужным. В качестве иллюстрации получены оценки для примера (6): число вещественных корней не меняется при $-1.3508 \times 10^{-10} < \varepsilon < 1.4213 \times 10^{-10}$ и уменьшается по крайней мере на два при выходе ε за пределы этого интервала хотя бы на величину 10^{-14}.

Область применения предлагаемого подхода: он оказывается удобным в приложении к некоторым задачам, в которых полиномиальное по сути уравнение относительно переменной x не представлено в канонической форме, т.е. его коэффициенты при степенях x изначально не заданы. Идеология подхода заключается в преобразовании исходного уравнения к эквивалентному относительно определителя подходящей симметричной матрицы. Элементы матрицы полиномиально зависят от x, и последовательность ее главных миноров образует систему полиномов Штурма для исходного уравнения. Вычисление числовых их значений при подстановке произвольного значения параметра позволяет однозначно установить, сколько корней лежит слева и справа от него.

В §1.5 предлагается еще один подход к решению задачи о взаимном расположении нулей полиномов, условно названный "методом Безу". Метод сводит вычисление $\mathcal{R}(f,g)$ к нахождению определителя матрицы, составленной из коэффициентов остатков от деления $g(x)x^k$ $(k = 0,\dots,\deg f - 1)$ на $f(x)$. Устанавливается связь метода Безу с результатами параграфов 1.2 и 1.3.

Сведение вычисления числа

$$\mathrm{nrz}\{f(x) = 0 \mid g_1(x) > 0,\dots,g_K(x) > 0\}$$

при $K > 1$ к случаю $K = 1$ возможно с помощью приведенной в §1.6 формулы А.А.Маркова (мл.).

Целью **второй главы** является разработка метода Эрмита для задачи многомерной локализации. Необходимость в таком исследовании продиктована тем, что ни Эрмитом, ни его последователями не был произведен анализ условий, при которых метод может быть использован (самим Эрмитом метод был представлен лишь для случая $L = 2, n_1 = n_2 = 2$).

Теоретической основой метода служит определение многомерного результанта по Пуассону (§2.1). Для полиномов $f_1(X),\dots,f_L(X),g(X)$ общего положения результант вводится рекурсивно по L. Разложим $f_j(X)$ по убывающим степеням переменных:

$$f_j(X) = f_{jn_j}(X) + f_{jn_j-1}(X) + \ldots + f_{j0} \quad (j = 1,\dots,L). \tag{7}$$

Здесь $f_{jk}(X)$ — форма степени k. Если вычисленный по индуктивному предположению $(L-1)$–мерный результант старших форм $f_{jn_j}(X)$

$$\mathcal{A}_0 := \mathcal{R}(f_{1n_1}(x_1,\ldots,x_{L-1},1),\ldots,f_{Ln_L}(x_1,\ldots,x_{L-1},1)) \tag{8}$$

отличен от нуля, то система (1) имеет в точности $N = n_1 \cdots n_L$ нулей $\Lambda_k \in \mathbb{C}^L$. В этом случае L–мерный результант вводится формулой

$$\mathcal{R}(f_1,\ldots,f_L,g) := \mathcal{A}_0^m \mathcal{R}_X^g(f_1,\ldots,f_L), \quad \text{где} \quad \mathcal{R}_X^g := g(\Lambda_1)\cdots g(\Lambda_N). \tag{9}$$

Как симметрический полином нулей системы (1) результант должен рационально выражаться через коэффициенты полиномов $f_1,\ldots,f_L$ и g.

Для конструктивного вычисления результанта в главе разрабатываются два детерминантных способа. Первый заключается в построении подходящей блочно-ганкелевой матрицы и основан на нахождении многомерного логарифмического вычета по методу Якоби. На основании индукционного предположения можно построить $(L-1)$–мерные результанты

$$\mathcal{X}_j(x_j) := \mathcal{R}_{x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_L}(f_1(X),\ldots,f_L(X)), \quad (j=1,\ldots,L)$$

(называемые **элиминантами**) и найти полиномы $\mathcal{M}_{jk}(X)$, задающие их линейные представления

$$\mathcal{M}_{j1}(X)f_1(X) + \cdots + \mathcal{M}_{jL}(X)f_L(X) \equiv \mathcal{X}_j(x_j).$$

Обозначим $\mathcal{V}(X) := \det[\mathcal{M}_{jk}(X)]_{j,k=1}^L$ и $\mathcal{J}(X)$ — якобиан $f_1,\ldots,f_L$. Составим разложение

$$\mathcal{V}(X) \Big/ \prod_{j=1}^L \mathcal{X}_j(x_j) = \sum_{j_1,\ldots,j_L}^{\infty} d_{j_1,\ldots,j_L} x_1^{-j_1-1}\cdots x_L^{-j_L-1}\,. \tag{10}$$

Домножив его на полином $g(X)$, получим новое разложение:

$$g(X)\cdot\mathcal{V}(X) \Big/ \prod_{j=1}^L \mathcal{X}_j(x_j) = \mathcal{L}_0(X) + \sum_{j_1,\ldots,j_L}^{\infty} c_{j_1,\ldots,j_L} x_1^{-j_1-1}\cdots x_L^{-j_L-1}. \tag{11}$$

По построению, коэффициенты этого разложения рационально выражаются через коэффициенты полиномов $f_1,\ldots,f_L$ и g. С другой стороны, они дают значения некоторых симметрических рациональных функций нулей системы (1):

$$c_{j_1,\ldots,j_L} = \sum_{k=1}^N \frac{g(\Lambda_k)}{\mathcal{J}(\Lambda_k)} \alpha_{k1}^{j_1}\cdots\alpha_{kL}^{j_L} \quad (\text{здесь } \Lambda_k := (\alpha_{k1},\ldots\alpha_{kL})).$$

Следовательно, посредством формулы (11) значение произвольного симметрического полинома (или рациональной функции) на решениях системы (1) вычисляется как рациональная функция коэффициентов полиномов $f_1, \ldots, f_L$.

Подберем теперь произвольную систему из N мономов

$$\mathbb{M} := \{\Psi_1(X), \ldots, \Psi_N(X)\} \tag{12}$$

так, чтобы при подстановке в нее различных нулей Λ_j получались линейно независимые наборы. Упорядочим эти мономы произвольным образом и построим соответствующую ей квадратичную форму относительно столбца переменных $Y := [y_1, \ldots, y_N]^t \in \mathbb{R}^N$:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{g(\Lambda_j)}{\mathcal{J}(\Lambda_j)} \left[\sum_{p=1}^{N} y_p \Psi_p(\Lambda_j) \right]^2 = Y^t \cdot C \cdot Y. \tag{13}$$

Удалось установить, что по индексам инерции матрицы этой квадратичной формы при подходящем выборе полинома $g(X)$ можно получить полную информацию о решениях системы (1): найти и число вещественных из них, и число тех из них, что удовлетворяют системе неравенств (2), и, наконец, число тех из них, что являются нулями полинома $g(X)$.

Параграфы 2.2 — 2.6 посвящены различным способам выбора множества (12), нахождения значений симметрических функций решений и вычисления индексов инерции для матрицы квадратичной формы (13). В частности, показано, что в качестве множества (12) можно взять

$$\mathbb{M} := \{\Psi_p(X)\}_{p=1}^{N} := \{x_1^{p_1} \cdots x_L^{p_L} \mid 0 \le p_j < n_j\}. \tag{14}$$

При упорядочении мономов этого множества в обратном лексикографическом порядке $x_1 \succ x_2 \succ \ldots \succ x_L$ матрица C этой квадратичной формы становится блочно-ганкелевой. Так, например, для $L = 2$:

$$C := [C_{p+\ell}]_{p,\ell=0}^{n_1-1}, \quad \text{где} \quad C_q := [c_{q,j+k}]_{j,k=0}^{n_2-1}.$$

Наряду с матрицей C будем рассматривать еще три матрицы аналогичной структуры: D, S и H. Матрица D строится из коэффициентов разложения (10). Элементами матриц S и H являются соответственно выражения

$$s_{j_1,\ldots,j_L} := \sum_{k=1}^{N} \alpha_{k1}^{j_1} \cdots \alpha_{kL}^{j_L} \quad \text{и} \quad h_{j_1,\ldots,j_L} := \sum_{k=1}^{N} g(\Lambda_k) \alpha_{k1}^{j_1} \cdots \alpha_{kL}^{j_L}$$

(вычисляются как коэффициенты разложения (11) при замене $g(X)$ на $\mathcal{J}(X)$ или на $g(X)\mathcal{J}(X)$ соответственно). Для задачи локализации нулей системы (1) матрицы S, H и C играют ту же роль, что и матрицы (4) в одномерном случае.

Теорема 2 . *Справедливы равенства*

$$\det C = \mathcal{R}_X^g(f_1, \ldots, f_L) \det D, \quad \det S = \mathcal{R}_X^{\mathcal{J}}(f_1, \ldots, f_L) \det D\ , \tag{15}$$

$$\det H = \mathcal{R}_X^g(f_1, \ldots, f_L) \det S; \tag{16}$$

и при $\det D \neq 0$*:*

$$\begin{aligned} N - \operatorname{rank} C &= \operatorname{nrz}\{(1) \mid g(X) = 0\}, \\ \operatorname{nrz}\{(1)\} &= P(1, S_1, \ldots, S_N) - V(1, S_1, \ldots, S_N), \\ \operatorname{nrz}\{(1) \mid g(X) > 0\} &= P(1, H_1, \ldots, H_N) - V(1, S_1, \ldots, S_N). \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь P и V — числа знакопостоянств и знакоперемен в последовательностях главных миноров соответствующих матриц.

В диссертационной работе впервые удалось детализировать структуру условия $\det D \neq 0$ теоремы 2. Оказалось, что это условие формирует ограничения не на все коэффициенты полиномов $f_1, \ldots, f_L$, а только лишь на коэффициенты старших форм в разложениях (7):

$$\det D = \Omega / \mathcal{A}_0^{n_1 + \ldots + n_L - L + 1}.$$

Здесь Ω означает произведение $\sum_{j=1}^{L} n_j - L$ полиномов, представляющих собой определенные миноры детерминантного представления результанта (8). Условие $\mathcal{A}_0 \neq 0$ оказывается ключевым в том смысле, что при его выполнении всегда можно подобрать систему из N мономов (12), чтобы соответствующая матрица D была неособенной. Так, например, для $L = 2$ и $n_2 \geq n_1$ можно взять

$$\mathbb{M}_1 := \{x_1^{p_1} x_2^{p_2} \mid 0 \leq p_1 < n_1, 0 \leq p_2 < n_1 + n_2 - 2p_1 - 2\}. \tag{18}$$

Тогда

$$\det D := (-1)^{n_1(n_1-1)/2} [\mathcal{R}_1(\mathcal{A}_0) \cdots \mathcal{R}_{n_1-1}(\mathcal{A}_0)]^2 / \mathcal{A}_0^{n_1+n_2-1},$$

где $\mathcal{A}_0 := \mathcal{R}(f_{1,n_1}(x_1, 1), f_{2,n_2}(x_1, 1)$, а $\mathcal{R}_j(\mathcal{A}_0)$ — его j–й субрезультант. Теорема 2 останется справедливой при условии

$$\mathcal{A}_0 \neq 0, \mathcal{R}_1(\mathcal{A}_0) \neq 0, \ldots, \mathcal{R}_{n_1-1}(\mathcal{A}_0) \neq 0, a_{n_1 0}^{n_2 - n_1} \neq 0. \tag{19}$$

Здесь $a_{n_1 0}$ обозначает коэффициент при $x_1^{n_1}$ в $f_1(x_1, x_2)$.

В случае, когда $\operatorname{rank} C = N-1$, единственный общий нуль полиномов $f_1, \ldots, f_L$ и g может быть выражен рационально через их коэффициенты. Составим для этой цели матрицу $\widetilde{C}(t)$ той же структуры, что и матрица C, из элементов $c_{j_1+1,\ldots,j_L} - tc_{j_1,\ldots,j_L}$ (т.е. коэффициентов разложения (11) при замене $g(X)$ на $g(X)(x_1 - t)$). Коэффициенты при t составляют матрицу $(-C)$, где C определена (13). Разложим $(N-1)$-й главный минор матрицы $\widetilde{C}(t)$ по степеням t:

$$\widetilde{C}_{N-1}(t) = (-1)^{N-1}\left(C_{N-1}t^{N-1} + \Theta\, t^{N-2} + \ldots\right).$$

Теорема 3 . *Если $C_N = 0, C_{N-1} \neq 0$, то x_1-компонента единственного общего нуля полиномов $f_1(X), \ldots, f_L(X)$ и $g(X)$ может быть найдена по формуле:*

$$x_1 = s_{1,0,\ldots,0} + \Theta/C_{N-1}. \tag{20}$$

Аналогично можно найти и другие компоненты общего нуля. Теоремы 2 и 3 составляют основу процесса локализации нулей системы (1). Так, при выборе $g(X) := \mathcal{J}(X)(x_1 - t_1)\cdots(x_L - t_L)$ получаем зависящую от параметров $t_1, \ldots, t_L$ матрицу $C(t_1, \ldots, t_L)$, главные миноры C_j которой играют роль системы полиномов Штурма для системы уравнений (1): для произвольного параллелипипеда в $\mathbb{R}^L$ число

$$\operatorname{nrz}\{(1) \mid a_1 < x_1 < b_1, \ldots, a_L < x_L < b_L\}$$

может быть однозначно установлено по знакам этих миноров в его вершинах.

Указаны две возможности превращения *символьного* алгоритма отделения решений в *численные* методы приближенного их нахождения. Один из них представляет собой многомерный аналог метода Бернулли.

В §2.7 обсуждается еще один способ построения результанта, являющийся конструктивным развитием метода Безу из §1.5.

Определение. Назовем полином $h(X) \in \mathbb{C}[X]$ **редуцированным** относительно системы мономов (14), если он может быть представлен в виде линейной комбинации (с коэффициентами из $\mathbb{C}$) мономов из множества $\mathbb{M}$, заданного (14). Говорят, что полином $h(X) \in \mathbb{C}[X]$ **редуцируем по модулю** $f_1, \ldots, f_L$, если существуют полиномы $a_1, \ldots, a_L$ из $\mathbb{C}[X]$ такие, что полином

$$h_{red}(X) = h(X) - a_1(X)f_1(X) - \ldots - a_L(X)f_L(X)$$

является редуцированным относительно $\mathbb{M}$. Будем обозначать этот факт:

$$h(X) \to^{\mathbb{M}} h_{red}(X).$$

Алгоритм редукции можно рассматривать как многомерный аналог процесса деления полиномов от одной переменной. Предположим, что для любого $k = 1, \dots, N$ произведение $\Psi_k(X) \cdot g(X)$ редуцируемо по модулю $f_1, \dots, f_L$ относительно $\mathbb{M}$: $\Psi_k(X) \cdot g(X) \to^{\mathbb{M}} g_k(X)$, т.е. существуют полиномы $a_{k1}(X), \dots, a_{kL}(X)$ и константы $b_{k1}, \dots, b_{kN}$ такие, что

$$\begin{aligned} \Psi_k(X) g(X) &\equiv a_{k1}(X) f_1(X) + \dots + a_{kL}(X) f_L(X) + g_k(X), \\ g_k(X) &:= b_{k1} \Psi_1(X) + \dots + b_{kN} \Psi_N(X). \end{aligned} \tag{21}$$

Составленную из коэффициентов представлений (21) матрицу

$$\mathbf{B} = [b_{kj}]_{k,j=1}^{N} \tag{22}$$

Лоран назвал **матрицей Безу** и доказал что

$$\det \mathbf{B} = \mathcal{R}_X^g(f_1, \dots, f_L). \tag{23}$$

В развитие этого результата, в диссертации была доказана следующая теорема, устанавливающая параллель свойств матрицы $\mathbf{B}$ со свойствами блочно-ганкелевой матрицы C из теорем 2 и 3.

Теорема 4 . *Если матрицу* (22) *можно построить, то имеют место равенства:*

$$\begin{aligned} N - \operatorname{rank} \mathbf{B} &= \operatorname{nrz}\{(1) \mid g(X) = 0\}, \\ \mathbf{B} \cdot D &= C. \end{aligned} \tag{24}$$

Кроме того, если $\det \mathbf{B} = 0$ *и хотя бы одно из алгебраических дополнений* $\mathbf{B}_{Nj}$ *к элементам последней строки* $\det \mathbf{B}$ *отлично от нуля, то для единственного общего нуля* Λ *полиномов* $f_1, \dots, f_L$ *и* g *выполняется отношение:*

$$\Psi_1(\Lambda) : \Psi_2(\Lambda) : \dots : \Psi_N(\Lambda) = \mathbf{B}_{N1} : \mathbf{B}_{N2} : \dots : \mathbf{B}_{NN}. \tag{25}$$

Из равенства (24) и структуры матрицы D следует, что главные миноры блочно-ганкелевой матрицы C выражаются как линейные комбинации миноров соответствующих порядков матрицы Безу $\mathbf{B}$, при этом коэффициенты комбинаций оказываются зависящими лишь от коэффициентов старших форм в разложениях (7). Это обстоятельство позволяет использовать матрицу Безу не только для исключения переменных, но и для локализации нулей (если матрицу (22) строить для полиномов $\mathcal{J}(X)$ или $\mathcal{J}(X)g(X)$). Расчеты примеров показали, что матрица **B** строится быстрее матрицы C.

Предложенный Лораном алгоритм редукции оказался ошибочным. В §2.8 предлагается новый конструктивный алгоритм редукции и анализируются условия его применимости.

Алгоритм редукции для двух переменных заключается в решении последовательности линейных систем с коэффициентами, рационально зависящими от коэффициентов старших форм f_{1n_1} и f_{2n_2}. Для случая $n_1 = n_2 = \delta$ алгоритм формализуется с помощью следующей диаграммы:

$$\begin{matrix} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \end{matrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1^\delta \\ x_2^\delta \end{matrix} \right\} \hookrightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1^\delta x_2 \\ x_1 x_2^\delta \end{matrix} \right\} \hookrightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1^\delta x_2^2 \\ x_1^2 x_2^\delta \end{matrix} \right\} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1^\delta x_2^{\delta-1} \\ x_1^{\delta-1} x_2^\delta \end{matrix} \right\}$$

Здесь скобки $\{\ \}$ обозначают линейную систему относительно содержащихся в них мономов, тогда как $\hookrightarrow$ обозначает умножение редукций, полученных на предыдущем шаге на x_2 и x_1. Если мономы степени $\delta + k - 1$ редуцируемы и линейная система относительно $x_1^\delta x_2^k, x_1^k x_2^\delta$ совместна, то все мономы степени $\delta + k$ редуцируемы. Следовательно, для полной редуцируемости в случае $n_1 = n_2$ необходимо и достаточно, чтобы n_1 соответствующих определителей были отличны от нуля.

В случае $n_2 > n_1$ схема домножения остается прежней, но предварительно производится "подтягивание" меньшей степени до большей: из равенств

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} f_1(x_1, x_2) = 0, \quad (k_j = 0, 1, 2, \ldots;\ k_1 + k_2 < n_2 - n_1)$$

рекурсивно получаем редукции мономов $x_1^{n_1+k_1} x_2^{k_2}$.

Алгоритм редукции для $L > 2$ переменных заключается в решении последовательности линейных систем с коэффициентами, рационально зависящими от коэффициентов старших форм $f_{1\delta}, \ldots, f_{L\delta}$ полиномов системы (1). Этот процесс можно формализовать с помощью следующей диаграммы:

$$\begin{matrix} f_1 = 0 \\ \cdots \\ f_L = 0 \end{matrix} \Longrightarrow \left\langle \begin{matrix} x_1^\delta \Psi(x_2, \ldots, x_L) \\ \cdots \\ x_L^\delta \Psi(x_1, \ldots, x_{L-1}) \end{matrix} \ \middle|\ 0 \le \deg \Psi \le \delta - 1 \right\rangle_{(\delta)}$$

$$\downarrow$$

$$\left\langle \begin{matrix} x_2^\delta \Psi(x_1, x_3, \ldots, x_L) \\ \cdots \\ x_L^\delta \Psi(x_1, \ldots, x_{L-1}) \end{matrix} \ \middle|\ \begin{matrix} \delta - 1 < \deg \Psi \le 2\delta - 2 \\ \\ \Psi \in \mathbb{M} \end{matrix} \right\rangle_{(\delta-1)}$$

$$\downarrow$$

$$\downarrow$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} x_3^\delta\Psi(x_1,x_2,x_4,\ldots,x_L) & 2\delta-2<\deg\Psi\le 3\delta-3 \\ \ldots & \\ x_L^\delta\Psi(x_1,\ldots,x_{L-1}) & \Psi\in\mathbb{M} \end{array} \right\rangle_{(\delta-1)}$$

$$\downarrow$$

$$\ldots$$

$$\downarrow$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} x_k^\delta\Psi(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_L) & (k-1)(\delta-1)<\deg\Psi\le k(\delta-1) \\ \ldots & \\ x_L^\delta\Psi(x_1,\ldots,x_{L-1}) & \Psi\in\mathbb{M} \end{array} \right\rangle_{(\delta-1)}$$

$$\downarrow$$

$$\ldots$$

$$\downarrow$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} x_{L-1}^\delta\Psi(x_1,\ldots,x_{L-2},x_L) & (L-2)(\delta-1)<\deg\Psi\le (L-1)(\delta-1) \\ x_L^\delta\Psi(x_1,\ldots,x_{L-1}) & \Psi\in\mathbb{M} \end{array} \right\rangle_{(\delta-1)}$$

Здесь скобки $\langle\ \rangle$ обозначают конечную последовательность линейных систем, будем называть ее **каскадом**; индекс при скобках обозначает число систем в каскаде. Так, например, первый из указанных каскадов имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1^\delta \\ \ldots \\ x_L^\delta \end{array} \right\}_L \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1^\delta x_j,\ 1<j\le L \\ \ldots \\ x_L^\delta x_j,\ 1\le j<L \end{array} \right\}_{L(L-1)} \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1^\delta x_j x_k,\ 1<j,k\le L \\ \ldots \\ x_L^\delta x_j x_k,\ 1\le j,k<L \end{array} \right\}_{LC_L^2} \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow\cdots\hookrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} x_1^\delta x_2^{j_2}\cdots x_L^{j_L}, & j_2+j_3+\ldots+j_L=\delta-1 \\ \ldots & \ldots \\ x_1^{j_1}\cdots x_{L-1}^{j_{L-1}}x_L^\delta, & j_1+\ldots+j_{L-1}=\delta-1 \end{array} \right\}_{LC_{L+\delta-3}^{\delta-1}} \tag{26}$$

Здесь скобки $\{\ \}$ обозначают линейную систему относительно содержащихся в них мономов, индекс при скобках обозначает число мономов, которое для системы

$$\left\{ \begin{array}{c|c} x_k^\delta\Psi(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_L) & \deg\Psi=\mu \\ \ldots & \\ x_L^\delta\Psi(x_1,\ldots,x_{L-1}) & \Psi\in\mathbb{M} \end{array} \right\} \tag{27}$$

оказывается равным

$$(L-k+1)\left(C_{L+\mu-2}^{L-2}-C_{L-1}^1C_{L+\mu-2-\delta}^{L-2}+C_{L-1}^2C_{L+\mu-2-2\delta}^{L-2}-\cdots\right).$$

Так, самая последняя система диаграммы составлена относительно всего лишь двух мономов:

$$x_1^{\delta-1}\cdots x_{L-2}^{\delta-1}x_{L-1}^{\delta}x_L^{\delta-1} \quad \text{и} \quad x_1^{\delta-1}\cdots x_{L-2}^{\delta-1}x_{L-1}^{\delta-1}x_L^{\delta}.$$

Если мономы степени $\delta+\mu-1$ редуцируемы относительно $\mathbb{M}$ и линейная система (27) относительно указанных мономов степени $\delta+\mu$ совместна, то все мономы степени $\delta+\mu$ редуцируемы. Переход от системы (27) к следующей в последовательности (обозначен $\hookrightarrow$) осуществляется умножением редукций, полученных на предыдущем шаге, на переменные $x_k,\dots,x_L$, если новая система содержится в том же каскаде, и на переменные $x_{k+1},\dots,x_L$, если она оказывается первой в следующем каскаде. Следовательно, для полной редуцируемости достаточно выполнения $(L-1)(\delta-1)+1$ условий.

Оказывается, что условия редуцируемости практически совпадают с условием применения теоремы 2. Именно, ключевым снова является необращение в нуль результанта (8), при выполнении этого условия всегда можно подобрать систему мономов (12), альтернативную системе (14), относительно которой любой полином $g(X)$ может быть редуцирован. Так, например, для $L=2$ получаем следующий критерий.

Теорема 5 . *Для редуцируемости любого полинома* $g(x_1,x_2)\in\mathbb{C}[x_1,x_2]$ *по модулю* f_1,f_2 *относительно системы* (18) *необходимо и достаточно выполнения неравенств* (19).

В §2.9 устанавливается связь метода вычисления результанта как определителя матрицы Безу с детерминантным методом Маколея. Показано, что при подходящем выборе множества мономов $\mathbb{M}$ матрица (22) может быть получена в результате применения гауссовского алгоритма исключения к матрице Маколея. Для случая $L>2$ первые δ условий редуцируемости, генерируемые последовательностью (26), могут быть переформулированы в терминах вложенных миноров матрицы Маколея, сформированной из коэффициентов старших форм $f_{1\delta},\dots,f_{L\delta}$ для нахождения результанта $\mathcal{A}_0$, определенного формулой (8).

В §2.10 производится сравнение метода Безу с методом, основанном на построении базисов Грёбнера, широко используемом в последние десятилетия для исследования полиномиальных систем. Вычислим сначала базис Грёбнера $GB(\mathcal{I})$ идеала $\mathcal{I}(f_1(X),\dots,f_L(X))$ относительно произвольного упорядочения мономов. Обозначим через $\operatorname{Init}(GB)$ множество всех старших мономов полиномов из GB. В качестве базиса факторкольца $\mathbb{C}[X]/\mathcal{I}$ возьмем множество

$$\mathbb{M}=\left\{ \Psi(X)=x_1^{p_1}\cdots x_L^{p_L} \;\middle|\; \begin{array}{c}\Psi(X) \text{ не делится}\\ \text{на мономы из } \operatorname{Init}(GB)\end{array} \right\}. \qquad (28)$$

Если это множество конечно (т.е. идеал нульмерен) и содержит N^* элементов: $\mathbb{M} = \{\Psi_1(X) \equiv 1, \ldots, \Psi_{N^*}(X)\}$, то система (1) имеет в точности N^* нулей $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{N^*}$ (с учетом их кратностей).

Для любого полинома $h(X) \in \mathbb{C}[X]$, можно тогда вычислить его **нормальную форму** относительно $GB(\mathcal{I})$, т.е., по определению, единственный полином $h_{red}(X)$ из линейной оболочки множества (28), такой что $h(X) - h_{red}(X) \in \mathcal{I}$.

Фактически это определение соответствует приведенному ранее определению редукции $h(X)$ по модулю $f_1, \ldots, f_L$, а алгоритмам редуцируемости можно поставить в соответствие конструирование S-полиномов из алгоритма Бухбергера. Отличие метода, изложеннного в параграфах 2.7 и 2.8 заключается в априорном предположении о структуре базиса (28). Именно: этот базис предполагается совпадающим со множеством $\mathbb{M}$, определяемым формулой (14). Такое предположение корректно: его истинность устанавливается не по полному множеству коэффициентов полиномов, а лишь по подмножеству, содержащему коэффициенты старших форм f_{jn_j}. Так, например, ключевое условие редуцируемости — отличие от нуля выражения (8) — может быть сведено к проверке включения: $1 \in \mathcal{I}(f_{1n_1}(x_1, \ldots, x_{L-1}, 1), \ldots, f_{Ln_L}(x_1, \ldots, x_{L-1}, 1))$; т.е. приводит к анализу идеала от меньшего числа переменных. Для полиномов *общего положения* это предположение будет выполнено, равно как и остальные предположения, достаточные для редуцируемости.

С другой стороны, теория базисов Грёбнера дает возможность распространения метода параграфа 2.7 на случай, когда число решений N^* системы (1) оказывается меньшим числа $N = n_1 \ldots n_L$. Если сформировать матрицу $\mathbf{B}$ из коэффициентов нормальных форм произведений $\Psi_k(X) \cdot g(X)$ при $k = 1, \ldots, N^*$, то она будет обладать теми же свойствами, что и матрица (22). В-частности, будет справедлив аналог равенства (23):

$$\det \mathbf{B} = g(\Lambda_1) \ldots g(\Lambda_{N^*}).$$

Привлекательность возможности распространения метода параграфа 2.7 связана с задачей исключения переменых в системе (1), т.е. приведения ее к виду (3). Хотя для радикального нульмерного идеала *общего положения* эта задача и может быть решена построением базиса Грёбнера относительно лексикографического упорядочения мономов $x_1 \succ x_2 \succ \ldots \succ x_L$, но реальные расчеты показали, что эта процедура, как правило, весьма дорогостоящая. В ряде исследований последних лет эта трудность обходится посредством предварительного построения базиса идеала $\mathcal{I}$ относительно других способов упорядочения, например, *линейного по полной степени*.

Тот же прием применяется и в диссертационном исследовании с единственным отличием, что вместо базиса идеала $\mathcal{I}(f_1,\ldots,f_{L-1},f_L)$ относительно переменных $x_1,\ldots,x_{L-1},x_L$ предлагается вычислять базис идеала $\mathcal{I}(f_1,\ldots,f_{L-1})$ относительно $x_1,\ldots,x_{L-1}$; затем элиминанту по x_L строить как определитель матрицы Безу:

$$\mathcal{X}_L(x_L)=\mathcal{R}^{f_L}_{x_1,\ldots,x_{L-1}}(f_1,\ldots,f_{L-1}).$$

Преимущество этой модификации заключается в уменьшении числа полиномов и переменных, для которых необходимо вычислять базис Грёбнера. Недостаток — в том, что при построении множества (28) приходится учитывать возможную зависимость алгоритма построения базиса Грёбнера от переменной (параметра) x_L: при некоторых её значениях может, например, произойти понижение числа общих нулей полиномов $f_1,\ldots,f_{L-1}$. Положительные и отрицательные аспекты предложенного алгоритма иллюстрируются на примерах систем, в-частности тех, что служат общепризнанными тестами качества программных продуктов, разработанных на основе техники базисов Грёбнера. Даются времена счета всех этих примеров в сравнении со стандартными пакетами из системы компьютерной алгебры Maple V (Release 4 и Release 5), а также из специализированных пакетов для исследования полиномиальных систем Risa и FGB.

В приложении каждого из рассмотренных в главе методов вычисления многомерных результантов указаны способы построения системы (3), эквивалентной (1). Обладая представлением (3), мы можем свести задачу локализации к одномерной — относительно корней полинома $\mathcal{X}_L(x_L)$. Такая возможность обсуждается в §2.11; там же анализируется условие приводимости системы к виду (3) (для случая $L=2$). Однако если исходной задачей ставится именно локализация нулей системы, то не имеет смысла разделять две процедуры — исключение и отделение. Так, для метода Эрмита различие в методах исключения и отделения заключается лишь в выборе полинома условия: $g(X)$ или $g(X)\mathcal{J}(X)$; а метод исключения, основанный на соотношении (25) можно легко преобразовать в алгоритм отделения посредством равенства (24). С вычислительной точки зрения дополнительные затраты незначительны и полностью оправдываются существенностью получаемой информации. Трудности могут возникнуть при решении систем, не удовлетворяющих условиям редуцируемости из §2.8. При использовании результатов из §2.10 приходится учитывать возможность вычисления базиса Грёбнера относительно упорядочения по полной степени в конкретной системе аналитических вычислений. Идея исключения может тогда быть использована для исключения в системе части переменных. Это иллюстрируется на решении системы уравнений, описывающей возможные положения "параллельного робота", т.е. плоской многоугольной платформы, при фиксированных длинах опор и их точек крепления на земле и на платформе ($L = 8, n_j \geq 2$, общее число решений $N^* = 40$, из них 24 вещественных).

Из анализа проведенных в главе теоретических исследований вытекают следующие практические рекомендации.

1. Конечной целью алгоритма локализации нулей полиномиальной системы (1) следует считать построение блочно-ганкелевой матрицы H из теоремы 2. Для задачи исследования зависимости структуры множества решений от параметров не следует находить каноническое разложение для $\det H$ как полинома по этим параметрам; проще разбить параметрическое пространство "сеткой", получаемой вычислением определителя при частных значениях этих параметров, тем более, что этот процесс легко распараллеливается.

2. Искомую блочно-ганкелевую матрицу в одномерном и двумерном случаях следует строить непосредственно через симметрические функции решений системы. Но уже в случае трех переменных имеет смысл найти предварительно матрицу Безу, т.к. ее элементы вычисляются более быстро. Затем известной комбинацией миноров этой матрицы можно получить миноры блочно-ганкелевой.

3. При построении матрицы Безу не стоит предварительно проверять условия выполнимости процедуры редукции поскольку, во-первых, они проявляются непосредственно в ходе алгоритма, а во-вторых, будут выполнсными "с вероятностью 1". В критическом же случае (внешним признаком которого может служить, например, разреженность старших форм в разложениях (7)) стоит использовать предварительное построение базиса Грёбнера для линейного упорядочения мономов по полной степени.

Третья глава *посвящена приложениям алгоритмов исключения и отделения*, разработанных во второй главе, к различным конкретным задачам. Эти задачи объединены в две группы: одни связаны с теорией нелинейной оптимизации, другие — с качественной теорией систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Первая из решаемых задач — установление коэффициентных критериев знакоопределенности формы $F_m(X)$ произвольной степени. Практическое значение этой задачи достаточно велико: она важна в теориях оптимизации, устойчивости и управления. С помощью результатов главы 2 в §3.1 приведен конструктивный алгоритм получения этих условий. Форма $F_m(x_1,\dots,x_{L-1},x_L)$ будет положительно определенной тогда и только тогда, когда положительно определена форма $F_m(x_1,\dots,x_{L-1},0)$, и полином $F^{(1)}(x_1,\dots,x_{L-1}) := F_m(x_1,\dots,x_{L-1},1)$ положителен на всех вещественных нулях системы

$$\partial F^{(1)}/\partial x_1 = 0,\dots,\partial F^{(1)}/\partial x_{L-1} = 0. \qquad (29)$$

Последнее условие эквивалентно

$$\mathrm{nrz}\{(29)\} = \mathrm{nrz}\{(29) \mid F^{(1)} > 0\}$$

и может быть проверено с помощью теоремы 2; при этом оказывается, что условия знакоопределенности формы $F_m(x_1,\dots,x_{L-1},0)$ гарантируют выполнение условий теоремы 2 применительно к системе (29). Получающийся рекурсивный по числу переменных алгоритм оказывается чисто алгебраическим.

В диссертации подробно исследованы случаи $L = 2$ и $L = 3$. Особый интерес представляет случай, когда коэффициенты форм полиномиально зависят от параметров. Получаемые применением теоремы 2 условия образуют систему неравенств полиномиальных по параметрам. При исследовании совместности этой системы удается выделить главное: в пространстве параметров граница области положительно определенных форм задается уравнением **дискриминантной поверхности**, т.е.

$$\mathcal{D}(F) := \mathcal{R}_{x_1,\dots,x_{L-1}}(\partial F^{(1)}/\partial x_1,\dots,\partial F^{(1)}/\partial x_{L-1}, F^{(1)}) = 0. \qquad (30)$$

Имеется в виду, что при непрерывном изменении параметров нарушение свойства положительной определенности может произойти только при пересечении поверхности (30). Это обстоятельство часто позволяет уменьшить количество условий, существенных для положительной определенности. Так, например, для формы

$$F_4(x_1,x_2,x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \zeta\, x_1^2x_2x_3 + \eta\, x_1x_2^2x_3$$

эти условия сводятся к двум неравенствам:

$$A + B - 64 < 0, \quad 2^{16}(A + B - 64)^4 - AB[(A + B - 512)^3 -$$
$$- \ (A + B + 256)((A + B - 93056)^2 - 27AB - 8755167232)] > 0.$$

Здесь $A := \zeta^4$, $B := \eta^4$.

В §3.2 указывается чисто алгебраический способ вычисления индекса Кронекера–Пуанкаре для случая полиномиальных векторных полей и алгебраических многообразий.

Параграф 3.3 посвящен задаче поиска абсолютного и условного максимума полинома. Эта задача достаточно хорошо изучена в случае линейных ограничений или когда целевая функция (квази-)выпукла. В диссертации задача рассматривается в общей постановке. Если разложение целевой функции по убывающим степеням переменных

$$F(X) = F_m(X) + F_{m-1}(X) + \cdots + F_0$$

начинается с отрицательно определенной формы F_m (это свойство проверяется методами из §3.1), то традиционный поиск абсолютного максимума сводится к исследованию стационарных точек, т.е. нулей Λ_j системы

$$\partial F/\partial x_1 = 0, \dots, \partial F/\partial x_L = 0. \tag{31}$$

В диссертации предлагается сначала исследовать критические *значения*. Именно, эти значения являются корнями полинома от одной переменной

$$\mathcal{F}(z) := \mathcal{R}_X^{F(X)-z}(\partial F/\partial x_1, \dots, \partial F/\partial x_L) = (F(\Lambda_1) - z) \dots (F(\Lambda_N) - z).$$

Фактическое нахождение $\mathcal{F}(z)$ возможно любым методом вычисления многомерного результанта. Руководствуясь тем соображением, что конечной целью является локализация корней полинома $\mathcal{F}(z)$, переформулируем эту задачу в задачу определения

$$\mathrm{nrz}\{(31) \mid F(X) - z > 0\}.$$

Воспользуемся теоремой 2. Соответствующая блочно-ганкелевая матрица $H(z)$ имеет определитель, с точностью до множителя совпадающий с $\mathcal{F}(z)$ (формула (16)); упомянутый множитель может обратиться в нуль только при наличии кратных стационарных точек у $F(X)$ (вторая из формул (15)). При отсутствии таких точек можно воспользоваться равенством (17) для отделения критических значений, при этом оказывается, что условие теоремы $\det D \neq 0$ гарантируется знакоопределенностью формы F_m.

Теорема 6 . *Если $\mathcal{F}(z)$ не имеет кратных корней ($\mathcal{D}(\mathcal{F}) \neq 0$), то имеет место равенство*

$$\begin{aligned} \mathrm{nrz}\ \{(31) \mid a < F(X) < b\} &= \mathrm{nrz}\{\, \mathcal{F}(z) = 0 \mid a < z < b\,\} = \\ &= V(1, H_1(b), \dots, H_N(b)) - V(1, H_1(a), \dots, H_N(a)). \end{aligned} \tag{32}$$

Здесь $N = (m-1)^L$.

Иными словами: последовательность главных миноров $H_1(z), \dots, H_N(z)$ матрицы $H(z)$ играет роль системы полиномов Штурма для $\mathcal{F}(z)$. Локализовав с ее помощью максимальный корень, т.е. $\max F(X)$, и вычислив затем его значение (приближенно или точно), мы сможем восстановить координаты соответствующей стационарной точки как рациональные функции от этого значения — с помощью формул вида (20). Таким образом, предлагаемый подход к задаче оптимизации является обращением традиционной схемы *стационарные точки* $\to$ *критические значения*; этот подход не требует традиционных для проблемы нелинейной оптимизации предположений типа выпуклости. Заметим, что *явное* построение $\mathcal{F}(z)$, т.е. нахождение коэффициентов этого полинома, вовсе не является необходимым для локализации его корней. Для этой цели достаточно его представления в виде определителя матрицы H. Подстановка в этот определитель числового значения $z = a$ позволяет по знакам *числовых* миноров однозначно установить число корней слева и справа от этого значения.

Дополнительного исследования требует случай, когда у полинома $\mathcal{F}(z)$ имеется кратный вещественный корень. Здесь возможна ситуация, когда $\max F(X)$ не будет совпадать с максимальным вещественным корнем $\mathcal{F}(z)$, как это происходит, например, для

$$F(x_1, x_2) := -2x_1^4 - \frac{16}{3}x_1^3x_2 - 4x_1^2x_2^2 - \frac{4}{3}x_1x_2^3 - x_2^4 + \frac{7}{6}x_1^2 + x_1x_2 - \frac{5}{6}x_2^2.$$

Соответствующий полином $\mathcal{F}(z)$ имеет разложение

$$\mathcal{F}(z) \equiv z(z - 11/48)^2(z - 1/3)^2(z - 11/32)^4,$$

но его корни $z = 11/32$ и $z = 1/3$ отвечают невещественным стационарным точкам и не дают значения $\max F$ (в этом примере $\max F = F(\pm 1, \mp 1/2) = 11/48$). Использование формулы (32) для локализации критических значений дает то преимущество, что при расчетах происходит игнорирование таких "лишних" критических значений (соответствующих невещественным стационарным точкам). С другой стороны, формула (32) дает верное заключение о числе *вещественных* стационарных точек, в которых $F(X)$ принимает одинаковые значения.

Для $L = 1$ условие существования таких точек дается следующей теоремой.

Теорема 7 . *Для* $F(x) = A_0x^m + \dots + A_m$ *имеем*

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}(z)) = \Upsilon[\mathcal{D}(F')]^3\Phi^2(A_0, \dots, A_{m-1})$$

Здесь Υ — *константа, зависящая от* m, *а* Φ — *форма степени* $3(m-2)(m-3)/2$. *Установлено, что* $\Phi \equiv 1$ *для* $m = 3$, $\Phi \equiv \mathcal{R}(F', F''')/A_0$ *для* $m = 4$, *и* $\Phi \equiv \mathcal{D}(5[F''']^2 - 6F'F^{(5)})/A_0^{8-m}$ *для* $m = 5, 6$.

Задача поиска $\max F(X)$ в области, описываемой полиномиальным неравенством $G(X) \geq 0$, решается в той же идеологии. Она разбивается на две подзадачи: локализации максимума $z_>$ целевой функции внутри области:

$$\operatorname{nrz}\{(31) \mid F(X) > z, G(X) > 0\} \tag{33}$$

и локализации условного максимума $z_=$ на границе области:

$$\operatorname{nrz}\left\{\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial G}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial G}{\partial x_1} = 0,\ (j = 2,\ldots,L), G(X) = 0 \middle| F(X) > z\right\}. \tag{34}$$

Применение теоремы 2 и формулы Маркова позволяет построить полиномиальные по z системы для нахождения этих чисел.

Числа (33) и (34) не являются взаимно независимыми. Так, при $L = 2$ и в предположении, что кривая $G(x_1, x_2) = 0$ состоит только из одного овала, они связаны между собой соотношением

$$\begin{aligned}
&\operatorname{nrz}\{\,(31) \mid G > 0, \mathcal{H}(F) > 0\,\} - \operatorname{nrz}\{\,(31) \mid G > 0, \mathcal{H}(F) < 0\,\} = \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}(\operatorname{nrz}\{\,G(x_1,x_2) = 0,\ \mathcal{J}(G,F) = 0 \mid \mathcal{J}(\mathcal{J}(G,F),F) > 0\,\} - \\
&\quad - \operatorname{nrz}\{\,G(x_1,x_2) = 0,\ \mathcal{J}(G,F) = 0 \mid \mathcal{J}(\mathcal{J}(G,F),F) < 0\,\}),
\end{aligned}$$

вытекающим из теории индекса Кронекера–Пуанкаре (§3.2). Здесь $\mathcal{J}$ — якобиан, $\mathcal{H}$ — гессиан, а первое слагаемое в левой части равенства дает число точек локального экстремума $F(x_1, x_2)$ внутри области $G(x_1, x_2) \geq 0$.

Аналогично исследуется и задача поиска $\max F$ в области, заданной системой полиномиальных неравенств. Отметим, что предложенный алгоритм не требует предварительной проверки этой области на непустоту. Но при необходимости задача о совместности системы неравенств (2) и локализации ее множества решений $\mathbb{S}$ может быть решена применением метода Эрмита. Для случая $L = 1$ и $L = 2$ такая возможность иллюстрируется в §3.4. Для случая $L = 1$ множество $\mathbb{S}$ является объединением составляющих интервалов, границами которых служат корни полиномов системы. С помощью результатов главы 1 можно вычислить

$$\begin{aligned}
\operatorname{nrz}_j &:= \operatorname{nrz}\{g_j = 0 \mid g_1 > 0, \ldots, g_{j-1} > 0, g_{j+1} > 0, \ldots, g_K > 0\}, \\
\operatorname{nrz}_{j,]a,b[} &:= \operatorname{nrz}\{g_j = 0 \mid g_1 > 0, \ldots, g_{j-1} > 0, g_{j+1} > 0, \ldots, g_K > 0, a < x < b\},
\end{aligned}$$

причем в §3.4 показано, как оптимально организовать подсчет второго числа, имея расчеты для первого. Тогда в развитие результата Мезерва получаем

Теорема 8 . *Если $\mathcal{R}(g_j,g_k) \neq 0$ для всех $1 \leq j < k \leq K$ и $\mathcal{D}(g_j) \neq 0$ для всех $1 \leq j \leq K$, то для совместности системы (2) необходимо и достаточно выполнения хотя бы одного из следующих условий:*

a) $g_1(0) > 0, \dots, g_K(0) > 0$;

b) *существует индекс $j \in \{1, \dots, K\}$ такой, что $\mathrm{nrz}_j > 0$. В этом случае общее число интервалов, составляющих $\mathbb{S}$, равно $\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{K} \mathrm{nrz}_j + I\right)$, где*

$$I = \begin{cases} 0, & \text{если } +\infty \notin \mathbb{S}, -\infty \notin \mathbb{S}; \\ 1, & \text{если только одна из } +\infty, -\infty \text{ принадлежит } \mathbb{S}; \\ 2, & \text{если } +\infty \in \mathbb{S}, -\infty \in \mathbb{S}, \end{cases}$$

а число составляющих интервалов, лежащих внутри заданного интервала $]a,b[$ ($a \notin \mathbb{S}, b \notin \mathbb{S}, a \neq -\infty, b \neq +\infty$), равно $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K} \mathrm{nrz}_{j,]a,b[}$.

В случае $L = 2$ исследование множества решений системы (2) *общего положения* на ограниченность сводится к одномерному случаю. Если g_{jm_j} означает старшую форму в разложении $g_j(x,y)$, то для ограниченности достаточно, чтобы система неравенств

$$g_{1m_1}(x_1, 1) \geq 0, \dots, g_{Km_K}(x_1, 1) \geq 0$$

была несовместна. При выполнении этого условия, задача о совместности системы (2) может быть сведена к подходящей задаче полиномиальной оптимизации. Именно, для совместности необходимо и достаточно, чтобы максимум полинома $g_1(x_1, x_2)$ в области $\mathbb{R}^2$, описываемой системой неравенств

$$g_2(x_1, x_2) \geq 0, \dots, g_K(x_1, x_2) \geq 0,$$

был положителен. А для решения этой задачи можно воспользоваться алгоритмом параграфа 3.3. Также, как и для одномерного случая, показано, как организовать из расчетов, произведенных для установления непустоты множества $\mathbb{S}$, расчеты для локализации точек этого множества, т.е. для вычисления полиномиальной последовательности от параметров t_1 и t_2, позволяющей установить наличие решений системы в произвольном прямоугольнике в $\mathbb{R}^2$. Использование метода Эрмита имеет и то преимущество, что детализирует и структуру границы множества $\mathbb{S}$. Например, в развитие результата И.Г.Петровского приходим к следующему критерию.

Теорема 9 . *При отрицательной определенности формы $g_{1m_1}(x_1,x_2)$, разность между числом положительных и числом отрицательных овалов кривой $g_1(x_1,x_2)=0$ равна*

$$(\sigma(H_*)+\sigma(H_{**}))/2.$$

Здесь σ обозначает сигнатуру матриц H_* и H_{**} из теоремы 2, составленных для системы $\partial g_1/\partial x_1=0$, $\partial g_1/\partial x_2=0$ и для полиномов условий $g(x_1,x_2):=g_1(x_1,x_2)$ и $g(x_1,x_2):=g_1(x_1,x_2)\mathcal{H}(g_1)$ соответственно.

Параграф 3.5 посвящен двум задачам теории устойчивости. Первая из них касается обобщения свойства устойчивости полинома $f(z)\in\mathbb{R}[z]$, когда для последнего требуется указать критерий нахождения всех его корней внутри произвольной области комплексной плоскости $z=x+iy$, описываемой полиномиальным неравенством $g(x,y^2)>0$.

Задача решается сведением к вещественному случаю в $\mathbb{R}^2$:

$$f(z)=F_1(x,Y)+iyF_2(x,Y)$$

где $Y:=-y^2$, и

$$\begin{aligned} F_1(x,Y) &:= f(x)+\frac{f''(x)}{2!}Y+\frac{f^{(4)}(x)}{4!}Y^2+\dots,\\ F_2(x,Y) &:= \frac{f'(x)}{1!}+\frac{f'''(x)}{3!}Y+\frac{f^{(5)}(x)}{5!}Y^2+\dots \end{aligned}$$

Систему уравнений $F_1(x,Y)=0, F_2(x,Y)=0$ методами главы 2 можно свести к эквивалентной

$$\mathcal{X}(x):=\mathcal{R}_Y(F_1,F_2)=0,\quad Y-\theta(x)=0$$

в предположении $\mathcal{D}(\mathcal{X})\neq 0$.

Теорема 10 . *Если $\mathcal{D}(\mathcal{X})\neq 0$, то полином $f(z)$ имеет в точности*

$$\operatorname{nrz}\{f(x)=0\mid g(x,0)>0\}+\operatorname{nrz}\{\mathcal{X}(x)=0\mid g(x,\theta(x))>0,\theta(x)<0\}$$

корней внутри области $g(x,y^2)>0$.

Техникой главы 1 указанные числа можно установить. В развитие критерия устойчивости Рауса получен следующий результат.

Теорема 11 . *Для того чтобы все корни полинома $f(z)$ лежали в области $g(x,y^2)<0$ достаточно, чтобы у каждого полинома*

$$\varphi_1(z) := \mathcal{R}_x(f(x), z-g(x,0)) \text{ и } \varphi_2(z) := \mathcal{R}_{x,Y}(F_1(x,Y), F_2(x,Y), z-g(x,Y))$$

знаки коэффициентов были одинаковыми.

Для некоторых классов областей это условие оказывается и необходимым.

Теорема 12 . *Для того чтобы все корни полинома $f(z)$ лежали в области $x+y^2<0$, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты $f(z)$ были одного знака, и все коэффициенты $\varphi_2(z) := \mathcal{R}_Y(F_1(z+Y,Y), F_2(z+Y,Y))$ были одного знака.*

Вторая задача, рассматриваемая в §3.5, касается устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений

$$dx_j/dt = F_j(X)+\dots \quad (j=1,\dots,L) \tag{35}$$

(в дальнейшем будем говорить просто об устойчивости системы) в критическом по Ляпунову случае полного вырождения линейного приближения. Правые части системы (35) представляют собой функции, аналитические в окрестности начала координат, разложение которых начинается с форм $F_j(X)$ степени $n>1$. Требуется найти условия устойчивости в терминах коэффициентов этих форм. В случае существования одномерного инвариантного многообразия, проходящего через начало координат, т.е. нетривиальных вещественных нулей у системы полиномиальных уравнений

$$F_{sk}(X) := x_kF_s(X) - x_sF_k(X) = 0 \quad (s\in\{1,\dots,L\}\setminus\{k\}) \tag{36}$$

эти условия были сформулированы Г.В.Каменковым: для асимптотической устойчивости системы (35) необходимо, чтобы на всех этих решениях полином

$$x_1F_1(X)+\dots+x_LF_L(X)$$

был отрицателен; при $L=2$ это условие оказывается и достаточным.

С помощью результатов глав 1 и 2 условия этого критерия проверяются чисто алгебраически. Для $L=2, n=3$ эти условия удалось развить и на случай, когда система (36) не имеет нетривиального вещественного нуля. Установлено, например, что для системы

$$dx_1/dt = a_{11}x_1^3 + a_{12}x_2^3, \quad dx_2/dt = a_{21}x_1^3 + a_{22}x_2^3 \tag{37}$$

асимптотическая устойчивость имеет место при $a_{11} < 0, a_{22} < 0$ или при $a_{11} < 0, a_{22} > 0, a_{11}^2 a_{12} + a_{22}^2 a_{21} > 0$.

В работе был произведен сравнительный анализ изложенного выше способа исследования устойчивости с тем, что основан на поиске функций Ляпунова. Теорема Красовского–Зубова гарантирует существование однородной *функции* $V(X)$, решающей задачу об устойчивости системы (35). В диссертации исследовалась возможность выбора $V(X)$ в более узком классе — среди однородных *полиномов*, т.е. форм (перспектива от их использования казалась тем более привлекательной, что алгоритмы из §3.1 дают возможость проверки знакоопределенности этих форм). Результат, однако, оказался негативным уже для случая $L = 2, n = 3$.

Теорема 13 . *Для любого наперед заданного натурального M существует асимптотически устойчивая система* (37) *такая, что производная любой формы $V(x_1, x_2)$ степени M в силу этой системы*

$$F_1(x_1, x_2)\partial V(x_1, x_2)/\partial x_1 + F_2(x_1, x_2)\partial V(x_1, x_2)/\partial x_2$$

не будет отрицательно определенной функцией.

Такая система получается при подходящем выборе параметров α и ε в семействе

$$a_{11} = \alpha - \varepsilon, a_{12} = -1, a_{21} = 1, a_{22} = -\alpha, \quad \text{где} \quad 0 < \varepsilon < \alpha < 1 \tag{38}$$

(например, при $\alpha = 1/2, \varepsilon = 1/4$ не существует функции Ляпунова в виде квадратичной формы). Идея доказательства основывается на том факте, что полиномиальные интегралы заданной степени M для семейства (38) при $\varepsilon = 0$ существуют лишь для конечного числа значений параметра α.

В **Заключении** сформулированы основные результаты, полученные в диссертации:

1. Получено конструктивное развитие метода Эрмита: разработана техника построения многомерной системы полиномов Штурма для локализации вещественных решений систем полиномиальных уравнений.

2. Предложен новый метод исключения переменных в системе уравнений, основанный на построении подходящей блочно-ганкелевой матрицы.

3. Дано конструктивное развитие метода Безу построения многомерного результанта; на его основе создана схема исключения переменных; проанализированы связи с известными методами исключения, в том числе использующими технику базисов Грёбнера.

4. Для построенных алгоритмов произведено исследование влияния параметров, входящих в систему уравнений, и показано преимущество использования этих алгоритмов в тех задачах локализации, в которых каноническое представление полиномов исходно не задано (локализация собственных чисел матрицы, оценка чувствительности корней полинома к возмущению его коэффициентов).

5. Предложен новый аналитический метод решения задачи многомерной полиномиальной оптимизации, заключающийся в сведении ее к задаче локализации корней полинома от одной переменной.

6. Установлены критерии устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений в критическом по Ляпунову случае полного вырождения матрицы линейного приближения. Доказана невозможность установления свойства устойчивости выбором функций Ляпунова в классе полиномов. Для полиномиальных векторных полей конструктивно показана чисто алгебраическая разрешимость задачи вычисления индекса Кронекера–Пуанкаре алгебраического многообразия.

7. В обобщение критерия Рауса устойчивости полинома создан алгоритм проверки наличия всех корней полинома в произвольной алгебраической области комплексной плоскости.

Основные публикации по теме диссертации.

1. Утешев А.Ю. Использование однородных форм в качестве функций Ляпунова.// Депон. в ВИНИТИ №2942-В87 Деп.24.04.87, "Вестник ЛГУ, сер.мат." 13 с.

2. Утешев А.Ю., Шуляк С.Г. Критерий асимптотической устойчивости системы двух дифференциальных уравнений с однородными правыми частями.// Дифференц. уравнения. 1987. Т.23. №6. С.1009–1014

3. Утешев А.Ю. Однородные полиномы:знакоопределенность и использование в качестве функций Ляпунова.// Тезисы 5-й всесоюзной Четаевской конференции по теории устойчивости. 1987. Казань, С.98

4. Утешев А.Ю. Критерий положительной определенности однородных форм.// Вестник ЛГУ,сер.1. 1988. №1. С.110–112

5. Утешев А.Ю. Необходимые и достаточные условия положительной определенности однородных форм.// В сб. "Вопросы механики и процессов управления", Л.ЛГУ. 1989. №11. С.87–90

6. Утешев А.Ю., Шуляк С.Г. Метод Эрмита отделения решений систем алгебраических уравнений и его применения.// Депон. в ВИНИТИ №6319-В89 Деп.18.10.89, "Вестник ЛГУ,сер. 1" — 42 с.

7. Утешев А.Ю. К вопросу существования полиномиальной функции Ляпунова.// Дифференц. уравнения. 1989. Т.25. №11. С.2010–2013

8. Uteshev A.Yu., Shulyak S.G. Conditions for sign–definiteness of homogeneous forms and possibility of using polynomials as Lyapunov Functions.// Abstracts of the Second Colloquium on Differential Equations, Plovdiv. 1991. P. 298

9. Uteshev A.Yu., Shulyak S.G. Determination of Kronecker–Poincaré index of algebraic curve relative to algebraic field on the plane.// Abstracts of the Second Colloquium on Differential Equations, Plovdiv.1991. P. 299

10. Утешев А.Ю. Вычисление индекса Кронекера–Пуанкаре алгебраических кривых относительно алгебраических полей на плоскости.// Дифференц. уравнения. 1991. Т.27. №12. С.2181–2183

11. Uteshev A.Yu., Shulyak S.G. Hermite's method of separation of solutions of systems of algebraic equations and its applications.// Linear Algebra and its Applications. 1992. V. 177. P.49–88

12. Kalinina E.A., Uteshev A.Yu. Determination of the number of roots of a polynomial lying in a given algebraic domain.// Linear Algebra and its Applications. 1993. V. 185. P. 61–81

13. Uteshev A.Yu. On the existence of a polynomial Lyapunov function.// Proceedings of the Int. Conf. on Differential Equations — Equadiff'91, Barcelona. 1993. Singapore, World Scientific. V.2. P. 943–946

14. Uteshev A.Yu., Shulyak S.G., Cherkasov T.M. Hermite's method for separation of solutions of algebraic equations systems and its realization in REDUCE.// Abstracts of the Int. Congress on Computer Systems and Applied Mathematics - CSAM'93. St.-Petersburg, 1993. P. 114

15. Uteshev A.Yu., Shulyak S.G., Cherkasov,T.M. Systems of algebraic inequalities: consistency and structure of the set of solutions.// Abstracts of the Int. Conf. on Interval and Computer–Algebraic Methods in Science and Engineering – Interval'94. St.-Petersburg, 1994. P.237–238

16. Утешев А.Ю., Черкасов Т.М. Локализация решений систем алгебраических уравнений и неравенств. Метод Эрмита.// Доклады АН России. 1996. Т.347. №4, С.451–453

17. Bikker P., Uteshev A.Yu. Elimination à la Bézout. // Extended abstracts of the Int.Conf. Computer Algebra in Scientific Computing – CASC'98. St.-Petersburg, 1998. С.20–21

18. Uteshev A.Yu., Cherkasov T.M. The search for the maximum of a polynomial.// Journal of Symbolic Computation. 1998. V. 25. №5. P.587–618

19. Утешев А.Ю., Черкасов Т.М. К задаче полиномиальной оптимизации.// Доклады АН России. 1998. Т. 361. №2. С. 168–170

20. Uteshev A.Yu., Cherkasov T.M. Symbolic algorithms for polynomial optimization problems.// Abstracts of the Int. Conf. Dedicated to the 90th Anniversary of L.S.Pontryagin. Optimal Control. Moscow, 1998. С.197–198

Лицензия ЛР № 040815 от 22.05.97г.

Подписано к печати 98 г. Формат бумаги 60Х90 1/16. Бумага офсетная.
Печать ризографическая. Усл.-печ. л. 2,0. Тираж 100 экз. Заказ 470.
Отпечатано в отделе оперативной полиграфии НИИ химии СПбГУ.
198904, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр.2.